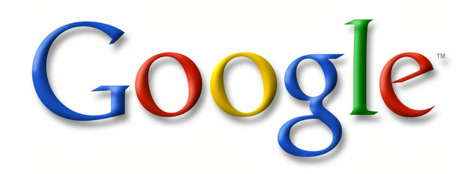
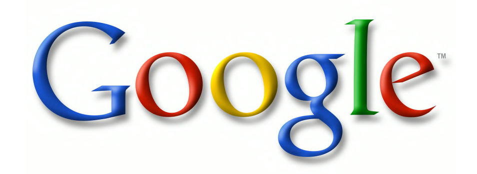
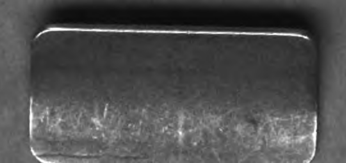
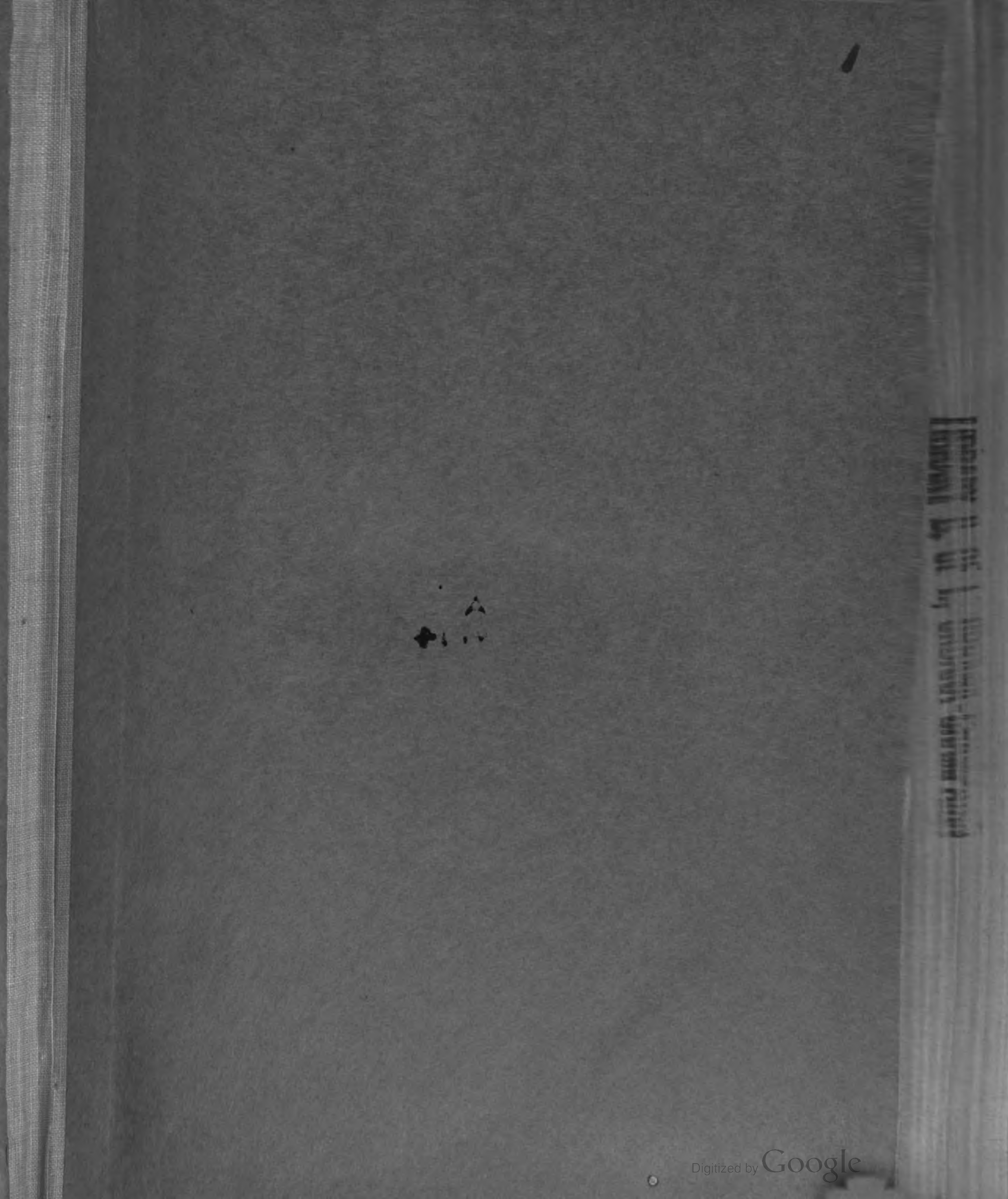












Archiv
für
Elektrotechnik

Unter Beteiligung des Verbandes
Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins

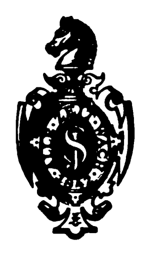
herausgegeben

von

Professor Dr.-Ing. W. Rogowski
Aachen

XIV. Band

Mit zahlreichen Textfiguren



Berlin
Verlag von Julius Springer
1924

Namenverzeichnis.

[1]) Die Arbeit wurde zuerst in Heft 5 mit falschem Bild 2 abgedruckt. Dem Heft 6 ist ein Zweitdruck mit dem richtigen Bild 2 beigefügt worden.

Archiv für Elektrotechnik

XIV. Band. 1. Heft 1924.

Über Reziprozitäten bei Wechselstromkreisen.

Von

K. Matthies und **F. Strecker.**

Einleitung.

Bei der Betrachtung der elektrischen Verhältnisse der Stromresonanzschaltung, bei welcher ein Zweig aus Widerstand r_1 und Induktion L parallel liegt einem Zweige aus Kapazität C und Widerstand r_2 in Reihe, bemerkten wir eine merkwürdige Beziehung dieser Schaltung zu der, die sich durch Vertauschung von L und C ergibt. Die Zweige dieser Kombination bestanden also aus r_1 und C bzw. r_2 und L. Es ließ sich nämlich das Verhalten der einen Kombination aus den Gleichungen der anderen dadurch bestimmen, daß man zu den negativen reziproken Frequenzen überging. Wir nannten die hier zugrunde liegende allgemeine Beziehung die „Frequenzreziprozität".

Wir fanden bereits in der Literatur eine andere Reziprozität beschrieben bei Orlich[1]). Diese ist dadurch gekennzeichnet, daß an Stelle des Widerstandes R der Leitwert G tritt. Die Transformation bedingt natürlich dann unter anderem den Übergang von Strömen in Spannungen und umgekehrt. Diese Reziprozität möge die „Widerstandsreziprozität" heißen.

Wir setzten es uns zur Aufgabe, die Beziehungen zwischen diesen sehr allgemeinen Gesetzmäßigkeiten festzustellen, und gelangten zu der Einsicht, daß durch die Kombination beider Gesetzmäßigkeiten vier im allgemeinen verschiedene Wechselstromschaltungen zu einer Gruppe zusammengefaßt werden können, die einer einheitlichen analytischen wie graphischen Behandlung zugänglich sind.

K. W. Wagner hat in seinen Arbeiten über Kettenleiter Andeutungen der Frequenzreziprozität gemacht, die jedoch kein Bild über die hier herrschenden allgemeinen Gesetzmäßigkeiten geben.

Die vorliegende Arbeit bringt in einem allgemeinen Teil eine Darstellung der Reziprozitätsbeziehungen und die sich daraus ergebenden Schlußfolgerungen; während im 2. Abschnitt die Vierergruppen der Kettenleiter als Beispiele behandelt werden. Diese Betrachtung wirft z. B. ein besonderes Licht auf den Zusammenhang zwischen Kettenleiter I. und II. Art sowie zwischen Spulen- und Kondensatorleitung.

Ein einführendes Beispiel:

Wir gehen aus von einem einfachen Beispiel. Wir betrachten die Scheinwiderstände $\mathfrak{R}$ im Bild 1, a und b sowie die Scheinleitwerte $\mathfrak{G}$ im Bild I c und d. Diese sind:

$$\mathfrak{R}_a = r + j\omega L,$$

$$\mathfrak{R}_b' = r' - \frac{j}{\omega' C'},$$

$$\bar{\mathfrak{G}}_c' = \bar{g}' - \frac{j}{\bar{\omega}' \bar{L}'},$$

$$\bar{\mathfrak{G}}_d = \bar{g} + j\bar{\omega}\bar{C}.$$

[1]) Orlich: „Kapazität und Induktivität", Braunschweig, S. 120. Hier wird verwiesen auf Russel: Alternating currents, Cambridge 1904.

Jeder dieser Ausdrücke hängt von 3 Parametern ab; sie haben die allgemeine Form $\mathfrak{Z} = a + j\nu b$, worin also a: r oder g und b: L, C, $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{C}$ bedeuten kann. Damit die allgemeine Form für alle Werte gilt, müssen wir ν die Werte ω resp. $-\frac{1}{\omega}$ annehmen lassen[1]). a und b können hierbei jeden positiven reellen, ν kann jeden beliebigen komplexen Wert annehmen. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich in der Regel auf die Betrachtung reeller Frequenzwerte. Die Punkte $\mathfrak{Z}$ erfüllen die rechte Halbebene der Gaußschen Zahlenebene. Die Vektoren bilden eine dreifach unendliche Schar. Läßt man nur einen Parameter sich ändern, so laufen die Endpunkte der Vektoren auf einer sogenannten „Ortskurve“[2]). Uns interessieren vor allem die Ortskurven für veränderliches a und ν; also für veränderlichen Ohmschen Widerstand und variable Frequenz. Die letzteren nennen wir „Frequenzdiagramme“. Wir betrachten jetzt das Frequenzdiagramm von Bild I a. Für ein bestimmtes r und L bzw. also a und b ist das Frequenzdiagramm eine Parallele zur imaginären Achse. Der physikalisch realisierbare Teil dieses Diagramms ist der Halbstrahl oberhalb der reellen Achse. Die Punkte des anderen Halbstrahls, der das Frequenzdiagramm über den unendlich fernen Punkt schließt, erhält man für negative Frequenzen.

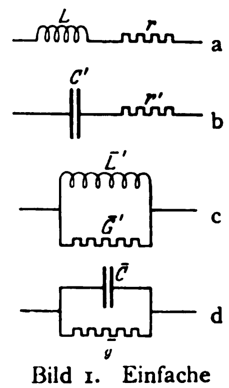


Bild 1. Einfache Vierergruppe.

Betrachtet man nun das Frequenzdiagramm der Kombination Bild 1 b bei r = r' und einem beliebigen C', so erhält man als Frequenzdiagramm dieselbe Gerade, wobei aber nun der physikalisch realisierbare Teil der untere Halbstrahl ist, während sich für negative Frequenzen der obere ergibt. Wählen wir in der Zeichnung dieselbe Strecke als Einheit für den Widerstand wie für den Leitwert, so ergibt sich genau dieselbe Gerade als Frequenzdiagramm für die Scheinleitwerte von Bild 1 c und d, wenn wir nur voraussetzen, daß die numerischen Werte von r und g gleich sind. Wir sehen also, daß ein und dieselbe Gerade das Frequenzdiagramm für vier verschiedene Schaltungen darstellt.

Fassen wir jetzt einen bestimmten Punkt unseres Diagrammes ins Auge, der allgemein durch die Werte a, ν, b festgelegt ist. Nehmen wir an, er sei einem Diagramm für Schaltung Bild 1 a entnommen und zwar für $a = r\,\Omega$, $\nu = \omega\,\sec^{-1}$, $b = L$ Henry.

Denselben Punkt erhalten wir, wenn in der Schaltung Bild 1 b gesetzt wird

$$\text{Bild 1 b:}\quad a = r\,\Omega \qquad b = \frac{1}{C\,\text{Farad}}$$

$$\nu = -\frac{1}{\omega\,\sec^{-1}}.$$

Für die übrigen Kombinationen gelten für diesen Punkt die Gleichungen:

$$\text{Bild 1 d:}\quad a = \bar{g} = \frac{1}{r\,\Omega} \qquad b = \bar{C}\,F.$$

$$\nu = \bar{\omega} = \omega\,\sec^{-1}$$

und

$$\text{Bild 1 c:}\quad a = g'\,S = \frac{1}{r\,\Omega} \qquad b = \frac{1}{L'\,\text{Henry}}$$

$$\nu = -\frac{1}{\omega'\,\sec^{-1}}.$$

[1]) Die Ausdehnung der Reziprozitätsbeziehung auf verallgemeinerte Winkelgeschwindigkeiten rechtfertigt ohne weiteres diese zunächst willkürlich erscheinende Einführung des negativen reziproken Wertes.

[2]) Vgl. Bloch: Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, Zürich 1917.

Numerisches Beispiel:

Ist z. B. im obigen Falle $r = 2\,\Omega$, $L = 10^{-2}$ Henry, $\omega = 10^{3}\,\mathrm{sec}^{-1}$, so erhält man für die Schaltung Bild 1a einen Widerstandsvektor, dessen Realteil $2\,\Omega$ und dessen Imaginärteil $= 10\,\Omega$ ist. Denselben Widerstandsvektor erhalten wir nach obigen Gleichungen unter der Annahme

$$r' = r = 2\,\Omega, \qquad C' = 10^{2}\,\mathrm{F}. \qquad \omega' = -\,10^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

für Bild 1b. Für die beiden anderen Schaltungen erhalten wir einen Scheinleitwert, dessen Vektor dem obigen Widerstandsvektor nach Betrag und Richtung gleich ist, wenn wir setzen im Falle

Bild 1d: $\bar{g} = 2$ Siemens $\quad \bar{C} = 10^{-2}$ Farad
$\bar{\omega} = 10^{3}\,\mathrm{sec}^{-1}$

und Bild 1c: $\bar{g}' = 2$ S. $\quad \bar{L}' = 10^{2}$ Henry
$\bar{\omega}' = -\,10^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1}$.

Hiervon ist I_b und I_c physikalisch nicht realisierbar, wegen der negativen Frequenz und Fall 1d praktisch kaum zu verwirklichen wegen der großen Kapazität. Sollen also die Diagramme einer Ausgangsschaltung für die anderen mitbenutzt werden, so müssen u. U. beim Zeichnen derselben auch solche Fälle berücksichtigt werden, die zunächst für den praktischen Gebrauch als wertlos erscheinen; insbesondere müssen für die Ausgangsschaltung auch die Diagrammteile für negative Frequenzen gezeichnet werden (s. w. u.).

Formulierung der allgemeinen Reziprozitätsbeziehung.

Bei der Widerstandsreziprozität wie sie Orlich dargestellt hat, werden Transformationen nach folgendem Schema vorgenommen[1]):

L	r	ω	J	ℜ
C	g	ω	E	𝔊

Diese Transformation ordnet also je 2 Größen einander wechselseitig zu. Wie Orlich gezeigt hat, betrifft sie auch allgemeine Gesetze, wie z. B. die Kirchhoffschen Regeln, also $\Sigma i = 0$ geht über in $\Sigma e = 0$.

Wir sagen symbolisch, diese Transformation werde bewirkt durch einen Operator, den wir P_1 nennen. Wir schreiben z. B. mit Hilfe dieses Symbols die Überführung der einen Kirchhoffschen Regel in die andere, indem wir einen Pfeil benutzen:

$$\Sigma i = 0 \xrightarrow{P_1} \Sigma e = 0.$$

Bei der Frequenzreziprozität ist folgendermassen zu transformieren.

r	L	ω	ℜ	J	E	$j\omega L$
r	$\frac{1}{C}$	$-\frac{1}{\omega}$	ℜ	J	E	$\frac{1}{j\omega C}$

Auch hier drücken wir diese Transformation symbolisch durch einen Operator P_2 aus.

Diese Schemata besagen natürlich nur, daß überhaupt eine Induktivität in eine Kapazität übergeht, und es wäre sinnlos, wenn man eine bestimmte Induktivität der Schaltung mit einer bestimmten Kapazität derselben Schaltung vertauschen wollte! (In Schaltung Bild I wäre so etwas gar nicht möglich.)

[1]) Die für die Transformation charakteristischen Größen sind eingerahmt.

Wir haben schon gesagt, daß die durch P_1 und P_2 bestimmten Transformationen in beiden Pfeilrichtungen der Schemata auszuführen sind. Kommen z. B. in einer Schaltung mehrere Induktivitäten und Kapazitäten vor, so ist jede Induktivität in eine Kapazität und jede Kapazität in eine Induktivität überzuführen. Wendet man denselben Operator zweimal hintereinander an, so kommt man zur Ausgangsschaltung zurück. Wir drücken dies so aus, indem wir für die mehrmalige Anwendung eines Operators ein Produkt schreiben

$$P_1^2 = 1 \qquad P_2^2 = 1.$$

Die Zahl 1 ist das Symbol für die identische Transformation. Hieraus folgt nun unmittelbar, wenn n eine ganze Zahl bedeutet,

$$P_1^{2n} = 1, \quad P_2^{2n} = 1 \quad P_1^{2n+1} = P_1, \quad P_2^{2n+1} = P_2.$$

Bisher kennen wir die drei Operatoren P_1, P_2 und den Einheitsoperator 1. Wir bilden nun den Operator $P_3 = P_1 P_2 = P_2 P_1$, welcher also durch unmittelbar aufeinanderfolgende Anwendung von P_1 und P_2 entsteht.

Das Transformationsschema lautet:

ω	L	C	r	E	J
$-\frac{1}{\omega}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{1}{C}$	g	J	E

Die Zuordnung ist wiederum wechselseitig, man gelangt also zu denselben Multiplikationsregeln wie für P_1 und P_2.

Es fragt sich nun, was die aufeinanderfolgende Anwendung von P_1 und P_3 oder P_2 und P_3 ergibt. Dies erledigt sich sofort mittels der symbolischen Rechnung.

$$P_1 P_3 = P_1 P_1 P_2 = P_2$$
$$P_3 P_1 = P_1 P_2 P_1 = P_2.$$

Analog ist

$$P_2 P_3 = P_3 P_2 = P_1.$$

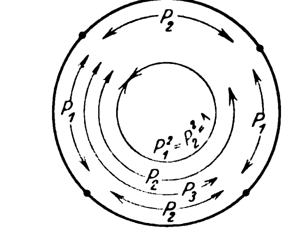
Ebenso leicht bestätigt man

$$P_1 P_2 P_3 = 1.$$

Hieraus folgt, daß sich durch Kombination der bisher verwendeten Operatoren keine neuen Operatoren ergeben.

r, ω, L, C, E

r', $-\frac{1}{\omega'}$, $\frac{1}{C'}$, $\frac{1}{L'}$ E'



g, $\bar{\omega}$, C, $\bar{L}$, J

$\bar{g}'$, $-\frac{1}{\bar{\omega}'}$, $\frac{1}{\bar{L}'}$, $\frac{1}{\bar{C}'}$, $\bar{J}'$

Bild 2. Transformationschema.

Gruppensatz. Gehen wir also von einer bestimmten Schaltung aus, und wenden wir auf sie die Operatoren 1, P_1, P_2, P_3 an, so erhalten wir vier voneinander verschiedene Schaltungen, die einen viergliedrigen Zyklus bilden (s. Bild 2).

Die vier verschiedenen Schaltungen nennen wir die Elemente des Zyklus oder der Vierergruppe. An Stelle der Schaltungsschemata können auch Vektordiagramme oder Systeme von analytischen Ausdrücken als Elemente aufgefaßt werden.

Damit der soeben aufgestellte fundamentale Satz allgemeine Gültigkeit besitzt, muß ein und dasselbe Element mehrfach gezählt werden, falls es in der Gruppe an verschiedenen Stellen auftritt. Ein Element, welches durch P_1, P_2, P_3 in sich selbst übergeht, nennen wir eine Einheit in bezug auf den entsprechenden Operator.



Es ist z. B. eine reine Induktivität eine Einheit in bezug auf P_3. Der Widerstandsvektor ist nämlich $\mathfrak{R} = j\omega L$ und diese Gleichung geht durch P_3 über in $\mathfrak{G} = \frac{1}{j\omega L}$ d. h. wieder in eine für eine Spule gültige Gleichung. Dagegen ist die Spule weder in bezug auf P_1 noch auf P_2 eine Einheit. Eine Einheit für sämtliche Operatoren ist der Ohmsche Widerstand. Bei Kombinationen können nur Einheiten in bezug auf P_2 auftreten, nicht aber in bezug auf P_1 oder P_3, da in diesen Fällen Parallelschaltungen in Reihenschaltungen übergehen.

Beispiel. Bevor wir zur Aufstellung weiterer allgemeiner Sätze übergehen, betrachten wir ein Beispiel für die Transformationen.

Die in Bild 3a—d dargestellten Schaltungen bilden eine Gruppe. Bild a ist ein Kettenleiterglied 1. Art mit Reihenkondensator, Bild b ein Kettenleiterglied 2. Art mit Nebenschluß-Spule.

Diese Bilder lassen sich leicht mit Hilfe der bisher angeführten Sätze auseinander ableiten. Wir erinnern insbesondere an die Transformation der Kirchhoffschen Regeln durch den Operator P_1, woraus folgt, daß einem Stromknotenpunkt ein geschlossener Spannungskreis entspricht und umgekehrt oder wie man auch kurz sagen kann:

Stromteilung und Spannungsteilung resp. Reihen- und Parallelschaltung entsprechen sich gegenseitig.

Beachtet man außerdem, daß bei Anwendung beider Operatoren P_1 und P_2 in den Schaltbildern stets Kapazitäten in Induktivitäten übergehen und umgekehrt, so wird man leicht verfolgen können, wie eine Schaltung aus der anderen entsteht.

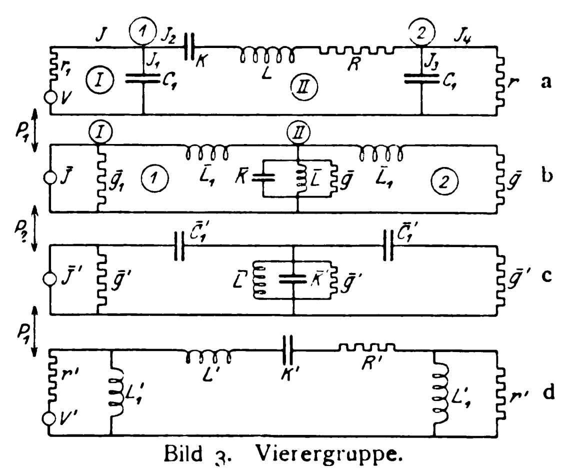


Bild 3. Vierergruppe.

Wir zeigen dies genauer an der Transformation von Bild 3a in Bild 3b durch P_1.

Die Spannungsquelle $\mathfrak{V}$ treibt einen Strom $\mathfrak{J}$ nach Bild 3a durch den Widerstand r_1 nach Punkt ①, wo sich $\mathfrak{J}$ in einen kapazitiven Strom $\mathfrak{J}_1$ und einen Strom $\mathfrak{J}_2$ durch eine Reihenschaltung teilt. $\mathfrak{J}_2$ teilt sich im Punkte ② in den Strom $\mathfrak{J}_3$ durch eine Kapazität und den Strom $\mathfrak{J}_4$ durch einen Ohmschen Widerstand r. Dementsprechend erzeugt nach Bild 3b die Stromquelle $\bar{\mathfrak{J}}$ an der Leitfähigkeit $\bar{g}_1$, eine Spannung $\bar{\mathfrak{V}}$, welche sich teilt in die Spannung $\bar{\mathfrak{V}}_1$ an einer Induktivität $\bar{L}_1$ und $\bar{\mathfrak{V}}_2$ an einer Parallelschaltung. Dies ist der Spannungskreis ①. $\bar{\mathfrak{V}}_2$ teilt sich wieder in die Spannung $\bar{\mathfrak{V}}_3$ an einer Induktivität $\bar{L}_1$ und $\bar{\mathfrak{V}}_4$ an der Leitfähigkeit g, so daß der Spannungskreis ② geschlossen ist. Die Stromknoten ① und ② von Bild 3a sind in die Spannungskreise ① und ② von Bild 3b übergegangen. Desgleichen sind die Spannungskreise Ⓘ und Ⓘⓘ von Bild 3a in die Stromknoten Ⓘ und Ⓘⓘ von Bild 3b übergegangen.

Die an Hand der Schaltbilder entwickelte Transformation läßt sich auch leicht analytisch bestätigen. Wir schreiben die Gleichungssysteme für die beiden Schaltungen nebeneinander, und man sieht ohne weiteres, daß sie durch P_1 ineinander übergehen.

Bild 3a: $\mathfrak{V} - r_1 \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}$

$$\frac{\mathfrak{J}_1}{j\omega C_1} = \mathfrak{J}_2\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega K}\right) + \mathfrak{J}_3 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$\frac{\mathfrak{J}_3}{j\omega C_1} = \mathfrak{J}_4 \cdot r$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$$

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3 + \mathfrak{J}_4$$

Bild 3b: $\mathfrak{J} - \bar{v}\,\bar{g}_1 = \bar{\mathfrak{V}}_1 \cdot \frac{1}{j\bar{\omega}\bar{L}}$

$$\frac{\bar{\mathfrak{V}}_1}{j\bar{\omega}\bar{L}_1} = \bar{\mathfrak{V}}_2\left(\bar{g} + j\bar{\omega}\bar{K} + \frac{1}{j\bar{\omega}\bar{L}}\right) + \bar{\mathfrak{V}}_3 \cdot \frac{1}{j\bar{\omega}\bar{L}_1}$$

$$\frac{\bar{\mathfrak{V}}_3}{j\bar{\omega}\bar{L}_1} = \bar{\mathfrak{V}}_4 \cdot \bar{g}$$

$$\bar{\mathfrak{V}} = \bar{\mathfrak{V}}_1 + \bar{\mathfrak{V}}_2$$

$$\bar{\mathfrak{V}}_2 = \bar{\mathfrak{V}}_3 + \bar{\mathfrak{V}}_4$$

Schaltung Bild 3b geht durch P_2 in Bild 3c über, diese durch P_1 in Bild 3d und diese schließlich wieder durch P_2 in Bild 3a, so daß der Zyklus geschlossen ist.

Allgemeine Sätze:

Wir sprechen jetzt folgenden Satz aus:

Satz: Beziehungen der Elemente einer Gruppe, die durch die Reziprozitäts-Operatoren ineinander übergehen und die sich als Funktionen der Größen

$$\ldots r_i \ldots \ldots j\omega L_k \ldots \ldots \ldots j\omega C_l \ldots$$

darstellen lassen, sind identisch, wenn die durch die Reziprozitätsbeziehungen geforderten Transformationen mit bezug auf ein Maßsystem auch numerisch ausgeführt werden.

Der Beweis dieses Satzes ist trivial. Es sei Q eine Eigenschaft der Ausgangsschaltung, dargestellt durch die funktionale Beziehung $Q = \mathfrak{F}(r_i, j\omega L_k, j\omega C_l)$, wo die r_i, L_k, C_l die in der Schaltung vorhandenen Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten bedeuten. Transformieren wir durch P_1, P_2, P_3, so erhalten wir die reziproken Eigenschaften

$$\bar{Q} = \mathfrak{F}(\bar{g}_i, j\bar{\omega}\bar{C}_k, j\bar{\omega}\bar{L}_l)$$

$$\bar{Q}' = \mathfrak{F}\left(\bar{g}_i', \frac{1}{j\bar{\omega}'\bar{L}_k'}, \frac{1}{j\bar{\omega}'\bar{C}_l'}\right)$$

$$Q' = \mathfrak{F}\left(r_i', \frac{1}{j\omega' C_k'}, \frac{1}{j\omega' L_l'}\right).$$

Wir betrachten nun eine der Veränderlichen dieser Funktion, z. B. $j\omega L_k$ von Q, welche durch P_1 in $j\bar{\omega}\bar{C}_k$ von $\bar{Q}$ übergegangen ist. Da ω durch P_1 nicht geändert wird, also $\omega = \bar{\omega}$ ist und $\bar{C}_k$ numerisch denselben Wert in der Kapazitätseinheit des benutzten Maßsystems besitzt wie L_k in der Induktivitätseinheit, so hat die Veränderliche ihren numerischen Wert behalten. Führen wir jetzt die Variable $j\omega L_k$ durch P_3 in die entsprechende von $\bar{Q}'$ über, so erhalten wir $\frac{1}{j\bar{\omega}'\bar{L}_k'}$. Da $\bar{\omega}'$ den negativen reziproken Wert von ω hat und $\bar{L}_k'$ den reziproken Wert von L_k, so ist wiederum der numerische Wert von $1/j\bar{\omega}'\bar{L}_k'$ gleich dem Wert von $j\omega L_k$ in Q. Diese Betrachtungen lassen sich anolog für alle anderen Veränderlichen durchführen. Aus der Identität der numerischen Werte der Variablen folgt aber sofort die Identität der Funktionswerte. Damit ist der Satz bewiesen.

Der Satz gilt in noch größerer Allgemeinheit als er hier ausgesprochen ist. Die Grundsätze, die zur Aufstellung der Reziprozitätsbeziehung für einfach periodische Vorgänge geführt haben, lassen sich auch auf den Fall verallgemeinerter komplexer Winkelgeschwindigkeiten anwenden, z. B. auf Ausgleichsvorgänge.

Bei der Entladung eines Kondensators über einen Widerstand, ist die verallgemeinerte Winkelgeschwindigkeit $p = -\frac{1}{r \cdot C}$, also in diesem Falle reell. Durch



Anwendung von P_1 auf diese Gleichung ergibt sich $\overline{p} = -\frac{r}{L}$, während durch Anwendung von P_2 folgt $\frac{1}{p'} = -\frac{L'}{r'}$, wobei in diesem Falle p durch P_2 in $+\frac{1}{p}$ übergehen muß. Die Bedeutung dieser Ausdrücke ist ja bekannt. Desgleichen kann man die Sätze auf mehrere Frequenzen erweitern. Um diese Arbeit, welche nur das Grundlegende behandeln soll, nicht über Gebühr auszudehnen, haben wir darauf verzichtet, die Elektrizitätsmenge und den magnetischen Fluß zu betrachten, daher treten bei uns z. B. keine gegenseitigen Induktionen und Kapazitäten auf. Bei Orlich sind diese Dinge für die P_1-Transformation durchgeführt; für die Operatoren P_2 und P_3 kann man an Hand der bisherigen Ausführungen die Verhältnisse leicht klar legen. Wir hoffen, später darüber berichten zu können.

Die Funktion $\mathfrak{F}$ hängt von $i + k + l$ Veränderlichen ab, von denen die Variablen der Formen $j\omega L_k$, $j\omega C_l$ noch den Parameter ω enthalten. Im ganzen ist also $\mathfrak{F}$ von $i + k + l + 1$ Parametern abhängig. Sind alle Parameter konstant, so ist $\mathfrak{F}$ ein Punkt der komplexen Zahlenebene, ist nur ein Parameter veränderlich, so erhalten wir eine Ortskurve, z. B. ein Widerstandsdiagramm, ein Frequenzdiagramm usw. Bei 2 veränderlichen Parametern ergibt sich eine einfach unendliche Kurvenschar, bei n veränderlichen Parametern eine Kurvenschar der Ordnung ∞^{n-1}.

Wir erinnern hier an das Beispiel im Bild 1, wo $i = 1$, $k = 1$, $l = 0$ war, so daß wir also 3 Parameter hatten. Wir betrachteten dort ein Frequenzdiagramm und einen Punkt desselben. Die dort gemachten Bemerkungen über die Einführung negativer Frequenzen und die Vollständigkeit der Diagramme übertragen sich ohne weiteres auf Fälle mit beliebig vielen Parametern. Die Theorie der Reziprozitäten bezweckt die einheitliche Behandlung von vier verschiedenen Schaltungen. Man behandelt ein Element der Gruppe und erledigt damit auch die drei anderen. Um aber für die drei reziproken Elemente die praktisch realisierbaren Fälle mit zu umfassen, muß man eben für das Ausgangselement auch praktisch nicht vorkommende Größenverhältnisse berücksichtigen. Die Berücksichtigung negativer Frequenzen und praktisch undurchführbarer Größenzusammenstellungen meinen wir, wenn wir davon sprechen, daß ein Diagramm vollständig aufgestellt ist. Wir bemerken hier noch, daß man auch eine allgemeine Form der Behandlung zugrunde legen kann, aus welcher durch Spezialisierung die Fälle für die vier Elemente abgeleitet werden können, wie es in unseren Beispielen weiter unten durchgeführt ist.

In den Wechselstromkreisen kommen vier qualitativ verschiedene Parameter vor r, ω, L, C. Wir fanden nun eine Reziprozität vor, bei welcher r in g oder $\frac{1}{r}$ durch P_1 überging und stellten dieser eine zweite zur Seite, welche ω in $\frac{-1}{\omega}$ durch P_2 überführte. Diesen Transformationen entsprechen die Operatoren P_1 und P_2, welche uns zu der viergliedrigen Gruppe führten. Man könnte nun versuchen, weitere Operatoren aufzustellen. Hierfür bleiben noch die beiden Möglichkeiten L in $1/L$, C in $1/C$ überzuführen. Damit aber diese Transformationen einen Sinn haben, muß ω in $-\frac{1}{\omega}$ übergehen, denn die drei Parameter ω, L, C treten nur in den Verbindungen $j\omega L$, $j\omega C$ auf. Dann kommen wir aber zu dem Operator P_3, der ja gleich $P_1 \cdot P_2$ ist. Durch Kombination von P_1, P_2, P_3 läßt sich aber, wie wir auch schon gesehen haben, kein neuer Operator mehr bilden. Wir erhalten das Resultat: bei den Parametern r, ω, L, C ist die Gruppe der Operatoren einer Erweiterung nicht mehr fähig.



Anwendung der Theorie.

Die Kettenleitergruppe:

Wir wenden jetzt die allgemeine Theorie auf den Kettenleiter an.

In Bild 4 ist je ein Glied eines Kettenleiters erster und zweiter Art dargestellt. Für den Kettenleiter erster Art gilt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_{n-1} - \mathfrak{J}_n &= \mathfrak{G}/2\ (\mathfrak{V}_n + \mathfrak{V}_{n-1}) \\ \mathfrak{V}_{n-1} - \mathfrak{V}_n &= \mathfrak{R}\ (\mathfrak{J}_{n-1} - \mathfrak{G}/2 \cdot \mathfrak{V}_{n-1}). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Durch P_1 möge $\mathfrak{G}$ in $\bar{\mathfrak{R}}$ übergehen und $\mathfrak{R}$ in $\bar{\mathfrak{G}}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{V}}_{n-1} - \bar{\mathfrak{V}}_n &= \bar{\mathfrak{R}}/2\ (\bar{\mathfrak{J}}_n + \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}) \\ \bar{\mathfrak{J}}_{n-1} - \bar{\mathfrak{J}}_n &= \bar{\mathfrak{G}}\ (\bar{\mathfrak{V}}_{n-1} - \bar{\mathfrak{R}}/2\ \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}). \end{aligned} \qquad (2)$$

Bild 4. Kettenleiterglied I. und II. Art.

Das sind aber die Grundgleichungen für den Kettenleiter zweiter Art. Es mögen nun weiter die Beziehungen gelten:

$$\mathfrak{R} \xrightarrow{P_2} \mathfrak{R}' \qquad \bar{\mathfrak{G}} \xrightarrow{P_2} \bar{\mathfrak{G}}'$$

$$\mathfrak{G} \xrightarrow{P_2} \mathfrak{G}' \qquad \bar{\mathfrak{R}} \xrightarrow{P_2} \bar{\mathfrak{R}}'.$$

Wir erhalten durch P_2 aus (1) und (2) dieselben Gleichungsysteme, nur stehen anstelle der $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$, $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{G}}$ die mit dem Apostroph versehenen Größen, also besteht die Vierergruppe des Kettenleiters aus je 2 Leitern erster Art und 2 Leitern zweiter Art. Diese Betrachtung zeigt ebenfalls die starke innere Verknüpfung, die zwischen den Kettenleitern erster und zweiter Art besteht und die auch aus den Betrachtungen K. W. Wagners hervorgeht. Zugleich sehen wir, daß es zu jedem Kettenleiter erster und zweiter Art einen frequenzreziproken Kettenleiter derselben Art gibt.

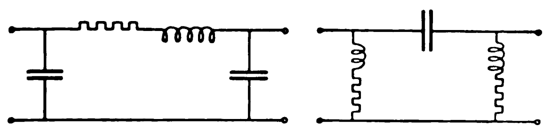


Bild 5. Spulen- und Kondensatorleitung.

Wagner hat an dem speziellen Beispiel der Spulen- und Kondensatorleitung ein frequenzreziprokes Verhalten gefunden[1]). Er sagt: „Verdreht man die Glieder einer Spulenleitung sämtlich um 90°, so entsteht die sog. Kondensatorleitung (Bild 5). Sie bildet ein eigenartiges Gegenstück zur Spulenleitung; ihre Eigenschaften bei einer gewissen Frequenz entsprechen den Eigenschaften der Spulenleitung bei der reziproken Frequenz, sofern die Eigenfrequenz als Frequenzeinheit angenommen wird" (Bild 5).

Eine vollständige Reziprozität hat Wagner nur bei Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes feststellen können, da der eben angeführte Satz nicht das Wesen der Sache trifft. Wie wir erkannt haben, genügt es in diesem Falle zur Herstellung der frequenzreziproken Schaltung, Kapazität und Induktivität ihre Plätze vertauschen zu lassen. Dabei bleibt natürlich der Ohmsche Widerstand im $\mathfrak{R}$-Zweig liegen. Die Drehung um 90° liefert nur dann das richtige Resultat, wenn man vom Ohmschen Widerstand absieht. Wir benutzen dieses interessante Beispiel zur Erläuterung unserer Ausführung über die Gruppe des Kettenleiters.

[1]) Wagner, Archiv für Elektrotechnik, Bd. 8, S. 91, 1919.

Wir gehen aus von Bild 6a, welches ein Kettenleiterglied erster Art darstellt, wie es Wagner behandelt. An Hand des Bildes überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Transformationen. Der Vergleich des Bildes 6d mit Bild 5 lehrt sofort, daß das Wagnersche Glied der Kondensatorleitung keine Frequenzreziprozität liefern kann.

Die Fortpflanzungskonstante $\gamma = \alpha j + \beta$.

Es ist[1])

$$\mathfrak{Sin}\, \gamma/2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{G}}.$$

Wie man sieht, ist diese Funktion in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ symmetrisch. Sie behält daher ihre allgemeine Form für alle Kettenleiter überhaupt, wie schon Wagner hervorgehoben hat. Es treten nur die gestrichenen Größen unter die Wurzel. Im Falle Bild 6a ist

$$\mathfrak{R} = r + j\omega L \qquad \mathfrak{G} = j\omega C,$$

also:

$$2\, \mathfrak{Sin}\, \gamma/2 = \pm \sqrt{j\omega C r - \omega^2 L C}.$$

Bild 6. Gruppe der Spulenleitung.

Wir setzen:

$$\omega_0^2 = \frac{4}{LC} \qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \eta \qquad \varrho = \frac{r}{\sqrt{L/C}}.$$

Damit wird

$$\mathfrak{Sin}\, \gamma/2 = \pm \sqrt{\frac{j\varrho\eta}{2} - \eta^2}.$$

Durch Anwendung von P_1, P_2, P_3 erhalten wir für die Abkürzungen folgende Transformationen:

Für Bild 6b: $\eta = \omega \sqrt{\frac{LC}{4}} \xrightarrow{P_1} \bar{\omega} \sqrt{\frac{\bar{L}\bar{C}}{4}} = \bar{\eta},$

„ „ 6c: $\eta \xrightarrow{P_3} \frac{1}{\bar{\omega}'} \frac{1}{2\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\bar{\eta}'},$

„ „ 6d: $\eta \xrightarrow{P_2} \frac{1}{\sqrt{4\omega'^2 L'C'}} = \frac{1}{\eta'},$

und

für Bild 6b: $\varrho = r\sqrt{\frac{L}{C}} \xrightarrow{P_1} \bar{g}\sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{C}}} = \frac{1}{\bar{\varrho}},$

„ „ 6c: $\varrho \xrightarrow{P_3} \bar{g}'\sqrt{\frac{\bar{L}'}{\bar{C}'}} = \frac{1}{\bar{\varrho}'},$

„ „ 6d: $\varrho \xrightarrow{P_2} r'\sqrt{\frac{C'}{L'}} = \varrho'.$

[1]) S. K. W. Wagner: Archiv für Elektrotechnik, Bd. 3 und 8.

Damit erhalten wir für $\mathfrak{Sin}\,\gamma/2$ im Falle

$$\text{b)}\ \pm\sqrt{\frac{j\eta}{2\varrho}-\eta^2}, \qquad \text{c)}\ \pm\sqrt{\frac{-j}{2\varrho\eta'}-\frac{1}{\eta'^2}}, \qquad \text{d)}\ \pm\sqrt{-\frac{j\varrho'}{2\eta'}-\frac{1}{\eta'^2}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht bestätigen, indem man sie für die betr. Schaltungen direkt aufstellt. Man sieht, daß sich für alle vier Elemente der Gruppe dieselbe allgemeine Form ergibt, so daß eine einheitliche Behandlung möglich ist. Wir schließen die weiteren Untersuchungen an die allgemeine Form an, sie lautet:

$$\mathfrak{Sin}\,\gamma/2 = \pm\sqrt{\frac{j\,x\,y}{2}-y^2}.$$

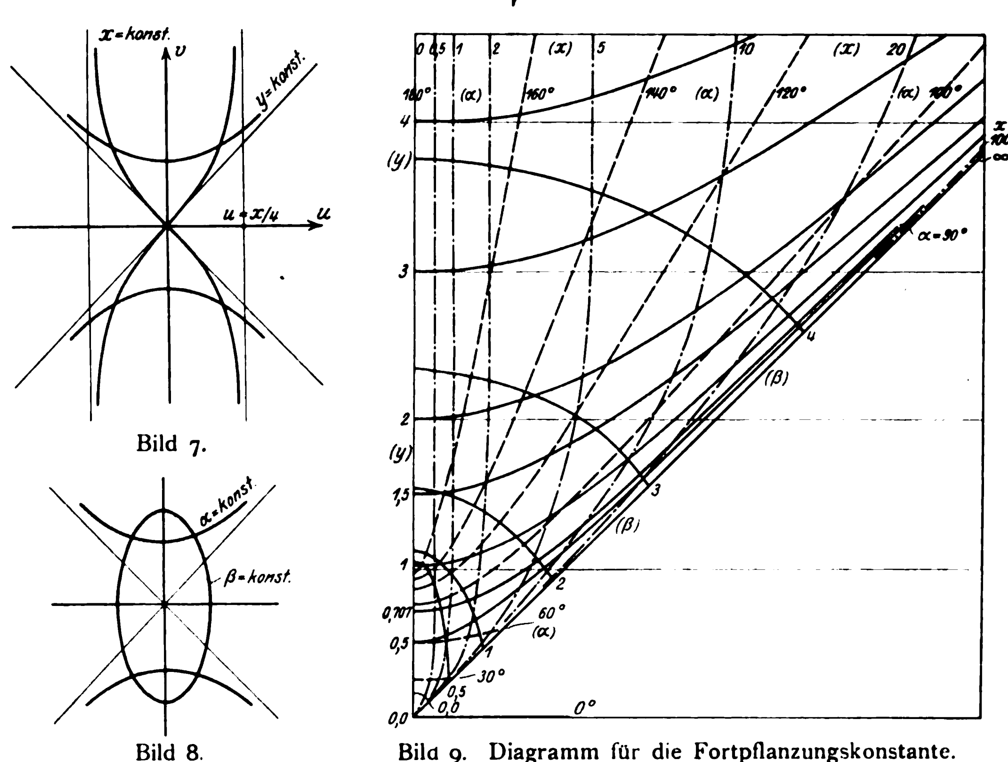


Bild 7.

Bild 8.

Bild 9. Diagramm für die Fortpflanzungskonstante.

Die Veränderliche x, welche entweder ϱ, ϱ', $\frac{1}{\varrho}$ oder $\frac{1}{\varrho'}$ darstellt, nimmt nur positiv reelle Werte an, während η unseren früheren Bemerkungen entsprechend positive und negative Werte haben kann. Um uns über die Funktion $\gamma = \varphi(x, y)$ Klarheit zu verschaffen, betrachten wir die Abbildungen in der komplexen Zahlenebene

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Sin}\,\gamma/2$$

und

$$\mathfrak{z} = \sqrt{\frac{j\,x\,y}{2}-y^2} = u + j\,v.$$

Durch Quadrieren und Trennung des Reellen vom Imaginären ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$v^2 - u^2 = y^2 \tag{1}$$

und

$$16\,u^2 v^2 + x^2 u^2 - x^2 v^2 = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) stellt für y = const. in der u, v-Ebene gleichseitige Hyperbeln dar; sie liefert uns also die Kurven gleicher Frequenz (s. Bild 7). Gleichung (2)

liefert für x = const. Kurven vierten Grades, die unter dem Namen „Kohlenspitzenkurven" bekannt sind[1]). Für kleine u und v haben wir die Näherungsgleichung $u^2 - v^2 = 0$. Die Kurven haben also die Asymptoten der obigen Hyperbel als Tangenten im Nullpunkte. Als Asymptoten der Kohlenspitzenkurven ergeben sich die Geraden

$$u = \pm \frac{x}{4}.$$

Die Kurven sind symmetrisch zu beiden Achsen und zum Nullpunkt. Mit kleiner werdendem x rücken die Asymptoten nach der imaginären Achse zu und bei x = 0 fallen sie mit derselben zusammen. x verschwindet bei Leitern erster Art, wenn $\varrho = 0$ und bei den Leitern zweiter Art, wenn $\varrho \to \infty$. Physikalisch heißt das also, bei den Leitern erster und zweiter Art verschwindet bei x = 0 der Verlust durch Ohmschen Widerstand. Die Schnittpunkte je einer Kohlenspitzenkurve mit einer Hyperbel stellen Punkte der Funktion $\mathfrak{z} = \mathfrak{Sin}\,\gamma/2$ dar, für die bestimmten Werte von x und y oder ϱ und η mit welchen die einzelnen Kurven der Schar beziffert sind. Um aus $\mathfrak{Sin}\,\gamma/2$ das Argument γ selbst zu erhalten, betrachten wir die Abbildung

$$\mathfrak{z} = u + jv = \mathfrak{Sin}\,\gamma/2 = \mathfrak{Sin}\,\frac{\alpha j + \beta}{2}.$$

Durch leichte Umformung, Trennung des reellen Teiles vom imaginären und Elimination von α und β erhält man hieraus

$$\frac{u^2}{\mathfrak{Sin}^2\beta/2} + \frac{v^2}{\mathfrak{Cof}^2\beta/2} = 1 \tag{1}$$

$$\frac{v^2}{\mathfrak{Sin}^2\alpha/2} - \frac{u^2}{\mathfrak{Cof}^2\alpha/2} = 1 \tag{2}$$

Für konstantes β ergeben sich also Ellipsen in der u, v-Ebene für α = const. hingegen Hyperbeln (s. Bild 8). Denkt man sich die beiden Kurvennetze für konstantes x und y sowie für konstantes α und β aufeinandergelegt, so kann man unmittelbar die zusammengehörigen Wertepaare ablesen. In Bild 9 haben wir die beiden Kurvennetze übereinandergezeichnet und zwar ist wegen der Symmetrie des ganzen Bildes zu beiden Achsen nur ein Quadrant dargestellt.

Betrachten wir die β-Kurven, so sieht man, daß mit kleiner werdendem β der Ellipsen-Quadrant sich auf die Strecke von 0 bis j zusammenzieht, während der Hyperbelast mit Annäherung an $\alpha = 180^0$ sich an die imaginäre Achse legt. Bei $\alpha = 180^0$ artet die Hyperbel in den doppelt zu zählenden Strahl von + j bis ∞ aus. Für die y-Kurven ist zu bemerken, daß die Kurve $y = \pm 1/\sqrt{2}$ mit der Hyperbel $\alpha = 90^0$ zusammenfällt. Hierauf hat schon Wagner aufmerksam gemacht. Diesem y-Wert entspricht für die Schaltung Bild 7a und b ein Frequenzverhältnis $\pm 1/\sqrt{2}$, für die reziproken Schaltungen das Verhältnis $\eta = \pm \sqrt{2}$. Die Kohlenspitzenkurven sind sämtlich einander ähnlich. Ihre Konstruktion ist denkbar einfach, wenn man die leicht ableitbare Relation beachtet

$$r = \pm \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\cos 2\psi}{\sin^2 2\psi}}$$

wo ψ den Winkel bedeutet, den der Radius-Vektor r mit der imaginären Achse bildet. Verfolgt man die imaginäre Achse vom Nullpunkt angefangen, so überblickt man leicht den Verlauf von α und β in Abhängigkeit von der Frequenz bei x = 0. Von y = 0 bis 1 ist $\beta = 0$, α wächst von $0-180^0$, dagegen von y = 1 bis ∞ steigt die Dämpfung β rasch an, während α konstant 180^0 beträgt. Analog kann man die Verhältnisse für andere Parameter-Werte betrachten, und auf diese Weise die

[1]) S. Wieleitner: Algebraische Kurven, Sammlung Göschen, Bd. 1, S. 56, Beispiel 2 Bild 26.

Bilder 10—12 entwickeln. Bild 10 stellt das Winkelmaß α in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis dar, wobei x als Parameter festgehalten ist. Die y-Werte von 0 bis 1 sind als Abszissen maßstäblich abgetragen; für die Werte y größer als 1 sind dagegen in aus dem Bild ersichtlicher Weise die reziproken Werte benutzt. Alle α-Kurven gehen durch den Punkt $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$, $\alpha = 90^0$. Für das entsprechende Frequenzverhältnis ist also α unabhängig von x, d. h. vom Ohmschen Widerstand. Für $x = 0$ erhalten wir eine Kurve, die sich zusammensetzt aus dem Stück der Kurve $\alpha = \arcsin y$ für $x \leqq 1$ und der Geraden $\alpha = 180^0$ für $y \gtrsim 1$. Einen Punkt

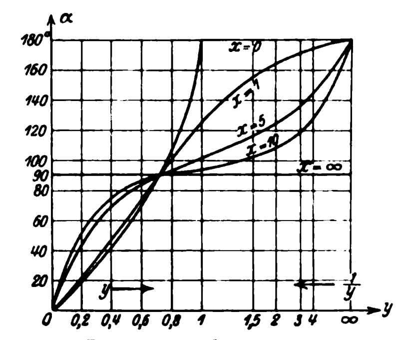


Bild 10. Diagramm für das Winkelmaß.

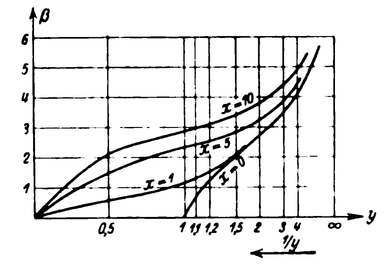


Bild 11. Dämpfungsdiagramm.

der Kurven Bild 10 erhält man dadurch, daß man in Bild 9 den Schnittpunkt der Kurven für das gewählte x und y aufsucht, und zwischen den Kurven für α den α-Wert interpoliert.

Auf gleiche Weise erhält man Bild 11, wenn man zwischen den β-Kurven interpoliert. Wie bei Bild 10 setzt sich hier die Kurve für $x = 0$ aus zwei sehr einfachen Teilen zusammen. Für $y \leqq 1$ erhalten wir ein Stück der y-Achse, für $y \geqq 1$ die Kurve $\beta = 2\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\,y$. Die zweite Kurve ist allerdings verzerrt, da die Abszissen nach reziproken Werten abgetragen sind.

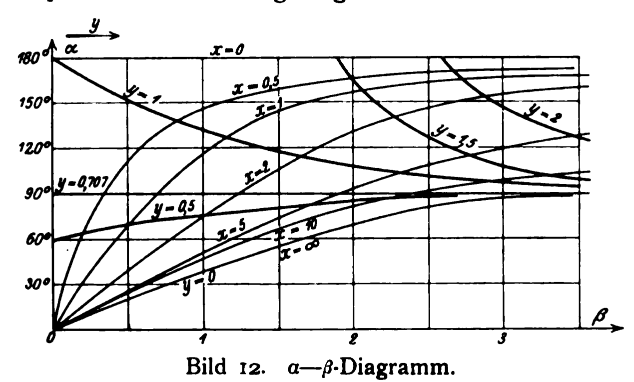


Bild 12. α—β-Diagramm.

Aus dem Diagramm für die Fortpflanzungskonstante, Bild 9, lassen sich die Werte nur schlecht ablesen, da für alle vier Veränderlichen Kurven auftreten, die sich noch dazu unter ziemlich spitzen Winkeln schneiden. Wir haben daher noch Bild 9, die u-v-Ebene auf die $\alpha — \beta$-Ebene abgebildet. Wir erhalten so Bild 12, eine Darstellung mit den beiden Parametern x und y in der γ-Ebene. Der Schnittpunkt zweier Kurven x und y stellt direkt die Fortpflanzungskonstante γ dar, wobei mit Hilfe der rechtwinkligen Koordinaten sofort α und β getrennt abgelesen werden können. Dieses Diagramm gibt offenbar die Verhältnisse am übersichtlichsten wieder, läßt sich aber schwer direkt gewinnen.

Zahlenbeispiele.

Für die Praxis werden in der Regel nur kleine x-Werte in Frage kommen. Um die Diagramme für diesen Fall zu benutzen, müßte man den schmalen Streifen längs der imaginären Achse in Richtung der reellen Achse genügend dehnen. Wir geben daher Beispiele mit relativ großen Werten von x, um die Punkte noch auf unserem mehr qualitativen, der Übersicht dienenden Diagramm ablesen zu können. Für α und y ergeben sich dabei nur die absoluten Werte. Es sei für die Schaltung des Bildes 6a

$$r = 1000\,\Omega,\ L = 0{,}5\ \mathrm{H},\ C = 0{,}5\ \mu\mathrm{F}.$$
$$\varrho = x = 1,\ \omega_0 = 4 \cdot 10^3,\ \eta = 2 = y.$$

Dann ergibt sich aus dem Diagramm $\beta = 2{,}7$, $\alpha = 164^0$, während der genaue Wert nach der Rechnung $\beta = 2{,}685$, $\alpha = 164^0$ beträgt. Für eine Schaltung des Bildes 6b sei

$$\bar{r} = 2000\,\Omega,\ \bar{L} = 0{,}5\ \mathrm{H},\ \bar{C} = 0{,}5\ \mu\mathrm{F}.$$
$$\bar{\varrho} = 2{,}0,\ \bar{\eta} = 1{,}5 = y,\ x = 0{,}5.$$

Aus dem Diagramm liest man ab

$$\beta = 1{,}95,\quad \alpha = 167^0.$$

Endlich sei noch für Bild 6d

$$r' = 200\,\Omega,\quad C' = 3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{F},\quad L' = 3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H}$$
$$x = \varrho' = 0{,}672,\quad \eta' = 0{,}707,\quad y = 1{,}43.$$

Es ergibt sich:

$$\beta = 1{,}85,\quad \alpha = 162^0.$$

Diese Beispiele mögen genügen, um die Verwendbarkeit des obigen Diagramms zu zeigen. Man kann das Diagramm auch für die Funktion $\mathfrak{Cof}\,\gamma = 1 + \frac{\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{G}}{2}$ entwickeln. Es vereinfachen sich dann die Bilder. Aber statt eines Quadranten muß man nun eine Halbebene betrachten und außerdem ergeben sich für y = const Parallele zur imaginären Achse, deren Schnittpunkte mit der reellen Achse quadratisch fortschreiten, so daß schon bei Ausdehnung der Werte von y bis z. B. y = 4 die Frequenzlinien für y unter 1 sehr eng zusammengedrängt werden.

Der Wellenwiderstand.

Der Wellenwiderstand beim Kettenleiter erster Art ist $W_1 = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{G}}{4}}}$.

Wir zeigen, daß dieser Ausdruck durch P_1 in die Formel für den Kettenleiter zweiter Art übergeht.

$$\frac{1}{\overline{W}_2} = \sqrt{\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{R}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\overline{\mathfrak{R}}\overline{\mathfrak{G}}}}$$

$$W_2 = \sqrt{\frac{\overline{\mathfrak{R}}}{\overline{\mathfrak{G}}}} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\mathfrak{G}}}.$$

Siebketten.

Unter den Kettenleitern haben die Siebketten eine hervorragende praktische Bedeutung. Die bekannten 8 Formen der einfacheren Siebe gliedern sich in zwei Gruppen, deren Schaltungschemata in dem Bild 14 angegeben sind, in welcher der Zusammenhang durch die Operatoren klar hervortritt.



Wagner gibt im Archiv Band 8, Seite 89, den Verlauf des Wellenwiderstandes einfacher Siebketten zwischen den Grenzfrequenzen in den Bildern 23—26 wieder. In Bild 13 sind bei den betr. Schaltungen die Nummern der in Frage kommenden Wagnerschen Bilder angegeben. Man vergleiche auch die Formeln 50—53 Seite 87

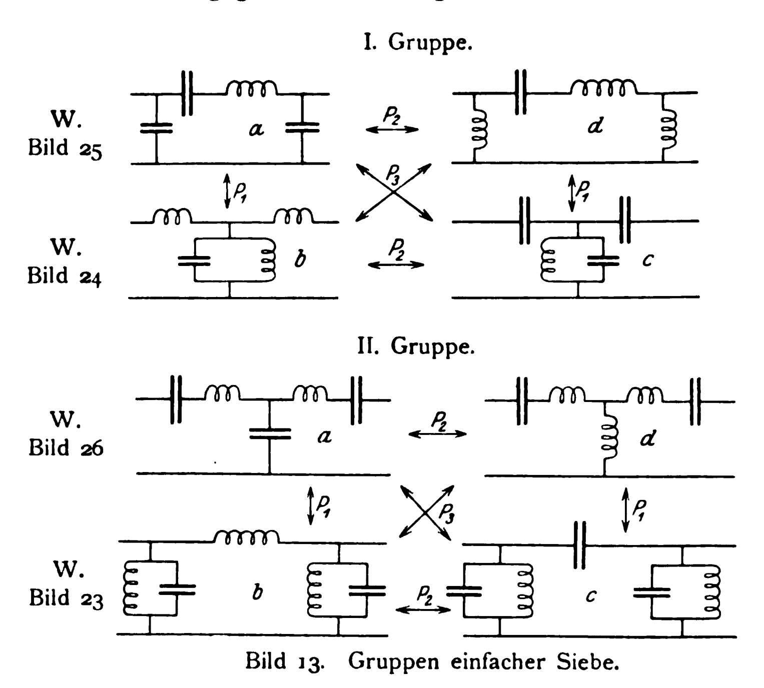


Bild 13. Gruppen einfacher Siebe.

bei Wagner. Man ersieht aus Wagners Bildern, daß bei den widerstandsreziproken Schaltungen sich die Wellenwiderstände reziprok verhalten, während der Verlauf für die entsprechenden Leiter erster und zweiter Art völlig verschieden ist.

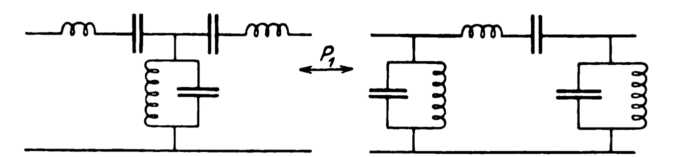


Bild 14. Gruppe doppelt abgestimmter Siebe.

Bei den Sieben nach Bild 14 gibt es nur 2 Erscheinungsformen, nämlich Sieb erster und zweiter Art.

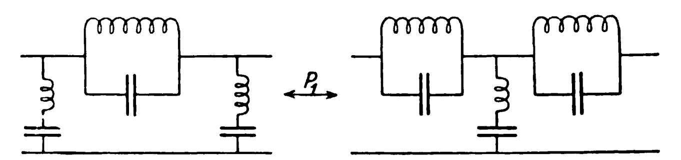


Bild 15. Gruppe doppelt abgestimmter Wellenschlucker.

Der Grund dafür ist, daß sie Einheiten in bezug auf P_2 sind. Hieraus folgt auch, daß jeder dieser Siebe sich bei einer bestimmten relativen Frequenz so verhält wie bei der reziproken Frequenz. Dies ist auch der Grund dafür, daß bei den Doppelsieben für die Frequenzen zu beiden Seiten der Lochbreite die Dämpfungskurven sehr nahe gleich steil ansteigen. Bei den oben behandelten einfacheren Sieben ist das natürlich nicht der Fall, da sie keine Einheiten in bezug auf P_2 sind.

In naher Beziehung zu den Siebketten stehen die Wellenschlucker, sie gehen aus den Siebketten dadurch hervor, daß man die Parallelschaltung in den Hauptzug und die Reihenschaltung in den Ableitungszweig schaltet. Genau so wie bei den Siebketten kann man hier 2 Gruppen einfacher Schlucker und eine Gruppe von doppelt abgestimmten Schluckern unterscheiden, die nur 2 Doppelelemente enthält (s. Bild 15).

Zusammenfassung.

Eine bereits bekannte Reziprozitätsbeziehung (Widerstands-Reziprozität) erlaubt die einheitliche Behandlung zweier im allgemeinen voneinander verschiedener Wechselstromkreise. Die vorliegende Arbeit fügt hierzu eine zweite Reziprozitätsbeziehung (Frequenz-Reziprozität), welche sich im allgemeinsten Fall auf komplexe Frequenzen beziehen läßt, hier aber vorwiegend nur für reelle Frequenzen behandelt ist.

Die Kombination beider Beziehungen erlaubt die einheitliche Behandlung von vier, eine zyklische Gruppe bildenden Wechselstromkreisen. In der Gruppe treten Elemente auf, welche zueinander sowohl frequenz- als widerstandsreziprok sind. Eine Vierergruppe umfaßt vier voneinander verschiedene Elemente, solange nicht zu sich selbst reziproke Elemente auftreten. Elemente der Gruppe, die mit Bezug auf eine der Beziehungen zu sich selbst reziprok sind, werden Einheiten mit Bezug auf diese Beziehung genannt.

Es wird gezeigt, unter welchen Bedingungen sich die Reziprozität nicht auf die allgemeine Form der Gesetzmäßigkeiten beschränkt, sondern auch auf zahlenmäßige Rechnungen anwendbar ist.

Die allgemeinen Erwägungen werden durch Anwendung auf die Kettenleiter erläutert. Jede Vierergruppe von Kettenleitern besteht aus je zwei Leitern erster und zweiter Art, von denen die Leiter gleicher Art frequenzreziprok sind, während Widerstandsreziprozität zwischen Leitern verschiedener Art besteht.

Als Sonderfall wird die Fortpflanzungskonstante der Gruppe der Spulen- und Kondensatorleitung allgemein und zahlenmäßig behandelt. Ferner werden die Gruppen der Siebketten und Wellenschlucker aufgestellt. Die praktisch wichtige Eigenschaft der doppelt abgestimmten Siebe und Schlucker, beiderseits des Durchlässigkeitsbereichs annähernd gleich steil ansteigende Dämpfungskurven zu liefern, wird darauf zurückgeführt, daß sie mit Bezug auf die Frequenz zu sich selbst reziprok, also Einheiten sind.

Stromverteilung in einem Rade.

Von

J. Würschmidt und F. Stäblein.

Gelegentlich der Aufgabe, eine Metallwalze größerer Dimensionen einem bestimmten elektrolytischen Prozeß zu unterziehen, ergab sich folgende Frage. Gegeben sei ein Rad mit einer Anzahl Speichen, das so vom elektrischen Strom durchflossen wird, daß dieser an der Peripherie, also etwa an einer Speiche oder zwischen 2 Speichen in der Mitte eintritt und an der Achse des Rades austritt. Wie groß ist der Widerstand des Rades, wenn der Widerstand der Peripherie und der Widerstand einer einzelnen Speiche bekannt ist? Wie groß sind die Stromstärken in den einzelnen Speichen? Besonders die Beantwortung der letzteren Frage war von Wichtigkeit, da bei gegebener, für den elektrolytischen Prozeß notwendiger Gesamtstromstärke zu große Stromstärken in den der Eintrittsstelle benachbarten Speichen vermieden werden mußten.



Wir geben im folgenden zunächst die strenge Lösung des Problems, wie sie von dem einen von uns (Würschmidt) durchgerechnet wurde, dann eine näherungsweise Lösung (Stäblein), die zugleich eine Erweiterung der ersteren darstellt und eine andere Frage mit beantwortet.

1. Strenge Lösung.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Stromzuleitung finde gerade bei einer Speiche statt (Bild 1). Dieser Speiche geben wir den Index 0; wir bezeichnen dementsprechend die n-Speichen mit den Indizes 0, 1, 2 ... $n-2$, $n-1$. Den Spannungsabfall längs der Speiche 0 vom Rande zum Radmittelpunkt bezeichnen wir mit E_0, entsprechend sind die Größen E_1, E_2 ... E_{n-2}, E_{n-1} definiert. Der Spannungsabfall längs der Peripherie von der Speiche 0 zur Speiche 1 sei E_{01}; ebenso führen wir E_{12}, E_{23}, ... $E_{n-2,n-1}$, $E_{n-1,0}$ ein. Die Stromstärken seien durch i_0, i_1, ... i_{n-2}, i_{n-1}, i_{01}, i_{12}, ... $i_{n-2,n-1}$, $i_{n-1,0}$ gegeben. Die Gesamtstromstärke sei i, der Widerstand einer Speiche r, der Widerstand zwischen 2 Speichen auf der Peripherie sei w. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} &E_0 - E_1 + E_{10} = 0 \\ &E_1 - E_2 + E_{21} = 0 \\ &\vdots \\ &E_{n-2} - E_{n-1} + E_{n-1,n-2} = 0 \\ &E_{n-1} - E_0 + E_{0,n-1} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II)}\quad \begin{aligned} &i_{01} + i_{0,n-1} + i_0 = i \\ &i_{12} + i_{10} + i_1 = 0 \\ &\vdots \\ &i_{n-2,n-1} + i_{n-2,n-3} + i_{n-2} = 0 \\ &i_{n-1,0} + i_{n-1,n-2} + i_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} &E_0 = i_0 r \\ &E_1 = i_1 r \\ &\vdots \\ &E_{n-2} = i_{n-2} r \\ &E_{n-1} = i_{n-1} r \end{aligned} \qquad \text{(IV)}\quad \begin{aligned} &E_{01} = i_{01} w \\ &E_{12} = i_{12} w \\ &\vdots \\ &E_{n-2,n-1} = i_{n-2,n-1} w \\ &E_{n-1,0} = i_{n-1,0} w. \end{aligned}$$

Aus diesen 4 Gleichungssystemen ergibt sich, wenn man $\frac{w+2r}{r} = \lambda$ und $(\lambda - 2)i = J$ setzt, nach einigen Umformungen das aufzulösende Gleichungssystem:

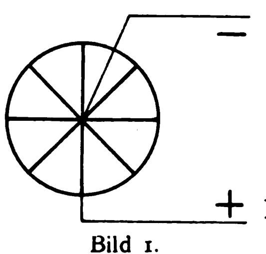


Bild 1.

$$i_0 + i_2 = i_1 \lambda \qquad (1)$$
$$i_1 + i_3 = i_2 \lambda \qquad (2)$$
$$\vdots$$
$$(n-1)\quad i_{n-2} + i_0 = i_{n-1} \lambda$$
$$(n)\quad i_{n-1} + i_1 = i_0 \lambda - J.$$

Für dieses gilt, wie man sich durch Addition leicht überzeugen kann, die Beziehung $\Sigma i_\varkappa = i$.

Führen wir nun die Funktion $A_\varkappa$ durch die Gleichung

$$A_\varkappa = \lambda^\varkappa + (\varkappa - 1)\lambda^{\varkappa-2} + \frac{(\varkappa-2)(\varkappa-3)}{1 \cdot 2}\lambda^{\varkappa-4} + \frac{(\varkappa-3)(\varkappa-4)(\varkappa-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\lambda^{\varkappa-6} + \ldots\ldots$$

ein, d. h. setzen wir:

$$A_0 = 1$$
$$A_1 = \lambda$$
$$A_2 = \lambda^2 - 1$$
$$A_3 = \lambda^3 - 2\lambda \quad \text{usf.}^{1)},$$

so folgt aus den obigen ersten $n-1$-Gleichungen:

[1]) Man überzeugt sich leicht, daß $A_\varkappa + A_{\varkappa-2} = \lambda A_{\varkappa-1}$.

$$i_0 = \frac{A_{n-1}}{1 + A_{n-2}} i_{n-1}, \tag{1a}$$

ferner aus der nten Gleichung

$$i_0 = \frac{J + (1 + A_{n-2}) i_{n-1}}{\lambda + \lambda A_{n-2} - A_{n-1}}. \tag{2a}$$

Oder, wenn wir den Ausdruck

$$1 + 2A_{n-2} + A_{n-2}^2 - \lambda A_{n-1} - \lambda A_{n-1} A_{n-2} + A_{n-1}^2 = N$$

setzen:

$$i_0 = -\frac{J A_{n-1}}{N} \tag{1b}$$

$$i_{n-1} = -\frac{J(1 + A_{n-2})}{N}. \tag{2b}$$

Der Ausdruck für N kann wesentlich vereinfacht werden, wenn wir die Beziehung

$$A_x^2 + A_{x-1}^2 - \lambda A_x A_{x-1} = 1$$

benutzen[1]). Es ergibt sich:

$$N = 2 + 2A_{n-2} - \lambda A_{n-1}$$

oder auch

$$N = 2 + A_{n-2} - A_n.$$

In symmetrischer Form können wir N schreiben, wenn wir von folgender Beziehung Gebrauch machen.

Es sei

$$\lambda A_{n-1} - 2A_{n-2} = \varphi(n-1,\ n-2),$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(n-1, n-2) &= (\lambda-2) A_{n-1} + (\lambda-2) A_{n-2} + 2A_{n-1} - \lambda A_{n-}{}^{2} \\
&= (\lambda-2)(A_{n-1} + A_{n-2}) + 2(\lambda A_{n-2} - A_{n-3}) - \lambda A_{n-2} \\
&= (\lambda-2)(A_{n-1} + A_{n-2}) + \varphi(n-2, n-3).
\end{aligned}$$

Ebenso:

$$\varphi(n-2, n-3) = (\lambda-2)(A_{n-2} + A_{n-3}) + \varphi(n-3, n-4)$$

$$\vdots$$

Endlich

$$\begin{aligned}
\varphi(2,1) &= (\lambda-2)(A_2 + A_1) + \varphi(1,0) \\
&= (\lambda-2)(A_2 + A_1) + \lambda^2 - 2
\end{aligned}$$

Oder

$$\varphi(n-1, n-2) = (\lambda-2)[A_{n-1} + 2A_{n-2} + \ldots + 2A_2 + A_1] + \lambda^2 - 2.$$

Also auch

$$\begin{aligned}
-N = \varphi(n-1, n-2) - 2 &= (\lambda-2)[A_{n-1} + 2A_{n-2} + 2A_{n-3} + \ldots + 2A_2 + A_1] \\
&\quad + (\lambda-2)(\lambda+2) \\
&= (\lambda-2)\left(\sum_{0}^{n-1}{}^{x} \cdot A_x + \sum_{0}^{n-2}{}^{x} A_x\right).
\end{aligned}$$

Die Lösung unseres Gleichungssystems wird somit:

$$i_0 = -\frac{J}{N} A_{n-1}$$

$$i_{n-1} = -\frac{J}{N}(A_0 + A_{n-2})$$

---

[1]) Aus

$$A_x = \lambda A_{x-1} - A_{x-2} \quad \text{oder} \quad A_x^2 = \lambda^2 A_{x-1}^2 - 2\lambda A_{x-1} A_{x-2} + A_{x-2}^2$$

folgt:

$$A_x^2 + A_{x-1}^2 = A_{x-1}^2 + A_{x-2}^2 + \lambda A_{x-1}(\lambda A_{x-1} - A_{x-2}) - \lambda A_{x-1} A_{x-2}$$

oder

$$A_x^2 + A_{x-1}^2 - \lambda A_x A_{x-1} = A_{x-1}^2 + A_{x-2}^2 - \lambda A_{x-1} A_{x-2} = 1 \ (\text{für } x = 2).$$

$$i_{n-2} = -\frac{J}{N}(A_1 + A_{n-3})$$

$$\vdots$$

$$i_{n-m} = -\frac{J}{N}(A_{m-1} + A_{n-m-1})$$

$$\vdots$$

$$i_2 = -\frac{J}{N}(A_{n-3} + A_1)$$

$$i_1 = -\frac{J}{N}(A_{n-2} + A_0)$$

oder allgemein:

$$i_{n-m} = i\,\frac{A_{m-1} + A_{n-m-1}}{\sum\limits_{0}^{n-1} A_x + \sum\limits_{0}^{n-2} A_k} = i_m$$

wobei m die Werte 1, 2, . . . n oder 0, 1, . . . n — 1 annimmt und $A_{-1} = 0$ zu setzen ist ($i_n \equiv i_0$).

Der Gesamtwiderstand W des Rades ergibt sich aus

$$i_0 r = i \cdot W$$

durch die Gleichung

$$\frac{r}{W} = 1 + 2\frac{\Sigma A_{n-2}}{A_{n-1}}.$$

Dieser Ausdruck kann für die numerische Rechnung noch folgendermaßen umgeformt werden:

Da

$$A_0 = A_1{}^2 - A_0 A_2 = A_2 \cdot A_2 - A_1 A_3 = \ldots = A_{n-2} \cdot A_{n-2} - A_{n-3} A_{n-1}$$
$$A_1 = A_1 A_2 - A_0 A_3 = A_2 A_3 - A_1 A_4 = \ldots = A_{n-3} \cdot A_{n-2} - A_{n-4} A_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$A_{n-3} = A_1 A_{n-2} - A_0 A_{n-1} = A_2 A_{n-3} - A_1 A_{n-2} = \ldots = A_1 \cdot A_{n-2} - A_0 A_{n-1}$$
$$A_{n-2} = \qquad = A_0 \cdot A_{n-2}$$

so folgt durch Addition

$$\Sigma A_{n-2} = A_{n-2} \Sigma A_{n-2} - A_{n-1} \Sigma A_{n-3}$$

Oder

$$\frac{A_{n-1}}{\Sigma A_{n-2}} = \frac{A_{n-2}}{\Sigma A_{n-3}} - \frac{1}{\Sigma A_{n-3}}.$$

Ebenso

$$\frac{A_{n-2}}{\Sigma A_{n-3}} = \frac{A_{n-3}}{\Sigma A_{n-4}} - \frac{1}{\Sigma A_{n-4}} \quad \text{usf.}$$

Oder allgemein

$$\frac{A_{n-1}}{\Sigma A_{n-2}} = -\frac{1}{\Sigma A_{n-3}} - \frac{1}{\Sigma A_{n-4}} - \ldots - \frac{1}{\Sigma A_0} + A_1$$

d. h. wir können den Ausdruck $\frac{r}{W}$ in der Form schreiben:

$$\frac{r}{W} = 1 + \frac{2}{\lambda - \left(\frac{1}{\Sigma A_0} + \frac{1}{\Sigma A_1} + \frac{1}{\Sigma A_2} + \ldots + \frac{1}{\Sigma A_{n-3}}\right)}.$$



Für kleine n ergibt sich so eine bequeme Art der Widerstandsberechnung, für große n konvergierten die Summanden $\frac{1}{\Sigma A_x}$ bald gegen Null, so daß ein Näherungswert schon für eine kleinere Zahl von Summanden erreicht wird.

Einige Zahlenbeispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1) $n = 2$, d. h. das Rad besitzt nur einen Durchmesser (Bild 2a).

$$\frac{r}{W_2} = 1 + \frac{2}{\lambda} = \frac{\lambda + 2}{\lambda} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{W_2} = \frac{1}{r}\frac{w + 4r}{w + 2r}$$

$$i_0 = i\frac{\lambda}{\lambda + 2} \quad \text{oder} \quad i_0 = i\frac{w + 2r}{w + 4r}$$

$$i_1 = i\frac{2}{\lambda + 2} \quad \text{oder} \quad i_1 = i \cdot \frac{2r}{w + 4r}$$

i_0 wird also um so größer im Verhältnis zu i_1 sein, je größer w im Verhältnis zu r ist, wie zu erwarten.

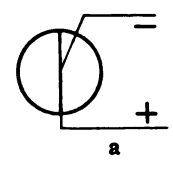
2) $n = 3$ (Bild 2b).

$$\frac{r}{W_3} = 1 + \frac{2}{\lambda - 1} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{W_3} = \frac{1}{r}\frac{w + 3r}{w + r}$$

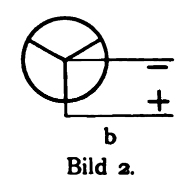
$$i_0 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} \quad \text{oder} \quad i_0 = i\frac{w^2 + 4wr + 3r^2}{w^2 + 6wr + 9r^2}$$

$$i_1 = \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} \quad \text{oder} \quad i_1 = i\frac{wr + 3r^2}{w^2 + 6wr + 9r^2}$$

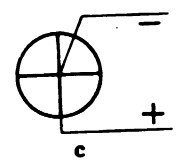
$$i_2 = \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} \quad \text{oder} \quad i_2 = i_1.$$



a



b



c

Bild 2.

3) $n = 4$ (Bild 2c).

$$\frac{r}{W_4} = \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{\lambda^2 - 2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{W_4} = \frac{1}{r} \cdot \frac{w^2 + 6wr + 8r^2}{w^2 + 4wr + 2r^2}$$

$$i_0 = \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda^2 + 2\lambda} \quad \text{oder} \quad i_0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{w^2 + 4wr + 2r^2}{w^2 + 6wr + 8r^2}$$

$$i_1 = i_3 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 2\lambda} \quad \text{oder} \quad i_1 = i_3 = \frac{1}{r}\frac{wr + 2r^2}{w^2 + 6wr + 8r^2}$$

$$i_2 = \frac{2}{\lambda^2 + 2\lambda} \quad \text{oder} \quad i_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{2r^2}{w^2 + 6wr + 8r^2}.$$

4. Für eine größere Anzahl von Speichen und gegebenes λ kann man so verfahren, daß man zunächst $\frac{1}{\Sigma A_{n-3}}$ berechnet und zusieht, ob es klein gegen λ ist. Dann genügt es, zur Widerstandsberechnung mit $\frac{1}{\Sigma A_{n-4}}$ abzubrechen. Man berechnet zweckmäßig nacheinander die ΣA_0, ΣA_1 usf. bis ΣA_i $(i \leqq n - 3)$ groß genug geworden ist. Beispielsweise ergibt sich für $w = \frac{1}{10} r$ oder $\lambda = 2{,}1$ die Reihe

$\Sigma A_0 = 1$	$\Sigma A_4 = 18{,}789$
$\Sigma A_1 = 3{,}10$	$\Sigma A_5 = 28{,}886$
$\Sigma A_2 = 6{,}51$	$\Sigma A_6 = 42{,}872$
$\Sigma A_3 = 11{,}571$	$\Sigma A_7 = 66{,}345$

d. h. $\frac{1}{\Sigma A_7}$ ist nur $1^1/_2$% von 1 oder weniger als $^3/_4$% von λ; oder für $n = 10$ würde die Berücksichtigung bis $\frac{1}{\Sigma A_6}$ ein bereits ziemlich richtiges Resultat liefern.

Ist der Widerstand zwischen 2 Speichen groß gegen den Speichenwiderstand, so konvergieren, da λ groß wird, die $\frac{1}{\Sigma A_x}$ viel rascher. Z. B. erhält man für $w = 8\,r$ oder $\lambda = 10$:

$\Sigma A_0 = 1$	$1 : \Sigma A_0 = 1$
$\Sigma A_1 = 11$	$1 : \Sigma A_1 = 0{,}0909$
$\Sigma A_2 = 110$	$1 : \Sigma A_2 = 0{,}0091$
$\Sigma A_3 = 1090$	$1 : \Sigma A_3 = 0{,}0009$
$\Sigma A_4 = 10791$	$1 : \Sigma A_4 = 0{,}0001.$

Hieraus ergibt sich folgende Reihe für die Widerstände bei 2, 3, 4 usw. Speichen:

$W_2 = 0{,}83333$	$W_5 = 0{,}81651$
$W_3 = 0{,}81818$	$W_6 = 0{,}81650$
$W_4 = 0{,}81666$	$W_7 = 0{,}81650.$

Die Zahl der Speichen spielt somit hier keine große Rolle mehr; bei mehr als 3 Speichen ist der Widerstand nur mehr unmerklich kleiner.

In diesem Falle sind naturgemäß die Unterschiede in den Stromstärken, die durch die einzelnen Speichen fließen, sehr beträchtlich.

2. Näherungslösung.

Um die Strom- und Spannungsverteilung am Rad näherungsweise zu lösen, denken wir uns nach Bild 3 den Umfang aufgeschnitten und gestreckt (A_0, A_1, A_2 ...)

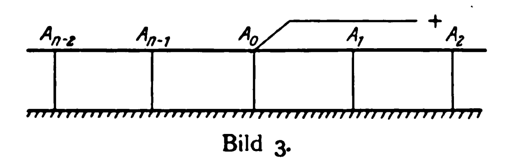


Bild 3.

und die Speichen am Achsenende geerdet. Auf diese Weise können wir das Rad, ohne an Widerstand und Stromverteilung etwas zu ändern, in ein Leitersystem überführen, das formal ähnlich ist einem Kabel, dessen Isolationswiderstand nicht als unendlich groß betrachtet werden kann. Das Problem des Rades und das des schlecht isolierten Kabels hängen demnach aufs engste zusammen und wir werden die Lösungen des einen auch auf die des andern Problems anwenden können. Wir betrachten also zunächst die Verhältnisse allgemein an einem Kabel, wo sie infolge der dort vorhandenen Stetigkeit etwas einfacher liegen. Der beim Kabel stetig über eine gewisse Länge verteilte Verluststrom durch die Isolation ist nämlich beim Rad auf einzelne Stellen, die Speichen, zusammengedrängt.

Es seien r und w Isolations- und Leitungswiderstand des Kabels, i' der durch die Isolation abfließende Strom, alles pro Längeneinheit. Ferner sei i die Stromstärke und E die Spannung im Kabel in der Entfernung x vom Anfangspunkt, wo die Spannung E_0 angelegt ist. Dann gelten für eine beliebige Stelle x die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} i' \cdot r &= E; \\ -\frac{d_E}{dx} &= i \cdot w; \\ i' &= -\frac{di}{dx}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Daraus

$$i \cdot w = -\frac{d_E}{dx} = -r \cdot \frac{di'}{dx} = r \cdot \frac{d^2 i}{dx^2} \qquad \text{(b)}$$

Als allgemeine Lösung findet man:

$$\left.\begin{aligned} & i = A \cdot e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot x} + B \cdot e^{-\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot x} \\ & \text{und mit (a)} \\ & i' = \sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \left(-A \cdot e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot x} + B \cdot e^{-\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot x}\right) \\ & E = \sqrt{r \cdot w}\left(-A \cdot e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot x} + B \cdot e^{-\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot x}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten A und B lassen sich diese Lösungen dem Problem des Rades anpassen. In unserem Fall entsprechen einander Kabelseele und Radumfang, Speichen- und Isolationswiderstand, Index der Speiche und Entfernung vom Anfangspunkt x. Die i' sind also die Speichenströme, i der Strom im Umfang. Die Grenzbedingungen sind:

1. Die Spannung am Zuleitungspunkt $= E_0$;
2. $i = 0$ für $x = \frac{n}{2}$, da aus Symmetriegründen an dem der Zuleitung gegenüber liegenden Punkt des Umfangs kein Strom fließen darf. Also

$$E_0 = \sqrt{r \cdot w} \cdot (-A + B) \qquad \text{(d)}$$

und

$$0 = A \cdot e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}} + B \cdot e^{-\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}};$$

daraus

$$A = -\frac{E_0}{\sqrt{r \cdot w}} \cdot \frac{e}{e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}} + e^{-\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}}} \qquad \text{(e)}$$

$$B = \frac{E_0}{\sqrt{r \cdot w}} \cdot \frac{e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}}}{e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}} + e^{-\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}}}.$$

Der gesamte durch das Rad fließende Strom berechnet sich zu:

$$J = 2\, i_{[x=0]} = 2\,(A + B); \qquad \text{(f)}$$

und sein Gesamtwiderstand zu:

$$W = \frac{E_0}{2\,(A + B)}. \qquad \text{(g)}$$

Die einzelnen Speichenströme werden erhalten, indem man in der Formel für i'(c) statt x den entsprechenden Index setzt:

$$i_x = i_{n-x} = \frac{E_0}{r} \cdot \frac{e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \left(\frac{n}{2} - x\right)} + e^{-\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \left(\frac{n}{2} - x\right)}}{e^{\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}} + e^{-\sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{n}{2}}}; \qquad \text{(h)}$$

dabei sind bereits die aus (e) folgenden Werte für die Konstanten A und B eingesetzt.

Führen wir hyperbolische Funktionen ein, so erhalten unsere Ergebnisse die einfache Gestalt:

$$J = \frac{2\, E_0}{\sqrt{r \cdot w}} \cdot \mathfrak{Tg}\, \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{w}{r}}; \tag{f'}$$

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{r \cdot w} \cdot \mathfrak{Cot}\, \frac{n}{2} \sqrt{\frac{w}{r}}; \tag{g'}$$

$$i_x = i_{n-x} = \frac{E_0}{r} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{n}{2} - x\right) \cdot \sqrt{\frac{w}{r}}}{\mathfrak{Cof}\, \frac{n}{2} \sqrt{\frac{w}{r}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{w}{r}} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{n}{2} - x\right) \sqrt{\frac{w}{r}}}{\mathfrak{Sin}\, \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{w}{r}}} \cdot J. \tag{h'}$$

Die größten Abweichungen von der strengen Rechnung wird die Näherungsformel in der unmittelbaren Umgebung der Einströmstelle zeigen, denn die speziellen Fälle, wie Zuleitung an einer Speiche oder zwischen zwei Speichen sind dabei nicht auseinandergehalten. In der Praxis, wenn sich das Rad dreht, fällt die Unterscheidung von vornherein weg.

Zum Schluß mag ein numerisches Beispiel zum Vergleich der Ergebnisse der beiden Methoden folgen.

Es sei $n = 20$; $w = 1$; $r = 10$ und der Stromeintritt erfolge an einer Speiche (am Umfang). In beiden Fällen sei $J = 1$. Die i_x sind in Bruchteilen von J gegeben.

	Strenge Rechnung	Näherungsrechnung		Strenge Rechnung	Näherungsrechnung
W	1,5675	1,5857	W	1,5675	1,5857
E_0	1,5675	1,5857	E_0	1,5675	1,5857
i_0	0,1567	0,1587	$i_6 = i_{14}$	0,0256	0,0256
$i_1 = i_{19}$	0,1146	0,1159	$i_7 = i_{13}$	0,0199	0,0199
$i_2 = i_{18}$	0,0839	0,0847	$i_8 = i_{12}$	0,0162	0,0162
$i_3 = i_{17}$	0,0616	0,0621	$i_9 = i_{11}$	0,0141	0,0141
$i_4 = i_{16}$	0,0454	0,0457	i_{10}	0,0134	0,0134
$i_5 = i_{15}$	0,0338	0,0340			

Der Fehler der Näherungsrechnung übersteigt auch bei den Speichen mit kleinem Index nicht 1,5 %; die Übereinstimmung würde noch besser werden, wenn man die Worte nicht auf gleiche Gesamtstromstärke J, sondern auf gleiche Anfangsspannung E_0 bezöge. Dann wären die Werte für E_0 und i_x in der letzten Spalte noch mit dem Spannungsverhältnis $\frac{1{,}5675}{1{,}5857}$ zu multiplizieren und bei den der Stromzuführung benachbarten Speichen mit der höchsten Belastung würden die Stromstärken praktisch fehlerfrei erhalten werden.

Kritisches über das Problem des Ziehens und seine Literatur.

Von

Walter Albersheim.

Mitteilung aus dem elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

Schon kurz nach Erfindung des Röhrensenders machte sich bei Einschaltung eines Zwischenkreises das „Ziehen“ und „Springen“ von Frequenzen und Stromstärken störend bemerkbar. Seit Kriegsende befassen sich zahlreiche Veröffentlichungen[1]) mit der Erklärung und Vorausberechnung dieser Erscheinung.

Auf den ersten Blick scheinen die verschiedenen Forscher in Ableitung und Form ihrer Lösungen stark voneinander abzuweichen. Es ist daher eine zeitgemäße Aufgabe, ihre Ansätze und Ergebnisse miteinander zu vergleichen, um so einen Überblick über den augenblicklichen Stand des Problems zu gewinnen.

I. Abschnitt: Vorbereitende Arbeiten.

a) Schwingungstheorie gekoppelter Systeme.

Wir werden später sehen, daß der selbsterregte Zwischenkreisröhrensender aufgefaßt werden kann als ein gekoppeltes Paar freischwingender elektrischer Oszillatoren, von denen mindestens einer negative Dämpfung besitzt. Infolgedessen muß für seine Arbeitsweise die Theorie gekoppelter Schwingungskreise von Bedeutung sein. Diese wurde vor Jahren entscheidend gefördert durch M. Wien (Lit.-Verz. 26)[1]), der freilich den Interessen der damaligen Zeit entsprechend keine negativ, sondern nur positiv gedämpfte Systeme in Betracht zog.

1. Kapazitive Kopplung nach Wien.

M. Wien legt den Schwerpunkt seiner Untersuchungen auf kapazitiv gekoppelte Kreise, etwa nach Bild 1.

Für solche gelten die Differentialgleichungen[2])

$$\left.\begin{aligned} L_1 i_1'' + R_1 i_1' + \frac{1}{C_1} i_1 + \frac{1}{C_k} i_2 = 0 \\ L_2 i_2'' + R_2 i_2' + \frac{1}{C_2} i_2 + \frac{1}{C_k} i_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bild 1.

Der bekannte Ansatz $i_n = A \cdot e^{\vartheta t}$ mit $\vartheta = -\alpha + j\omega$ führt zu der Grundgleichung 4. Grades:

$$\vartheta^4 + a\vartheta^3 + b\vartheta^2 + c\vartheta + d = 0 \qquad (2)$$

[1]) Siehe das Literaturverzeichnis auf Seite 74 am Schluß der nachfolgenden Arbeit. Die einzelnen Abhandlungen werden im folgenden durch ihre Nummer im Verzeichnis bezeichnet werden.

[2]) Es bedeute in den Einzelkreisen:

$\lambda_1 = \frac{R_1}{2L_1}$ die primäre, $\lambda_2 = \frac{R_2}{2L_2}$ die sekundäre Eigen-Dämpfung,

$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} - \lambda_1^2}$ die primäre, $\Omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2} - \lambda_2^2}$ die sekundäre Eigen-Frequenz,

$\sigma = 1 - \frac{C_1 C_2}{C_k^2}$ den Streufaktor. Im übrigen sei auf das Register der Abkürzungen und Zeichen auf den Seiten 73 und 74 am Schluß der nachfolgenden Arbeit hingewiesen.



mit den Konstanten:

$$a = 2(\lambda_1 + \lambda_2)$$
$$b = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + 4\lambda_1\lambda_2$$
$$c = 2(\lambda_1\Omega_2^2 + \lambda_2\Omega_1^2)$$
$$d = \sigma\Omega_1^2\Omega_2^2.$$

Eine derartige Gleichung 4. Grades, wenn auch mit anderen Koeffizienten, gilt für jedes System zweier beliebig gekoppelter Schwingungskreise.

Man kann nun die genaue Lösung der Grundgleichung (2) anschreiben. Sie ist indessen für den praktischen Rechner viel zu verwickelt gebaut. Was der Ingenieur und der Physiker brauchen, sind möglichst einfache Beziehungen zwischen den bekannten Größen: Eigenfrequenzen und Dämpfungen der Einzelkreise sowie dem Kopplungsfaktor, und den gesuchten: Frequenzen und Dämpfungen der Koppelschwingungen. Die Unübersichtlichkeit der strengen Lösung zwingt dazu, Näherungen anzustreben.

Als ersten Schritt in dieser Richtung berechnet Wien die Koppelfrequenzen ω_1 und ω_2 unter völliger Vernachlässigung der Dämpfung zu:

$$\omega_1 = \Omega_1 \sqrt{\frac{1 + x^2}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right]} \tag{3a}$$

$$\omega_2 = \Omega_1 \sqrt{\frac{1 + x^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right]}, \tag{3b}$$

wobei $x = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ das Verhältnis der Eigenfrequenzen bedeutet.

Um auch für gedämpfte Kreise einen Näherungswert aufstellen zu können, beschränkt Wien seine Untersuchungen durch folgende Voraussetzungen:

1. $(x - 1)^3 \ll 1$, d. h. annähernde Resonanz der Einzelkreise;
2. $\left(\frac{\lambda_n}{\Omega_n}\right)^3 \ll 1$, d. h. schwache Dämpfung beider Kreise;
3. $k^3 \ll 1$, d. h. lose Kopplung.

Seine weiteren Rechnungen zeigen, daß zwei Hauptfälle unterschieden werden müssen je nach dem Verhältnis der Kopplungsgröße k zur Differenz der Einzeldämpfungen. Der kritische Wert der Kopplung liegt bei

$$k_{kr} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\omega}. \tag{4}$$

Für $k < k_{kr}$ spricht man von vorherrschender Dämpfung,
für $k > k_{kr}$ von vorherrschender Kopplung.

1. Vorherrschende Dämpfung.

Die Koppelfrequenzen betragen nach Wien:

$$\omega_1 = \Omega_1\left(1 - \frac{k^2}{8} - \frac{k^2}{4}\frac{x - 1}{(x - 1)^2 + (l_2 - l_1)^2}\right) \tag{5a}$$

$$\omega_2 = \Omega_2\left(1 - \frac{k^2}{8} + \frac{k^2}{4}\frac{x - 1}{(x - 1)^2 + (l_2 - l_1)^2}\right), \tag{5b}$$

die zugehörigen Dämpfungen

$$\alpha_1 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\cdot\frac{\frac{k^2}{4}}{(x - 1)^2 + (l_2 - l_1)^2} \tag{6a}$$

$$\alpha_2 = \lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \frac{\frac{k^2}{4}}{(x-1)^2 + (l_2 - l_1)^2}, \tag{6b}$$

wobei l_1 und l_2 die auf die Einheit Ω_1 reduzierten Einzeldämpfungen bedeuten

$$\left(l_n = \frac{\lambda_n}{\Omega_1}\right).$$

Im Resonanzfall $x = 1$ fallen die Frequenzen zusammen zu dem Wert

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega = \Omega\left(1 - \frac{k^2}{8}\right) \approx \Omega, \tag{7}$$

während die Dämpfungen verschieden bleiben.

2. Vorherrschende Kopplung.

Wien gibt die Werte

$$\omega_1 = \Omega_1 \left[\frac{1+x}{2} - \frac{k^2}{8} - \sqrt{(x-1)^2 + k^2 - \frac{(l_2 - l_1)\,k^2}{(x-1)^2 + k^2}}\right] \tag{8a}$$

$$\omega_2 = \Omega_1 \left[\frac{1+x}{2} - \frac{k^2}{8} + \sqrt{(x-1)^2 + k^2 - \frac{(l_2 - l_1)\,k^2}{(x-1)^2 + k^2}}\right] \tag{8b}$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + k^2}} \tag{9a}$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + k^2}}. \tag{9b}$$

Es sind also stets 2 Frequenzen vorhanden, deren Dämpfungen bei Resonanz den gemeinsamen Wert

$$\alpha_R = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \tag{10}$$

annehmen, während bei jeder Verstimmung zur rascheren Schwingung die stärkere Dämpfung gehört[1]).

2. Induktive Kopplung nach Wien.

Die in vielen Fällen praktisch wichtige induktive Kopplung (Bild 2) sucht Wien auf die kapazitive zurückzuführen.

Nach ihm sollen die Formeln (5) bis (10) ohne weiteres auf induktiv gekoppelte Systeme anwendbar sein, wenn man an Stelle der Größen: λ_1, λ_2, k^2 die Ausdrücke:

$$\lambda_1' = \frac{\lambda_1}{\sigma}, \quad \lambda_2' = \frac{\lambda_2}{\sigma}, \quad k^{2\prime} = \frac{k^2}{\sigma}$$

Bild 2.

[1]) Für den Grenzfall kritischer Kopplung betragen die Frequenzen:

$$\omega_n = \Omega_1 \left[\frac{1+x}{2} - \frac{k^2}{8} \mp \frac{x-1}{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4k^2}{(x-1)^2}}}\right],$$

die Dämpfungen:

$$\alpha_n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \mp \frac{x-1}{2} \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(x-1)^2 + k^2},$$

so daß bei Resonanz sowohl Dämpfungen als auch Frequenzen der Kopplungsschwingungen durch einen gemeinsamen Wert gehen.



einsetzt. Die Vernachlässigungen sind dabei aber größer als die auf Seite 24 angegebenen (Kleinsetzung von k^2 gegen 1 an Stelle von k^3).

Infolgedessen sind die von Wien gefundenen Koppeldämpfungen nur bei sehr loser Kopplung und in nächster Umgebung der Resonanzstelle einigermaßen zuverlässig. Von formelmäßigen Angaben sehe ich daher ab[1]).

Brauchbar erwiesen sich dagegen auch für induktive Kopplung Wiens (bzw. Oberbecks) den Gleichungen (3) entsprechende Frequenznäherungen, die bei völlig vernachlässigter Dämpfung lauten:

$$\omega_1 = \Omega_1 \sqrt{\frac{1 + x^2}{2\sigma}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right]} \qquad (11\,a)$$

$$\omega_2 = \Omega_1 \sqrt{\frac{1 + x^2}{2\sigma}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right]}. \qquad (11\,b)$$

Die Wienschen Ergebnisse haben sich als höchst fruchtbar für Physik und Technik erwiesen. Sie sind wohl die Hauptquellen unserer Kenntnis über die Eigenschaften gekoppelter Schwingungskreise geworden. Indessen ließ sich auf die Dauer nicht übersehen, daß ihr Geltungsbereich ein beschränkter ist (vgl. Seite 24).

3. Weitere Entwicklung der Kopplungstheorie durch Kiebitz, Rogowski und Größer.

a) Kiebitz.

Kiebitz (Lit.-Verz. 12/13)[2]) war der erste, der sie weiter zu bilden versuchte. Seine Arbeit stellt eine strenge Lösung der Grundgleichung dar, die er später durch die Vernachlässigung $l_n^2 \ll 1$, d. h. Annahme schwacher Dämpfung, etwas vereinfachte. Seine vom mathematischen Standpunkt interessanten Ergebnisse gestatten die genaue punktweise Berechnung eines Einzelfalles. Ihr verwickelter Bau macht es aber sehr schwer, einen Überblick über den allgemeinen Verlauf der Frequenzen und Dämpfungen zu gewinnen.

b) Rogowski.

Einen Fortschritt in dieser Richtung brachte die Arbeit von Rogowski (Lit.-Verz. 19). Sie gilt unter der Voraussetzung:

1. induktiver Kopplung der Schwingungskreise,
2. stark vorherrschender Kopplung: $k \gg k_{kr}$,
3. schwacher Dämpfung: $l_n^2 \ll 1$,

vermag also den Schwingungsverlauf für beliebig große Verstimmung und beliebig feste Kopplung zu beschreiben. Diesen Fortschritt erreichte Rogowski durch eine Abänderung des Näherungsverfahrens. Seine Vorgänger führen ihre Vernachlässigungen erst in die strenge Lösung der Gleichung 4. Grades ein. Rogowski bringt dieselben schon in der Differentialgleichung selbst an, bei der er die Dämpfungsglieder in 1. Näherung vernachlässigt, in 2. Näherung als kleine Größen behandelt.

Für die Schwingungszahlen bestätigt Rogowski auch bei linearer Berücksichtigung der Dämpfung den Wienschen Frequenzausdruck (11 a, b) für ungedämpfte Kreise.

Die Dämpfungen der Koppelfrequenzen stellt er dar als Mischung der Einzeldämpfungen:

$$\alpha_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \qquad (12\,a)$$

$$\alpha_2 = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \qquad (12\,b)$$

[1]) Auf diese beschränkte Gültigkeit hat schon Drude (Ann. d. Physik, 13, Seite 535) hingewiesen.

[2]) Literatur-Verzeichnis auf Seite 74.

mit den Dämpfungsgewichten

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1+x^2}}{w}\right], \quad u_2 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma}{1+x^2}}{w}\right] \\
U_1 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1+x^2}}{w}\right], \quad U_2 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma}{1+x^2}}{w}\right] \\
\text{und} \quad w &= +\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}.
\end{aligned}
\right\} \tag{12c}
$$

c) Größer.

Wie oben erwähnt, sind die Rechnungen von Rogowski auf induktive Kopplung zugeschnitten. Die Rogowskische Näherungsmethode wurde nun von Größer (Lit.-Verz. 6) auf kapazitiv gekoppelte Kreise angewandt. Infolge gleicher Voraussetzungen, nämlich:

1. stark vorherrschender Kopplung: $k \gg k_{kr}$,
2. schwacher Dämpfung: $l_n^2 \ll 1$,

haben seine Rechnungen denselben Genauigkeitsgrad und Geltungsbereich wie die Rogowskis. Für die Frequenzen findet er, auch in 2. Näherung, die Ausdrücke

$$
\left.
\begin{aligned}
\omega_1 &= \Omega_1 \sqrt{\frac{1+x^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right)} \\
\omega_2 &= \Omega_1 \sqrt{\frac{1+x^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right)}
\end{aligned}
\right\} \tag{13}
$$

in Übereinstimmung mit Wiens Formeln (3b) und (3a).

Die Koppeldämpfungen setzen sich aus den Einzeldämpfungen zusammen nach der Formel

$$\alpha_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \tag{13a}$$

$$\alpha_2 = \lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2 \tag{13b}$$

mit den Dämpfungsgewichten:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1 - x^2}{w(1+x^2)}\right], \quad u_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1-x^2}{w(1+x^2)}\right] \quad \text{und} \quad w = +\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}. \tag{13c}$$

Um Größers Dämpfungsausdrücke mit den entsprechenden Wienschen Formeln (9) zu vergleichen, müssen wir sie auf eine ähnliche Form bringen. Es ist:

$$\frac{1 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{1 - x}{\sqrt{(1-x)^2 + k^2 - k^2\left[\frac{2(1-x)}{1+x} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]}}.$$

Die Größerschen Formeln lauten nach dieser Umformung:

$$
\begin{aligned}
\alpha_n = \frac{\lambda_1}{2}&\left[1 \pm \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + k^2 - k^2\left[\frac{2(1-x)}{1+x} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]}}\right] + \\
&+ \frac{\lambda_2}{2}\left[1 \mp \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + k^2 - k^2\left[\frac{2(1-x)}{1+x} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]}}\right].
\end{aligned} \tag{13d}
$$

Die Wiensche läßt sich schreiben:

$$\alpha_n = \frac{\lambda_1}{2}\left[1 \pm \frac{1-x}{\sqrt{(1-x^2)+k^2}}\right] + \frac{\lambda_2}{2}\left[1 \mp \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+k^2}}\right]. \tag{9c}$$

Die Ausdrücke sind gleich, bis auf das bei Größer in der Nennerwurzel hinzukommende additive Glied:

$$-k^2\left[\frac{2(1-x)}{1+x} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right],$$

dessen Berücksichtigung wir bei Wien nicht erwarten dürfen, da es bei Resonanznähe und loser Kopplung mit k und $(1-x)$ klein vom 3. und 4. Grade gegen 1 wird

Die Rechnungen von Größer und Rogowski sind unter der Annahme vorherrschender Kopplung abgeleitet. Sie gelten aber mit genügender Genauigkeit bis hinab zu unterkritischen Kopplungen, wenn die Einzelkreise nicht aufeinander abgestimmt sind[1]). (Bedingung $(1-x)^2 \gg k_{kr.}$)

4. Lücken der Kopplungstheorie.

1. Für lose Kopplungen und Resonanznähe ist die Rechnung nach Rogowskis Methode noch nicht durchgeführt. Es ist wünschenswert, daß dies für induktive Kopplung nachgeholt wird. Für kapazitive Kopplung reichen hier die Wienschen Näherungen aus.

2. Nicht durch Näherungsformeln vereinfacht ist bisher das Gebiet stark gedämpfter Kreise. Dieser Mangel ist für den Röhrensender nicht von Belang, da praktisch alle in der drahtlosen Telegraphie verwandten Schwingungskreise schwach gedämpft sind.

b) Theorie der Elektronenröhren.

1. Annahme geradliniger Charakteristik.

Ebenso maßgebend, wie die Wiensche Arbeit für die Schwingungstheorie, ist ein Aufsatz von Vallauri (Lit-Verz. 25) für die Bestimmung des Röhreneinflusses.

Vallauri untersuchte die Abhängigkeit des Anodenstromes von Gitter- und Anodenspannung und fand, daß sie sich zwischen den Grenzen der Sättigung und Verriegelung annähern läßt durch die lineare Formel:

$$i_{a_w} = S \cdot e_{g_w} + \frac{1}{R_i} \cdot e_{a_w} \equiv S\left[e_{g_w} + D\, e_{a_w}\right]. \tag{14}$$

Hierin sind S, R_i und D annähernd konstante Größen, und zwar bedeutet

$$S = \frac{\partial i_a}{\partial e_g} \ (e_a = \text{const}) \text{ die Steilheit der Röhre,}$$

$$R_i = \frac{\partial e_a}{\partial i_a} \ (e_g = \text{const}) \text{ den inneren Widerstand der Röhre,}$$

$$D = -\frac{\partial e_g}{\partial e_a} \ (i_a = \text{const}) \text{ den Durchgriff der Röhre.}$$

Stellt man unter Zugrundelegung dieses Ansatzes bei einer Schaltung etwa nach Bild 3 die Differentialgleichung für den Wechselstromanteil i des Stromes im Schwingungskreis auf, so erhält man $\left(\text{bei Vernachlässigung von } \frac{R}{R_i} \text{ gegen } 1\right)$ die aus der Schwingungslehre bekannte Formel:

---

[1]) Vgl. Rogowski, Zeitschrift f. techn. Physik, III, 1922, S. 136.

$$i'' + 2\,i' \cdot \lambda_r + i \cdot \Omega^2 = 0 \tag{15}$$

mit

$$\lambda_r = \frac{R - \frac{S}{C}(M_g - D\,L)}{2\,L}$$

$$\Omega^2 \approx \frac{1}{C\,L}.$$

Zur Auswertung dieser „Hauptgleichung" hat man mehrere verschiedene Wege.

1. Verfahren.

Man faßt die Steilheit S als eine durch die Röhreneigenschaften gegebene konstante Größe auf.

Dann bedeutet auch

$$\lambda_r = \frac{R - \frac{S}{C}(M_g - D\,L)}{2\,L}$$

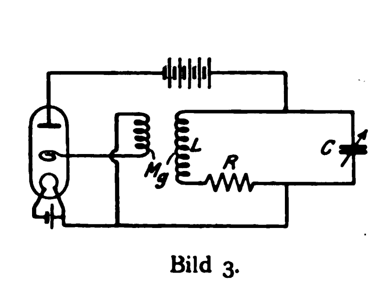


Bild 3.

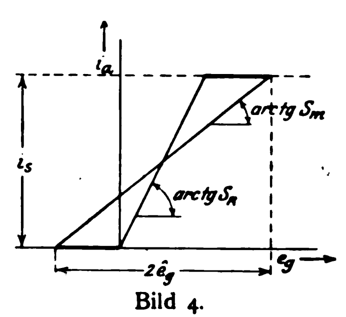


Bild 4.

für jeden gegebenen Schwingungskreis eine konstante Dämpfung. Damit ist das Senderproblem auf eine gewöhnliche Schwingungsgleichung zurückgeführt. Bei positivem λ_r ist die Schwingung gedämpft und klingt ab. Bei negativem λ_r muß sich eine einmal angestoßene Schwingung zu wachsenden Amplituden aufschaukeln; der Sender befindet sich also im Gebiet der Selbsterregung. Die Grenze der schwingungsfähigen Zone, der „Anschwingpunkt", liegt offenbar bei

$$\lambda_r = 0$$

oder

$$R = \frac{S}{C}(M_g - D\,L) \tag{16a}$$

$$S_{\text{Röhre}} = \frac{R\,C}{M_g - D\,L}. \tag{16b}$$

Dies ist der Weg, den Vallauri beschritten hat. Eine andere Methode zur Lösung der Gleichung (15) hat Harms angegeben.

2. Verfahren.

Nach Harms (Lit.-Verz. 8) soll der angestoßene Sender selbsttätig einen Gleichgewichtszustand erreichen. Er faßt die Steilheit S als eine veränderliche Größe auf, die sich stets so einzustellen sucht, daß $\lambda_r = 0$ wird. Es muß demnach bei jeder Schwingung gelten:

$$S_{\text{mittel}} = \frac{R\,C}{M_g - D\,L}. \tag{17}$$

Schwingungen finden aber nur statt, solange die errechnete mittlere Steilheit nicht den Höchstbetrag überschreitet, den die Röhre nach ihrer Bauart liefern kann, so lange also

$$S_{mittel} \leq S_{Röhre}. \tag{18}$$

Die Schwingungsgrenze, der „Aussetzpunkt", liegt bei $\lambda_r = 0$, d. h., wie nach dem 1. Verfahren bei

$$S_{Röhre} = \frac{RC}{M_g - DL}. \tag{16b}$$

In diesem Zusammenhange sei auf eine von Harms stammende näherungsweise Berechnung des Schwingungsstromes $\hat{i}$ hingewiesen. Harms denkt sich die Charakteristik durch einen geknickten Linienzug nach Bild 4 angenähert.

Unter dieser Voraussetzung springt die Amplitude beim Einsetzwert $S_m = \frac{S_R}{2} = \frac{RC}{M_g - DL}$ von 0 bis zur Verriegelung hoch. Man liest aus Bild 4 ab, daß bei jeder Schwingung:

$$S_m = \frac{i_s}{2\,\hat{e}_g}. \tag{19}$$

Es besteht also die Beziehung[1])

$$\frac{i_s}{2\,\hat{e}_g} = \frac{RC}{M_g - DL},$$

oder

$$\hat{e}_g = \frac{i_s(M_g - DL)}{2RC}. \tag{20}$$

Da sich anderseits aus Bild 3 ergibt

$$\hat{e}_g = \hat{i} \cdot M_g \cdot \Omega, \tag{21}$$

so folgt

$$\frac{i_s \cdot (M_g - DL)}{2RC} = \hat{i}\, M_g \Omega, \qquad \hat{i} = i_s \frac{M_g - DL}{2 M_g RC\Omega}$$

und wegen $\Omega^2 \approx \frac{1}{CL}$ und $\lambda = \frac{R}{2L}$

$$\hat{i} = \frac{i_s}{4} \cdot \frac{\Omega}{\lambda} \cdot \frac{M_g - DL}{M_g} \tag{22a}$$

oder bei kleinem Durchgriff

$$\hat{i} \approx \frac{i_s}{4} \cdot \frac{\Omega}{\lambda}. \tag{22b}$$

In der nachfolgenden Arbeit wird gezeigt werden, daß der wirkliche Wert bis zu 28% höher liegen kann (S. 46).

3. Verfahren.

Die im Schwingungskreis teils durch Erzeugung Joulescher Wärme, teils durch Strahlung verzehrte Wechselstromleistung wird in der Röhre aus dem Energievorrat der Anodenbatterie gewonnen. Bezeichnet

i_a den Augenblickswert der Wechselstromkomponente des Anodenstroms,
e_a „ „ „ „ der Anodenspannung,
T die Schwingungszeit $\frac{2\pi}{\Omega}$, so muß sowohl bei Vallauri als auch bei Harms die mittlere Wechselstromleistung der Röhre $\frac{\int_0^T i_a \cdot e_a \cdot dt}{T}$ mit dem äußeren mittleren Wechselstromverlust $\frac{\int_0^T \left(\frac{i_a}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2 R\, dt}{T}$ übereinstimmen.

---

[1]) Register der Zeichen auf den Seiten 73 und 74.

Diese Beziehung, die bei Harms und Vallauri als Folgerung erscheint, setzt Hazeltine (Lit.-Verz. 10) unter dem Namen „Verlustmethode" in den Vordergrund.

Hazeltine führt noch eine weitere Vernachlässigung ein, indem er außer $\frac{R}{R_i} = 0$ noch den Durchgriff $D = 0$ setzt.

Formelmäßig finden wir daher bei ihm

1. Röhrenleistung:

$$\mathbf{N} = \frac{\int_0^T e_a i_a dt}{T} = \frac{S_m}{T}\int_0^T e_a e_g dt = S_m \bar{e}_g \bar{e}_a \approx \mathbf{S_m} \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{M_g}} \cdot \bar{e}_g^2. \tag{23}$$

2. Verluste:

$$\mathbf{W} = \frac{\int_0^T \left(\frac{i_a}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2 R\,dt}{T} = \frac{1}{T}\frac{L}{CR}\int_0^T i_a^2 dt = \frac{L}{CR}\bar{i}_a^2 \approx \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{CR}} S_m^2 \bar{e}_g^2. \tag{24}$$

Aus $N = W$ gewinnt er

$$S_m \frac{L}{M_g} \cdot \bar{e}_g^2 = S_m^2 \cdot \frac{L}{CR} \bar{e}_g^2$$

oder

$$S_m = \frac{CR}{M_g}. \tag{25a}$$

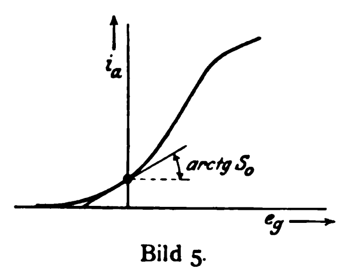


Bild 5.

Da auch Hazeltine die Bedingung stellt, daß S_m die wahre Röhrensteilheit nicht überschreiten dürfe, so führt sein Ansatz für die Schwingungsgrenze zum Ausdruck:

$$S_R = \frac{CR}{M_g}, \tag{25b}$$

der bis auf das vernachlässigte Glied mit D der Vallauri-Harmsschen Formel (16b) gleicht.

Fragt man nach der Genauigkeit und dem Geltungsbereich der besprochenen Ansätze von Vallauri, Harms und Hazeltine, so sind folgende Näherungen in Betracht zu ziehen:

1. die stets vorkommende Voraussetzung schwacher Dämpfung:

$$\frac{R}{2L} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{S}{2CL}(M_g - DL) \ll 1,$$

2. die Vernachlässigung von $\frac{R}{R_i}$ gegen 1,

3. bei Hazeltine die Vernachlässigung des Durchgriffes: $\frac{D \cdot L}{M_g} \ll 1$,

4. die Annahme geradliniger Charakteristik.

Annahme 1 und 2 treffen praktisch stets mit genügender Schärfe zu, 3 bewirkt eine zahlenmäßige Ungenauigkeit der Hazeltineschen Werte, die aber bei guten Röhren mit kleinem Durchgriff meist nur wenige Prozente beträgt.

Bedingung 4 hat keinen Einfluß auf die Lage der Einsatzpunkte, wenn für $S_{\text{Röhren}}$ der „0-Wert" S_0 eingesetzt wird, den die Steilheit bei der Nullspannung des Gitters annimmt (Bild 5).

Denn bei den verschwindend kleinen Amplituden im Augenblick des Anschwingens kann das sehr kurze in Betracht kommende Stück der Charakteristik mit genügender Näherung als geradlinig angesehen werden.

2. Berücksichtigung der Kennlinienkrümmung.

Legt man Wert auf genaue Kenntnis der Stromstärken, so muß man den einfachen Vallaurischen Ansatz aufgeben und die Krümmung der Charakteristik berücksichtigen. Dies tun Möller (Lit.-Verz. 14) sowie Appleton und van der Pol (Lit.-Verz. 1).

1. Möller.

Möller stimmt mit Harms insoweit überein, als er selbständiges Erreichen einer nach Frequenz und Amplitude stabilen Schwingung fordert. Die Senderfrequenz findet er bis auf Glieder der Größenordnung l^2 gleich der Eigenfrequenz Ω des Kreises.

Den Schwingungsstrom findet Möller aus der „Schwingkennlinie" $\hat{i}_a = f(\hat{e}_g)$, die eine „Amplitudencharakteristik" darstellt.

Zur Konstruktion der Schwingkennlinie aus dem experimentell aufgenommenen Kennlinienfeld $i_a = f(e_g, e_a)$ dient folgendes Verfahren:

1. Man wählt ein Wertepaar $\hat{e}_g$ und $\hat{e}_a$. Dann kennt man auch die Augenblickswerte

$$e_{g_t} = e_{g_0} + \hat{e}_g \sin \Omega t$$
$$e_{a_t} = e_{a_0} + \hat{e}_a \sin \Omega t.$$

2. Man greift zu den zusammengehörigen Werten von e_{g_t} und e_{a_t} die i_{at}-Werte aus dem Kennlinienfeld ab.

3. Man findet

$$\hat{i}_a = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i_{a_t} \sin \omega t \, dt \tag{26}$$

durch Planimetrieren der Kurve $\frac{\Omega}{\pi} i_{a_t} \sin \omega t$.

4. Man berechnet den mit den gefundenen Werten verträglichen Scheinwiderstand $\mathfrak{R} = \frac{L}{C R}$ des Schwingungskreises aus $\mathfrak{R}_a = \frac{\hat{e}_a}{\hat{i}_a}$.

5. Man verbindet zusammengehörige Werte mit gleichem $\mathfrak{R}_a$ zu der Schwingkennlinienschar $\hat{i}_a = \varphi(\hat{e}_g, \mathfrak{R}_a)$ mit $\hat{i}_a$ und $\hat{e}_g$ als Koordinaten und $\mathfrak{R}_a$ als Parameter.

Möller selbst hat erkannt, daß die beschriebene Konstruktion sehr langwierig und mühevoll ist. In der 2. Auflage seines Buches (Elektronenröhren) gibt er daher ein Verfahren zur experimentellen Aufnahme der Schwingkennlinie:

Man mißt zunächst L, C, R des Schwingungskreises, verändert dann beim schwingenden Sender die Rückkopplung und mißt zusammengehörige Werte von $\bar{i}$ und M_g. Man findet dann ohne weiteres den Anodenstrom aus der Gleichung:

$$\bar{i}_a = \bar{i} \frac{2\lambda}{\Omega} = \bar{i} \sqrt{\frac{C}{L}} . R \tag{27}$$

und die zugehörige Gitterspannung aus

$$\bar{e}_g = \bar{i} . M_g \Omega = \bar{i} \frac{M_g}{\sqrt{L C}}. \tag{28}$$

Hat man durch eins dieser Verfahren die Schwingkennlinie $\hat{i}_a = f(\hat{e}_g)$ bestimmt, so zeichne man in sie die „Rückkopplungsgerade" ein. Diese stellt die 2. Beziehung dar, in der durch die Rückkopplung $\bar{e}_g$ und $\bar{i}_a$ stehen.

Es ist nämlich

$$\hat{i}_a = \frac{\hat{e}_a}{\mathfrak{R}_a} = \frac{\hat{e}_g}{\mathfrak{R}_a} \cdot \frac{L}{M_g} = \hat{e}_g \cdot \frac{C R}{M_g} \tag{29}$$

die Gleichung der Rückkopplungsgeraden.

Die gesuchte Amplitude des Anodenstromes ergibt sich als Ordinate des Schnittpunktes der Schwingkennlinie $\hat{i}_a = \varphi(\hat{e}_g)$ mit der steileren Geraden $\hat{i}_a = \frac{C\,R}{M_g} \cdot \hat{e}_g$ (siehe Bild 6). Die Frequenz, bei der die Schwingungen aussetzen, läßt sich aus der Steilheit α_{max} der Tangente bestimmen, die man vom Koordinaten-Ursprung an die Schwingkennlinie legt.

2. Appleton und van der Pol.

Die von Möller auf zeichnerischem Wege erreichte Auswertung des Einflusses, den die Kennlinienkrümmung auf die Amplituden hat, erstrebten Appleton und van der Pol (Lit.-Verz. 1) durch ein analytisches Verfahren.

Sie leiten zunächst aus der Kennlinienschar $i_a = f(e_a, e_g)$ eine auf e_a allein reduzierte Kennlinie $i_a = \varphi(e_a)$ ab, wobei sie wie Möller die bei schwach gedämpften Kreisen gültige Beziehung $e_g \approx e_a \frac{M_g}{L}$ benutzen.

Die Kennfunktion wird nun nach MacLaurin in eine Potenzreihe verwandelt:

$$\varphi(e_a) = \varphi(0) + e_a \varphi'(0) + \frac{e_a^2}{2!} \varphi''(0) + \ldots \frac{e_a^n}{n!} \varphi^n(0). \tag{30}$$

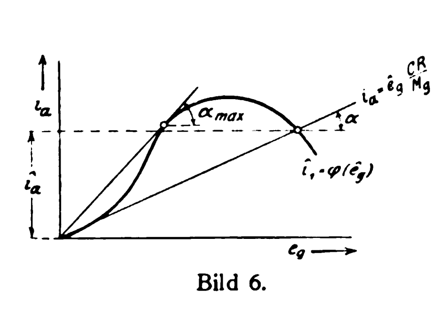


Bild 6.

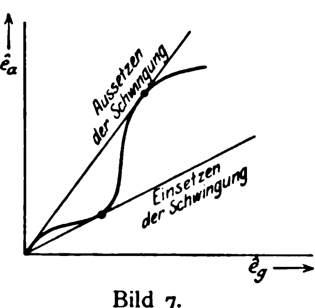


Bild 7.

Da die Verfasser stets das 3., oft auch das 5. und 7. Glied dieser Reihe berücksichtigen, erfordert das Verfahren als Vorarbeit eine bis zu 7fache graphische Differentiation, steht also dem Möllerschen an Mühseligkeit nicht nach.

Die Verfasser zeigen, daß die geraden Potenzen der Reihe in erster Näherung die Endamplitude nicht beeinflussen, daß diese vielmehr eine Funktion der sämtlichen in der Charakteristik enthaltenen ungeraden Potenzen von e_a ist. Sie legen das Hauptgewicht ihrer Abhandlung auf die Möglichkeit einer „Hysteresis", d. h. einer verschiedenen Lage des „Einsatzpunktes" der Schwingungen vom „Aussetzpunkt".

Vergleicht man ihre Ergebnisse mit den Möllerschen, so umschreibt der Begriff der Hysteresis nur die Tatsache, daß man an eine etwa nach Bild 7 gekrümmte Charakteristik 2 verschiedene Tangenten durch den Nullpunkt legen kann.

Vergleichen wir rückblickend die verschiedenen Behandlungsweisen miteinander!

Besteht die Aufgabe darin, den wesentlichen Zügen nach das Verhalten eines Schwingungskreises bei verschiedenen Röhren und Rückkopplungsgrößen zu überblicken, so kommt nur Vallauris linearer Ansatz in Frage. Die Vallaurische und die Harms-Hazeltinesche Lösung sind dann gleichwertig.

Ist im Einzelfall eine genaue Nachrechnung notwendig, so wird man sich zum Möllerschen Verfahren trotz dessen Kompliziertheit und Undurchsichtigkeit entschließen müssen.

Beide Methoden ergänzen sich damit und haben ihr besonderes Anwendungsgebiet. Das Möllersche Verfahren würde erheblich gewinnen, wenn es gelänge,

die Schwingkennlinien aus der „statischen Charakteristik" wenigstens angenähert auf einfache Weise abzuleiten.

II. Abschnitt. Theorie des Zwischenkreisröhrensenders.

Dieselben 2 Arten physikalischer Auffassung, die beim einfachen Sender unterschieden werden, beherrschen auch die Theorien des Zwischenkreisröhrensenders, nämlich:

1. die Annahme konstanter Steilheit bei variabler Koppeldämpfung,
2. die Annahme variabler Steilheit bei konstanter Dämpfung Null (ungedämpfter Schwingung). Diese zwei Ansätze werden nun in die Gleichungen eines schwingungsfähigen Systems mit 2 Freiheitsgraden — denn als solches stellt sich der Zwischenkreissender dar — eingefügt.

Es handle sich um einen induktiv gekoppelten Sender nach Bild 8.

Für ihn gelten die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} & i_1'' + \frac{1}{L_1}\left[R_1 - \frac{S}{C_1}(M_g - D L_1)\right]\cdot i_1' + \frac{1}{C_1 L_1} i_1 + \frac{M_{12}}{L_1} i_2'' = 0 \\ & i_2'' + \frac{R_2}{L_2}\cdot i_2' + \frac{1}{C_2 L_2} i_2 + \frac{M_{12}}{L_2} i_1'' = 0 \end{aligned}\right. \qquad (31)$$

Führt man ähnlich wie beim einfachen Sender folgende Abkürzungen ein

$$\frac{1}{L_1}\left[R_1 - \frac{S}{C_1}(M_g - D L_1)\right] = \frac{r_1}{L_1} = 2\lambda_1, \qquad (32)$$

so erkennt man ohne weiteres die völlige formale Übereinstimmung mit den Gleichungen der Koppeltheorie. Der Ansatz $i_n = A_n \cdot \varepsilon^{\vartheta t}$ führt auf bekannte Art zu der algebraischen Grundgleichung:

$$\vartheta^4 + a\vartheta^3 + b\vartheta^2 + c\vartheta + d = 0 \qquad (33)$$

mit

$$a = \frac{2}{\sigma}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$b = \frac{1}{\sigma}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + 4\lambda_1\lambda_2)$$

$$c = \frac{2}{\sigma}(\lambda_1\Omega_2^2 + \lambda_2\Omega_1^2)$$

$$d = \frac{1}{\sigma}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2).$$

Bild 8.

Zur Auswertung dieser Grundgleichung dienen dieselben Methoden, die beim einfachen Röhrensender angewandt werden.

1. Verfahren: Variable Steilheit, ungedämpfte Schwingung.

Von denjenigen Autoren, die den selbsttätig hergestellten Gleichgewichtszustand des Senders voraussetzen, also das Problem als eine Wechselstromaufgabe behandeln, ist wohl zeitlich der erste der Amerikaner Hazeltine (Lit.-Verz. 10).

1. Hazeltine.

Hazeltine löst die Kopplungsaufgabe durch komplexe Rechnung, d. h. er setzt $i_n = A_n \varepsilon^{j\omega t}$. Die Grundgleichung erhält so die neue Form:

$$\omega^4 - \omega^2 \cdot \frac{1}{\sigma}\left[\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + 4\lambda_1\lambda_2\right] + \frac{1}{\sigma}\Omega_1^2\Omega_2^2 + \frac{2j\omega}{\sigma}\left[-(\lambda_1+\lambda_2)\omega^2 + \lambda_1\Omega_2^2 + \lambda_2\Omega_1^2\right] = 0. \qquad (34)$$

Könnten wir nun über die Steilheit S beliebig verfügen, so würden wir nach (32) beliebige negative Werte der resultierenden primären Dämpfung λ_1 erzielen und damit die Dämpfung einer Koppelschwingung auf Null reduzieren können, so

daß der Ansatz $i_n = A_n \varepsilon^{j\omega t}$ berechtigt bliebe. Hazeltine erkannte richtig, daß dieser Wert von λ_1, der mit seinem Ansatz verträglich ist, aus der Gleichung (34) hervorgeht, wenn man reellen und imaginären Teil trennt. Eliminiert man aus beiden Teilgleichungen λ_1, so erhält man einen Ausdruck 3. Grades für das Quadrat der Schwingungszahl ω des Senders.

Da die Diskussion dieser kubischen Gleichung für ω^2 schwierig ist, beschränkt Hazeltine seine Untersuchung auf den Resonanzfall

$$\Omega_1 = \Omega_2 \equiv \Omega.$$

Für diesen unterscheidet er

1. Vorherrschende Dämpfung:

$$k < k_{kr} \quad \text{mit} \quad k_{kr} = \frac{2\lambda_2}{\Omega}, \tag{35}$$

bei der nur eine Koppelfrequenz möglich ist, und

2. Vorherrschende Kopplung:

$$k > k_{kr},$$

bei der zwei gleichberechtigte Schwingungen bestehen.

Es wurde vorhin gesagt, daß bei beliebiger Verfügung über die Steilheit S der Sender immer zum Ansprechen gebracht werden kann. In Wirklichkeit kann aber die Steilheit den maximalen Wert $S = S_{Röhre}$ nicht überschreiten. Infolgedessen muß bei denjenigen Werten von λ_1, die zu höheren Steilheiten als $S_{Röhre}$ gehören, die Schwingung abreißen. Hazeltine führt diese Bedingung richtig in seine Formeln ein.

Wegen der großen Einengung ihres Anwendungsgebietes durch die Voraussetzung abgestimmter Kreise können seine Ableitungen indessen nur als eine wenn auch sehr beachtenswerte Vorarbeit gelten.

Wesentliche Förderung gewann das Problem durch eine Arbeit von Harms (Lit.-Verz. 8), der als erster in Deutschland eine Theorie des Ziehens gab.

2. Harms.

Harms denkt sich die gekoppelten Kreise ersetzt durch einen einzigen, dessen Eigenschwingung mit der Koppelschwingung und dessen Eigendämpfung mit der Koppeldämpfung übereinstimmt.

Der Widerstand dieses Kreises ergibt sich unter Benutzung der Abkürzung (32) zu:

$$R = r_1 - \omega^2 M_{12}^2 \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}. \tag{36}$$

Für die Koppelfrequenzen sind die Näherungswerte (11) einzusetzen. Den Ersatzkreis behandelt Harms nun nach seinem für den einfachen Röhrensender auf S. 29–30 beschriebenen Verfahren. Da der Sender ungedämpft schwingen soll, gibt

$$R = 0 \tag{37}$$

die gesuchte Gleichgewichtsbedingung. Aus ihr folgt

$$S_m = \frac{C_1}{M_g - D L_1} \cdot \left[r_1 - \omega^2 M_{12}^2 \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2} \right]. \tag{38}$$

Schwingungsfähigkeit besteht nur unter der auf S. 29—30 abgeleiteten Bedingung:

$$S_m \leqq S_R. \tag{18}$$

Die Formel (38) ist an sich schon sehr unübersichtlich. Wollte man sie noch durch Einsetzen des Frequenzausdruckes (11) vervollständigen, so würde sie infolge ihres verwickelten Baues völlig undurchsichtig.

Harms beschränkt sich daher in der Diskussion auf die zahlenmäßige Durchführung eines Beispiels. An diesem zeigt er, daß die Bedingung (18) in Verbindung mit (38) die Zieherscheinungen vollständig beschreibt. Nur eine qualitative Lücke ist in seinen Darlegungen: Harms glaubt, daß stets eine „Ziehschleife" auftritt, sobald die Röhrensteilheit und Rückkopplungsgröße überhaupt Schwingungen entstehen lassen.

In Wirklichkeit schrumpft, wie Rogowski (Lit.-Verz. 20, 23) gezeigt hat, die Schleife bei loser werdender Kopplung der Kreise zu einem einfachen Frequenzsprung am Resonanzpunkt zusammen; bei noch loserer Kopplung tritt an ihre Stelle eine „Schwingungslücke" in der Umgebung des Resonanzgebietes, in der der Sender überhaupt nicht anspricht[1]).

Harms rechnet, wie erwähnt, mit der Frequenznäherung (11), die für vorherrschende Kopplung zugeschnitten ist. Seine Behandlung des Röhrensenders kann daher auch nur für vorherrschende Kopplung gelten.

3. Heegner (Lit.-Verz. 11)

vermeidet diese Vernachlässigung. Da auch er den „eingeschwungenen" Zustand ungedämpfter Koppelschwingungen betrachtet, hat er zwei Unbekannte zu ermitteln: die Frequenz ω und die resultierende Steilheit S_m. Allerdings fragt er nicht nach S_m direkt, sondern nach dem mit ihr durch die Beziehung

$$r_1 = R_1 - \frac{S_m}{C_1}(M_g - D L_1). \tag{32}$$

verbundenen resultierenden Widerstand r_1 des Primärkreises. Heegner nennt $(-r_1)$ den vom Sekundärkreis im Primärkreis „induzierten Widerstand". Diese Bezeichnung rechtfertigt sich aus der Energiebetrachtung, daß die im Primärkreis erzeugte Leistung: $-r_1 \cdot \bar{i}_1^2$ die Verluste des Sekundärkreises: $+ R_2 \bar{i}_2^2$ decken muß.

Heegner geht von der Anschauung aus, daß nur eine Koppelschwingung, etwa ω_1, ungedämpft ist, die Frequenzgleichung also die folgende Form haben muß:

$$(\vartheta - j\omega_1)(\vartheta + j\omega_1)(\vartheta + \alpha_2 - j\omega_2)(\vartheta + \alpha_2 + j\omega_2) = 0. \tag{39a}$$

Durch Vergleich dieser Grundgleichungsform mit den Koeffizienten a, b, c, d der Gleichung

$$\vartheta^4 + a\vartheta^3 + b\vartheta^2 + c\vartheta + d = 0 \tag{33}$$

gewinnt er

1. in Übereinstimmung mit Hazeltine die in ω^2 kubische Frequenzgleichung:

$$\omega^4 - \frac{\omega^2}{\sigma}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + 4\lambda_2^2 \frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{\Omega_2^2 - \omega^2}\right) + \frac{1}{\sigma}\Omega_1^2\Omega_2^2 = 0, \tag{39b}$$

2. für r_1 die Beziehung

$$-r_1 = R_2 \frac{L_1}{L_2}\frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{\Omega_2^2 - \omega^2}, \tag{40}$$

die bei Elimination von ω ebenfalls zu einer Gleichung 3. Grades für r_1 bzw. λ_1 führt,

3. für die Koppeldämpfung der 2. Koppelschwingung den Ausdruck

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sigma} = \frac{r_1 L_2 + R_2 L_1}{L_1 L_2 \cdot \sigma}. \tag{41}$$

Ein negatives α_2 erhalten wir, sobald

$$(-r_1) > R_2 \frac{L_1}{L_2} \quad \text{oder} \quad (-r_1) > r_{1\,\text{kritisch}} \tag{42}$$

[1]) Ungefähr gleichzeitig mit der Harmsschen Arbeit erschien eine kurze Veröffentlichung von Burstyn (Lit.-Verz. 2). Der Verfasser wendet die „Ersatzschaltung" der Transformatorentheorie auf die Schwingungskreise des Röhrensenders an. Er findet durch komplexe Rechnung die Koppelfrequenzen (11) als Frequenzen der „Stromresonanz", d. h. größten Wechselstromwiderstandes im „Ersatzkreis".



wird. Es bedeutet physikalisch, daß die 2. Koppelschwingung die Möglichkeit des Ansprechens hat, daß wir uns also nach Heegner im „labilen" oder nach der üblichen Ausdrucksweise im „gezogenen" Schwingungsbereich befinden. Unter welchen Bedingungen tritt nun dieses Ziehen ein?

Durch Analyse der r_1-Kurve findet Heegner, daß der kritische Widerstand dann und nur dann überschritten wird, wenn die Kopplung k den kritischen Wert

$$k_{kr} = \frac{2\lambda_2}{\Omega_1} \tag{42}$$

übersteigt, wenn wir also vorherrschende Kopplung haben. Verständlich wird dies durch Betrachtung der Gleichung (39b) für ω^2. Bei überkritischen Kopplungen wird nämlich die Diskriminante der Gleichung (39) negativ, die $\omega_1{}^2 - x$-Kurve (Bild 9) bekommt in Resonanznähe einen rückläufigen Teil, die Gleichung (39) in diesem Kurvenstück drei reelle Lösungen (1, 2, 3).

Heegner unterläßt es, dem „induzierten Widerstand" $-r_1$ in Gleichung (40) die Grenzbedingungen aufzuerlegen, daß S_m die wirkliche Röhrensteilheit nicht überschreiten darf. Infolgedessen gibt es in seinen Kurven kein schwingungsunfähiges Gebiet, keine Einsetz- und Aussetzpunkte. Denn wenn man über die Steilheit der Röhre (oder mittelbar über die zugeführte Energie) frei verfügen darf, kann man jedes beliebige System schwingungsfähiger Kreise in jeder Einstellung zum Ansprechen bringen.

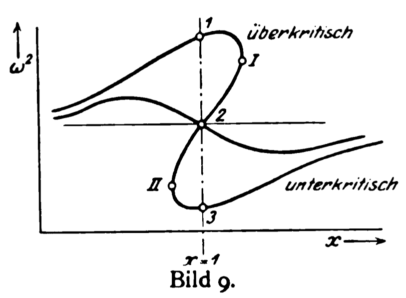


Bild 9.

Wir können daher sagen, Heegner diskutiert den Röhrensender unter Benutzung einer idealen Röhre, die auch unendliche Steilheit zuläßt. Bei wirklichen Röhren kommt nur ein Ausschnitt der von ihm gefundenen Frequenzen zur Geltung.

Gewiß ist dies eine Lücke seiner Diskussion. Auch soll nicht verkannt werden, daß die rein kurvenanalytische Fassung seiner Ergebnisse manchen Praktikern undurchsichtig erschien. Dennoch hat Heegners Arbeit eine starke Wirkung ausgeübt. Eine Reihe nach ihr erschienener Abhandlungen macht sich sein Prinzip zu eigen, Frequenz und primäre Dämpfung als gleichberechtigte Unbekannte zu berechnen.

4. Möller. (Lit.-Verz. 14, 15).

Dieser Verfasser wendet nicht — was an sich durchaus möglich wäre — sein Prinzip der Schwingkennlinie auf den Zwischenkreissender an, sondern übernimmt die Vallaurische Näherungsannahme geradliniger Charakteristik nach Gleichung (14):

$$i_a = S\, e_g + \frac{1}{R_i} \cdot e_a = S\,(e_g + D\, e_a).$$

Der Senderschwingung legt er nun die Bedingung der „Amplituden- und Phasenbilanz" auf.

> „Der Anodenstrom muß über den Schwingungskreis, die Rückkopplung und die Röhre einen Anodenstrom hervorrufen, der dem ursprünglichen in Phase und Amplitude gleicht".

Diese Forderung führt ihn wie die übrigen Forscher zu der Grundgleichung 4. Grades (33), die er wie Hazeltine durch den Ansatz $i = A \cdot \varepsilon^{j\omega t}$ in einen reellen und imaginären Teil spaltet gemäß Gleichung (34). Nullsetzen des imaginären Teiles liefert ihm die mit der Heegnerschen Gleichung (40) identische Beziehung

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \frac{\Omega_1{}^2 - \omega^2}{\Omega_2{}^2 - \omega^2}, \tag{40 a}$$

die, in den reellen Teil eingesetzt, Heegners kubische Frequenzgleichung (39b) ergibt.



Da die Cardanische Lösung kubischer Gleichungen für quantitative Auswertung sehr unbequem ist, gibt Möller im Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie (Lit.-Verz. 16) eine zeichnerische Bestimmungsweise der Koppelfrequenzen aus einem dem Heegnerschen verwandten kubischen Ausdruck an. Die Durchführbarkeit dieses graphischen Verfahrens ist erkauft durch 3 Voraussetzungen, die seinen Geltungsbereich stark vermindern:

1. Resonanznähe: $(x - 1)^2 \ll 1$
2. sehr lose Kopplung: $k \ll 1$
3. sehr schwache Dämpfung: $l_n^2 = \left(\frac{\lambda_n}{\Omega_n}\right)^2 \ll 1$.

Die kritische Kopplung findet Möller ähnlich wie Heegner und Hazeltine zu

$$k_{kr} = \frac{2\,\lambda_2}{\omega}\text{[1]}. \tag{42a}$$

Da auch Möller der primären Dämpfung bzw. Röhrensteilheit keine Höchstgrenze setzt, decken sich seine Ergebnisse und die Vollständigkeit ihrer Diskussion durchaus mit den Heegnerschen.

5. Pauli.

In nah verwandtschaftlichem Verhältnis zur Heegnerschen Arbeit steht auch die Dissertation von Pauli (Lit.-Verz. 17), soweit sie für die Theorie des Zwischenkreissenders in Betracht kommt.

Paulis Ansatz scheint von dem Vallaurischen etwas abzuweichen, da er unbekümmert um die Wirkungsweise der Rückkopplung den Röhreneinfluß durch eine mit dem Anodenstrom phasengleiche Zusatzspannung berücksichtigt. Doch dieser Unterschied ist nur ein formeller, da Pauli die Zusatzspannung zusammen mit der Primärdämpfung aus der Rechnung eliminiert. So bekommt er den Ausdruck (42) für die kritische Kopplung, die Gleichung (39) für die Frequenz; für deren Diskussion er ausdrücklich auf Heegners Arbeit verweist. Schließlich bemerkt er noch, daß Heegners Kurve des „induzierten Widerstandes" r_1 mit der Kurve des quadratischen reduzierten Amplitudenverhältnisses

$$Y^2 = \frac{i_2^2}{i_1^2} \cdot \frac{L_2}{L_1} \tag{43}$$

übereinstimmt. Dies läßt sich leicht bestätigen.

Erinnern wir uns, daß nach dem Energieprinzip gilt:

$$- r_1\, i_1^2 = R_2\, i_2^2, \tag{44}$$

so haben wir die Beziehung:

$$- r_1 = R_2 \frac{i_2^2}{i_1^2} = 2\,\lambda_2\, L_1\, Y^2. \tag{45}$$

Variieren wir also das Frequenzverhältnis $x = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ bei gleichbleibendem L_1, etwa durch Veränderung der Sekundärkapazität C_2, so ist der Verlauf von r_1 direkt proportional dem von Y^2.

6. Harms II.

Etwa gleichzeitig mit der Paulischen Schrift erschien eine 2. Veröffentlichung von Harms (Lit.-Verz. 9), in der er sich in bezug auf die Frequenzberechnung auf denselben Boden stellt wie Heegner, Möller und Pauli. Er findet also ω^2 als Wurzel der kubischen Gleichung (39b).

[1]) Es sei auf die nahe Verwandtschaft dieses Wertes mit dem Wienschen Ausdruck (4): $k_{kr} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\omega}$ hingewiesen. Bedenken wir, daß der Ausdruck (40a) $\lambda_1 = - \lambda_2 \frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{\Omega_2^2 - \omega^2}$ für $\Omega_1 = \Omega_2$ übergeht in $\lambda_1 = - \lambda_2$, so sehen wir, daß in Resonanznähe, also dem Geltungsbereich der Wienschen Formeln, die Ausdrücke (4) und (42) gleichbedeutend sind. Damit ist auch hier der Anschluß der Sendertheorie an die klassische Wiensche Abhandlung hergestellt.

Der Hauptvorzug der Harmschen Arbeit ist der, daß er wie in seinem ersten Aufsatz die mit der resultierenden primären Dämpfung durch (32) verbundene mittlere Röhrensteilheit der Grenzbedingung (18): $S_m \leqq S_R$ unterwirft. Damit hat er die Grundlage zur Abgrenzung des schwingungsfähigen Gebietes, der Ziehschleife, kurz aller einschlägigen Erscheinungen. Indessen wird die Grenzvorschrift nicht formelmäßig verwertet und es bleibt dem Leser überlassen, den Einzelfall einer Nachprüfung nach dieser Forderung zu unterziehen.

7. van der Pol (Berücksichtigung der Krümmung der Charakteristik).

Während Möller, wie oben erwähnt, beim Zwischenkreissender darauf verzichtet, den nicht linearen Verlauf der Kennfunktion $i_a = f(e_a, e_g)$ in die Rechnung einzubeziehen, überträgt van der Pol (Lit.-Verz. 18) seine und Appletons Rechnung mit Potenzreihen auch auf das System mit zwei Freiheitsgraden. Allerdings berücksichtigt er nur die 3 ersten Potenzen und setzt

$$i_a = \varphi(e_a) = a \cdot e_a + b\, e_a^2 + c\, e_a^3. \qquad (46)$$

Er macht in seinen Rechnungen die Voraussetzungen:

1. schwacher Dämpfung: $l_n^2 = \frac{\lambda_n^2}{\Omega_n^2} \ll 1$,

2. vorherrschender Kopplung: $k > k_{kr}$.

Prüft man seine Resultate, so findet man ähnlich wie beim einfachen Sender,

a) daß die Gleichgewichtsamplitude und die Breite des Ziehbereichs von der Krümmung der Kennlinie abhängen,

b) daß dagegen die Grenzpunkte der Selbsterregung durch die „Nullsteilheit" der linearen Theorie vollständig bestimmt sind.

2. Verfahren: Konstante Steilheit, variable Dämpfung.

1) Rogowski.

Die bisher besprochenen Arbeiten betrachten nur den eingeschwungenen Sender und behandeln seine Berechnung als reines Wechselstromproblem. Erst Rogowski (Lit.-Verz. 20—23) führte in die Theorie des Zwischenkreissenders die Vallaurische Betrachtungsweise wieder ein, nämlich die Anschauung, daß die Steilheit S eine durch den Bau der Röhre gegebene Konstante ist, die im Verein mit den übrigen Sendergrößen die Koppeldämpfung erst bestimmt. Rogowski stützt sich auf seine oben besprochene Kopplungstheorie, deren Ergebnisse er unter den dort gemachten Voraussetzungen, nämlich:

1. induktive Kopplung,
2. schwache Dämpfung: $l_n^2 \ll 1$,
3. vorherrschende Kopplung: $k > k_{kr}$

ohne weiteres auf den Zwischenkreissender anwenden kann.

Es gilt also für die Koppelfrequenzen ω_n der Wert

$$\omega_n = \Omega_1 \sqrt{\frac{1+x^2}{2\sigma}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right]} \qquad (11)$$

und für die Dämpfung der Koppelschwingungen:

$$\alpha_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha_2 = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$$

mit den Ausdrücken (12) für die Dämpfungsgewichte u und U. Lautete nun bei Anwendung des Verfahrens I die Vorbedingung der Schwingungsfähigkeit in der Harms-Hazeltineschen Fassung

$$S_m \leqq S_R, \qquad (18)$$

so tritt an ihre Stelle bei Rogowski die gleichwertige Forderung, daß die Koppelschwingung nicht oder negativ gedämpft sein muß:

$$\alpha \leqq 0 \qquad (46a)$$

oder

$$-\lambda_1 \geqq \lambda_2 \frac{u_2}{u_1}. \tag{46b}$$

Die Grenzpunkte der Selbsterregungszone liegen bei

$$\alpha = 0 \tag{47a}$$

oder

$$-\lambda_1 = \lambda_2 \frac{u_2}{u_1}. \tag{47b}$$

Es wurde eben gesagt, daß Formel (46) gleichwertig mit der Bedingung (18) ist. Um dies nachzuweisen, müssen wir im Auge behalten, daß bei der Dämpfung 0 — und diese ist ja bei Rogowski das Kennzeichen der Einsatzpunkte — auch hier der Ansatz $i = A . \varepsilon^{t j \omega}$ berechtigt ist. Bedenken wir, daß nach Rogowski gilt:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{\Omega_2^2 - \omega^2}, \tag{48}$$

so ergibt sich die Indentität von (47b) mit der Möller-Heegnerschen Gleichung (40a). Rogowskis Ergebnisse sind daher prinzipiell die gleichen wie die der übrigen Autoren und können sich von ihnen nur durch den oben definierten Näherungsgrad und Geltungsbereich unterscheiden.

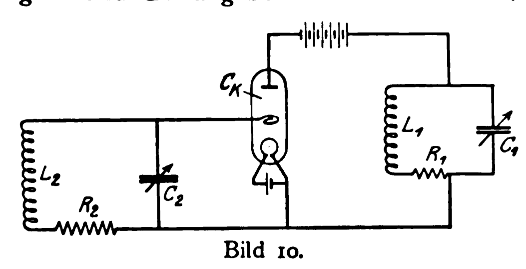


Bild 10.

Da aber Rogowski konsequent Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade vermeidet, sind seine Formeln leicht auszuwerten. Er vermag infolgedessen die Diskussion weiter durchzuführen als seine Vorgänger. So gibt er bestimmte, z. T. durch weitere Näherungen vereinfachte, analytische und zahlenmäßige Werte für die Lage der Selbsterregungszone und Ziehschleife in Abhängigkeit von den Senderkonstanten, nämlich:

1. Steilheit S,
2. Rückkopplung M_g,
3. Kopplungsgröße k bzw. $\sigma = 1 - k^2$ sowie von den Schwingungsgrößen der Einzelkreise.

Rogowski ist der erste Autor, der darauf aufmerksam macht, daß bei loser Rückkopplung in der Nähe der Resonanzstelle eine schwingungsunfähige Frequenzlücke liegen kann. (S. a. Möller, 2. Aufl., S. 124.)

Da es in der vorliegenden Schrift auf einen Vergleich der Behandlungsweisen ankommt, übergehe ich die Rechnungen von Rogowski und Harms für den sekundär rückgekoppelten Sender und die weitere von Rogowski für einen Sender mit kombinierter primärer und sekundärer Rückkopplung, sowie die Übertragung der Rogowskischen Methode auf kapazitiv gekoppelte Sender durch Grösser.

Dagegen möchte ich noch die Abhandlung von Rukop und Haußer-Ganßwindt (Lit.-Verz. 24) über einen Sender mit der Huthschen Rückkopplung durch die Anoden-Gitterkapazität erwähnen (Bild 10).

2. Rukop und Haußer-Ganßwindt.

Die Verfasser stellen sich wie Rogowski auf den Vallaurischen Standpunkt konstanter Röhrensteilheit. Ihr Ansatz stimmt daher mit dem Rogowskis überein und führt für die komplexe Frequenz $\vartheta = \alpha + j\omega$ auf eine Gleichung 4. Grades entsprechend dem Ausdruck (33). Diese Grundgleichung lösen sie aber ohne Vernachlässigung auf.

Sie kommen infolgedessen zu einer so komplizierten Formel, daß sie sich damit begnügen, den Verlauf der Dämpfungs- und Frequenzfunktion durch zahlen- und kurvenmäßige Beschreibung typischer Einzelfälle zu erläutern.

Ihre Rechnung ist dadurch höchst wertvoll, daß sie an einem streng durchgeführten Beispiel die qualitative Richtigkeit der von den übrigen Autoren eingeführten vereinfachten Methoden bestätigen.

III. Zusammenfassung.

Blicken wir zurück, so sehen wir, daß alle Autoren bei Behandlung des Zwischenkreissenders mehr oder weniger deutlich auf den Differentialgleichungen (31) bzw. der Grundgleichung (33) fußen. Sämtliche Lösungen beschränken sich außerdem auf schwach gedämpfte Schwingungskreise.

1. Bei Annahme ungedämpfter Schwingungen und veränderlicher Steilheit

geht aus (33) die komplexe Gleichung (34) hervor.

Hazeltine löst diese nur für den Sonderfall resonierender Einzelkreise.

Harms macht sich in seiner ersten Arbeit von der Beschränkung auf den Resonanzpunkt los, kommt aber über die Berechnung von Einzelfällen nicht hinaus.

Heegner und die mit der seinen verwandten Arbeiten von

Möller und Pauli diskutieren rein qualitativ den gesamten Frequenzbereich unter Voraussetzung einer Röhre mit unbegrenzter Steilheit.

Harms II führt in die Heegnersche Behandlung die Maximalbedingung begrenzter Röhrensteilheit ein.

2. Die Annahme konstanter Steilheit

führt zu einer Gleichung 4. Grades für Koppelfrequenz und -dämpfung.

Rogowski für induktiv und

Grösser für kapazitiv gekoppelte Kreise führen die Diskussion auf dieser Grundlage völlig durch unter der Voraussetzung überkritischer Kopplung.

Rukop und Haußer-Ganßwindt geben für einige Sonderfälle die strenge Lösung unter Vermeidung jeder Vernachlässigung.

Bei der Frage, welche der besprochenen Arbeiten man zur Lösung praktischer Probleme heranziehen wird, kommt es auf die Art der Aufgaben an.

Und zwar sind es hauptsächlich drei Größen, die beim Zwischenkreissender interessieren:

1. die Einsatzstellen von Selbsterregung und Ziehschleife,
2. die Stromstärke im Schwingungskreis,
3. die Frequenz.

Die Einsatzstellen sind am vollständigsten und einfachsten nach den Formeln von Rogowski und Grösser zu finden.

Für die Amplituden gilt der Näherungsausdruck von Harms, sowie ein genauerer, auf S. 42, folgende Arbeit, erwähnter von Möller. Verlangt man genaue Werte, so wird man die langwierige Möllersche Methode der Schwingkennlinie durchführen müssen.

Die Frequenzen sind von sämtlichen Autoren berechnet. Im überkritischen Gebiet sind die Näherungen von Wien und Rogowski anwendbar, bei unterkritischer Kopplung ist eine Vereinfachung der strengen Lösung noch nicht vorhanden.



Oberschwingungen des Röhrensenders.

Von

Walter Albersheim.

Mitteilung aus dem elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

Für die Berechnung des Schwingungsstromes bei einem direkt gekoppelten Röhrensender liegen analytische Ausdrücke vor von Möller und Harms. Nach Möller (Lit.-Verz. 15)[1]) ist[2])

$$\hat{\imath} = \hat{\imath}_a \cdot \frac{\Omega}{2\lambda} = \frac{\hat{\imath}_a}{2 l} \qquad (1)$$

Die auf Seite 30 vorstehender Arbeit erwähnte Näherungsrechnung von Harms führt auf die Formel

$$\hat{\imath} = i_s \cdot \frac{\Omega}{4\lambda} = \frac{i_s}{4 l}. \qquad (I,\ 22\,b)$$

Die Möllersche Formel ist, wie auf Seite 46 gezeigt wird, die strengere und gilt allgemein. Die Harmssche führt zu den gleichen Stromwerten unter der Annahme eines rein sinusförmigen Anodenstromes von der Amplitude $\hat{\imath}_a = \frac{i_s}{2}$, wie er bei loser Gitterrückkopplung und geringer (positiver) Gittervorspannung auftritt. Bei fester Rückkopplung mit positiver Gittervorspannung ergibt die Harmssche Gleichung Schwingungsamplituden, die bis zu 22% hinter den wirklichen Werten zurückbleiben, bei negativer Vorspannung ergibt sie zu hohe Werte.

Nach Harms bewirkt beim Zwischenkreissender die Rückwirkung des induktiv gekoppelten Sekundärkreises auf den Primärkreis, daß dieser so schwingt wie ein einfacher Sender mit verändertem Selbstinduktionskoeffizienten L^1 und Widerstand R^1, dergestalt, daß $\frac{R^1}{2\,L^1} = \alpha$ und $\sqrt{\frac{1}{L^1 C} - \alpha^2} = \omega$ wird.

Dementsprechend müßte im Zwischenkreis ein Schwingungsstrom fließen von der Größe

$$\hat{\imath}_1 = i_s \frac{\omega}{4\alpha} = \frac{i_s}{4\,a}. \qquad (2)$$

Über die Größenordnung der Grundamplituden sind wir daher einigermaßen unterrichtet. Anders ist es mit den Oberwellen. Die einzigen quantitativen Rechnungen darüber finden sich bei Möller (Lit.-Verz. 15, S. 97).

Möller weist nach, daß im einfachen Röhrensender die Oberwellenamplituden gegen die Grundwelle klein sind zum mindesten im Verhältnis $l = \frac{\lambda}{\Omega}$, also meistens unter 1% bleiben. Um diese, bei großen Senderenergien immer noch störenden Beträge weiter zu verringern, empfiehlt Möller die Anwendung schwach gedämpfter Zwischenkreise. Tatsächlich ist ja die Verbesserung der Wellenform ein Hauptgrund für die Einführung des Zwischenkreissenders gewesen.

Nun ist durch Versuche von Glage und Edler (Lit.-Verz. 5) nachgewiesen, daß gerade beim Zwischenkreissender resonanzartige Erscheinungen auftreten können, bei denen die Oberwellen im Antennenkreis bis zur Größenordnung der Grundwelle selbst ansteigen. Die Wellenform im Sender mit Zwischenkreis bedarf daher einer Klärung.

Die folgenden Ausführungen stellen einen Versuch dar, die Grund- und Oberwellen des Schwingungsstromes angenähert zu berechnen.

[1]) Literatur-Verzeichnis auf S. 74.
[2]) Erklärung der Zeichen auf S. 73 und 74.

Eine strenge Theorie scheitert an der Schwierigkeit, den gekrümmten Verlauf der Charakteristik rechnerisch zu erfassen. Wir werden daher so vorgehen, daß wir die Kurvenform des Anodenstromes schätzen und hieraus die Oberwellen des Arbeitsstromes bestimmen.

Gang der Rechnung.

1. Schätzung der Anodenstromkurve.

Der ungefähre Verlauf des Anodenstromes ist leicht bestimmbar, wenn wir voraussetzen, daß

1. der Schwingungsstrom, also auch die von ihm gesteuerte Gitterspannung, annähernd sinusförmig verläuft,
2. die Charakteristik sich nach Bild 1 zwischen den Grenzen der Sättigung und Verriegelung einer Geraden nähert.

Wir unterscheiden dann folgende typische Fälle:

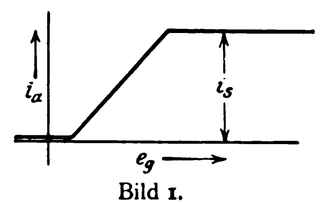
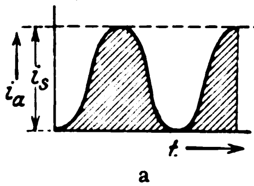


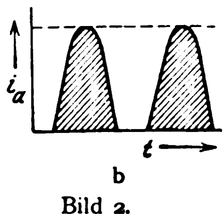
Bild 1.

a) Lose Gitterkopplung.

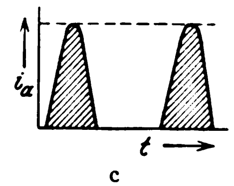
1. Positive Gittervorspannung: der Anodenstrom verläuft etwa sinusförmig (Bild 2a).



a



b



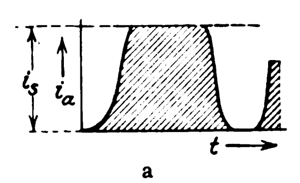
c

Bild 2.

2. Negative Vorspannung: Der Anodenstrom setzt sich aus Sinusbögen zusammen, die mit wachsender negativer Gittervorspannung immer schmäler werden. (Bild 2b und c).

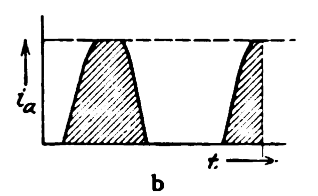
b) Mittlere Kopplung.

Die Gitterspannung steigt so hoch, daß die Röhre durch Erreichen des Sättigungsstromes verriegelt wird. Der Anodenstrom setzt sich aus oben abgestumpften



a

Bild 3.



b

Sinusbögen zusammen, die wie bei a) um so schmäler werden, je größer die negative Gittervorspannung gewählt wird (Bild 3a, b).

c) Feste Gitterkopplung.

Die Gitterspannung springt so rasch von der Verriegelungs- zur Sättigungsgrenze, daß man die abgeflachten Sinusbögen der Bilder 3a b durch Rechtecke annähern kann (Bild 4). Auch diese werden schmäler mit fallendem Gitterpotential.

d) Sehr feste Kopplung (überspannter Betrieb).

Die Gitteramplituden werden so groß, daß im Maximum das Gitter auf höheres Potential gelangt als die Anode. Von dem emittierten Sättigungsstrom i_s wird dann ein merklicher Teil zum Gitter abfließen, die Rechteckkurve des Bildes 4 bekommt etwa sinusförmige Einbuchtungen (Bild 5)[1]).

Für die Beurteilung des voraussichtlichen Charakters haben wir den Anhalt, daß wir unter „loser Kopplung" diejenige verstehen, bei der nach den Formeln des 1. Teils Selbsterregung eben noch eintritt. Koppeln wir auf größte Schwingungsenergie aus, so ist anzunehmen, daß der Anodenstrom den ungefähr rechteckigen Verlauf des Bildes 4 hat und Gitterströme nach Bild 5 noch eben vermeidet.

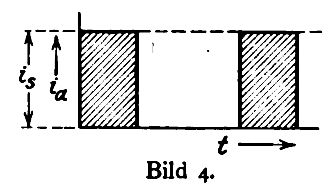


Bild 4.

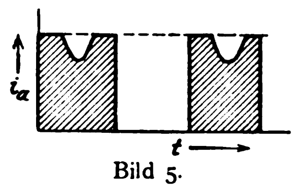


Bild 5.

Haben wir auf Grund dieser physikalischen Überlegung den Verlauf des Anodenstromes angenommen, so bleibt als Aufgabe der reinen Rechnung

2. Die Bestimmung des Schwingungsstromes aus der Anodenstromfunktion.

Es stehen uns — ähnlich wie bei den Rechnungen des 1. Teils — 2 Wege zur Verfügnng nämlich:

I. die komplexe Wechselstromrechnung,
II. die Rechnung mit Differentialgleichungen.

Beide seien hier kurz beschrieben und an einem einfachen Beispiel erläutert.

Verfahren I.

Komplexe Wechselstromrechnung.

Wir zerlegen die Anodenstromfunktion durch harmonische Analyse in einer der Fourierschen analogen Weise in komplexe Grund- und Oberschwingungen. Jede einzelne harmonische des Anodenstroms erzeugt dann in den Senderkreisen eine erzwungene Schwingung, deren Phase und Amplitude aus den Wechselstromgesetzen hervorgeht. Addition der einzelnen Teillösungen ergibt schließlich den Schwingungsstrom wieder in Form einer harmonischen Reihe[2]).

Verfahren II.

Rechnung mit Differentialgleichungen.

Wir zerlegen die Anodenstromkurve in gradlinige und sinusförmige Abschnitte. Für jedes dieser Teilstücke läßt sich die Differentialgleichung lösen. Da es sich stets um Differentialgleichungen zweiter Ordnung handelt, bleiben an der Grenze jedes Teilstückes 2 Integrationskonstanten als Grenzbedingungen zu ermitteln. Ihre Berechnung gelingt durch folgende Überlegung:

Die Selbstinduktion der Schwingungskreise verhindert unstetige Stromsprünge, die Kapazität unstetige Spannungssprünge. Als Übergangsgleichung dient also die Bedingung stetigen Strom- und Spannungsverlaufs an der Abschnittsgrenze. Statt der Spannungsbedingung genügt auch bei der Schaltung (Bild 6) die mathematisch bequemere Forderung stetigen Übergangs von $i' = \frac{di}{dt}$.

[1]) Man vergleiche Möller, Elektronenröhren.
[2]) Es ist dies das Verfahren, das auch Möller anwendet (Lit-Verz. 15, S. 97).

Denn da im Selbstinduktionszweig gilt:

$$e_1 = R\, i_1 + L\, i_1', \tag{3}$$

so folgt aus der Stetigkeit von i und i' auch die von e.

Rechnungsbeispiel.

Zur Veranschaulichung der 2 Verfahren diene folgender verhältnismäßig einfacher Fall.

Es handelt sich um einen Sender ohne Zwischenkreis nach Bild 6.

Die i_a, t-Funktion werde dargestellt durch die symmetrische Rechteckskurve des Bildes 7.

Der Schwingungskreis hat eine Dämpfung $\lambda = \frac{R}{2L}$ und eine Eigenfrequenz

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \lambda^2}.$$

Die Anodenstromfrequenz μ braucht — zumal da unsere Rechnung auch für fremderregte Sender gilt — nicht mit Ω übereinzustimmen. Bei selbsterregtem Sender wird μ jedoch sehr nahe bei Ω liegen, so daß man setzen kann $\mu^2 = \Omega^2 (1 + m)$, wobei m die Größenordnung von l^2 besitzt.

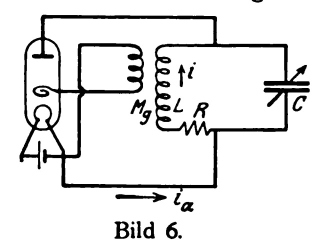


Bild 6.

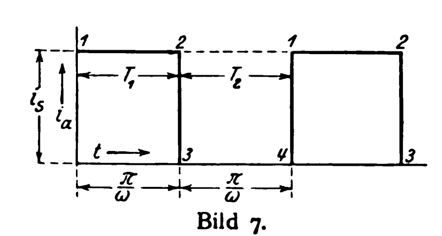


Bild 7.

Allgemeiner Ansatz.

Das 2. Kirchhoffsche Gesetz ergibt für den Schwingungskreis die Gleichung:

$$i'' + 2\lambda i' + (\lambda^2 + \Omega^2)\, i = (\lambda^2 + \Omega^2)\, i_a\,{}^{1)} \tag{4a}$$

oder mit der Abkürzung:

$$\Omega'^2 = \Omega^2 + \lambda^2 = \frac{1}{LC} \tag{5}$$

$$i'' + 2\lambda i' + \Omega'^2 i = \Omega'^2 i_a. \tag{4b}$$

---

1) Ableitung der Gleichung 4a.

Nach dem 2. Kirchhoffschen Satz ist in jedem geschlossenen Stromring die Summe der Spannungen Null.

Als Stromring betrachten wir den in nebenstehendem Bild 6b herausgezeichneten Schwingungskreis der Schaltung nach Bild 6. Außerhalb des Kreises fließt der Anodenstrom i_a. Setzen wir daher den Schwingungsstrom im „Induktionszweig" a b c des Kreises = i, so muß, damit gemäß dem 1. Kirchhoffschen Gesetz die Stromsumme in den Verzweigungspunkten a und c Null wird, im Kapazitätszweig c a der Rückstrom $(i - i_a)$ fließen.

Die Spannung beträgt zwischen den Punkten:

a b	$i \cdot R$
b c	$\frac{di}{dt} \cdot L$
c a	$\int (i - i_a)\, dt \cdot \frac{1}{C}.$

Die Summe: $i \cdot R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int (i - i_a)\, dt = 0.$

Bild 6.

Differentiation nach f und Division durch L ergibt:

$$\frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{CL}(i - i_a) = 0,$$

eine Gleichung, die unter Berücksichtigung der allgemein verwandten Abkürzungen mit Gleichung (4a) identisch ist.



Rechnung nach Verfahren I.

Der Anodenstrom läßt sich verwandeln in eine harmonische Reihe

$$i_{at} = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \varepsilon^{+nj\mu t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \varepsilon^{-nj\mu t} \tag{6}$$

mit den Konstanten

$$a_0 = \frac{i_s}{2}, \tag{8a}$$

$$a_n = b_n = 0 \text{ für geradzahlige } n \tag{8b}$$

und

$$a_n = -b_n = -\frac{j \cdot i_s}{n\pi} \text{ für ungeradzahlige } n. \tag{8c}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (4a) ein und berücksichtigen wir, daß 1. $\mu \approx \Omega$, 2. $\lambda \ll \Omega$, so erhalten wir für den Schwingungsstrom eine entsprechende harmonische Reihe

$$i_t = p_0 + \sum_n p_n \varepsilon^{+jn\mu t} + \sum_n q_n \varepsilon^{-jn\mu t} \tag{10}$$

mit den Konstanten

$$p_0 = a_0 \tag{13a}$$

$$p_n = a_n \frac{1}{1 - n^2 + 2jnl} \tag{13b}$$

$$q_n = b_n \frac{1}{1 - n^2 - 2jnl}. \tag{13c}$$

Für die Grundwelle ergibt sich in Übereinstimmung mit Möller

$$\hat{i} = i_s \frac{\Omega}{\pi\lambda}, \tag{17}$$

während die Harmssche Näherung auf

$$\hat{i} \approx i_s \frac{\Omega}{4\lambda}$$

führen würde.

Rechnung nach Verfahren II.

Wir zerlegen die Funktion $i_{a_{(t)}}$ des Bildes 7 in 2 Abschnitte

$$T_1 \left(t = 0 \text{ bis } \frac{\pi}{\mu}, \text{ Zeitpunkt 1 bis 2,} \right)$$

und

$$T_2 \left(t = \frac{\pi}{\mu} \text{ bis } \frac{2\pi}{\mu}, \text{ Zeitpunkt 3 bis 4} \right),$$

deren Differentialgleichungen wir getrennt behandeln.

1. Abschnitt. Gleichung (4b) geht über in

$$i'' + 2\lambda i' + \Omega'^2 i = \Omega'^2 i_s. \tag{4c}$$

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} j\Omega - \lambda &= \vartheta \quad \text{(a)} & \varepsilon^{\vartheta\frac{\pi}{\mu}} &= \mathfrak{N} \quad \text{(c)} \\ -j\Omega - \lambda &= \underline{\vartheta} \quad \text{(b)} & \varepsilon^{\underline{\vartheta}\frac{\pi}{\mu}} &= \underline{\mathfrak{N}} \quad \text{(d).} \end{aligned} \tag{19}$$

Die allgemeine Lösung von (4c) lautet:

$$i_t = i_s + \mathfrak{A}\varepsilon^{\vartheta t} + \underline{\mathfrak{A}}\varepsilon^{\underline{\vartheta} t}, \tag{20a}$$

mit den zu berechnenden Integrationskonstanten $\mathfrak{A}$ und $\underline{\mathfrak{A}}$. Die gleichen Buchstaben deuten an, daß ϑ und $\underline{\vartheta}$, $\mathfrak{N}$ und $\underline{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{A}$ und $\underline{\mathfrak{A}}$ konjugiert komplexe Größen sind, wovon jedoch in der Rechnung kein Gebrauch gemacht wird.



Differentiation von (20) nach t ergibt:

$$i_t' = \mathfrak{A}\,\vartheta\cdot\varepsilon^{\vartheta t} + \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\vartheta}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta} t}. \qquad (21\,a)$$

Für Zeitpunkt 1 gilt:

$$i_1 = i_s + \mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}}, \qquad (22\,a)$$

$$i_1' = \vartheta\,\mathfrak{A} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{A}}. \qquad (23\,a)$$

Für Zeitpunkt 2 gilt:

$$i_2 = i_s + \mathfrak{A}\,\mathfrak{N} + \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}}, \qquad (24\,a)$$

$$i_2' = \vartheta\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{N} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}}. \qquad (25\,a)$$

2. Abschnitt. Gleichung (4) geht über in

$$i'' + 2\lambda i' + \Omega'^2 i = 0, \qquad (4\,d)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$i = \mathfrak{F}\,\varepsilon^{\vartheta t} + \underline{\mathfrak{F}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta} t}, \qquad (20\,b)$$

$$i' = \vartheta\,\mathfrak{F}\,\varepsilon^{\vartheta t} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{F}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta} t}. \qquad (21\,b)$$

Für Zeitpunkt 3 gilt:

$$i_3 = \mathfrak{F} + \underline{\mathfrak{F}}, \qquad (22\,b)$$

$$i_3' = \vartheta\,\mathfrak{F} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{F}}. \qquad (23\,b)$$

Für Zeitpunkt 4:

$$i_4 = \mathfrak{F}\,\mathfrak{N} + \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}, \qquad (24\,b)$$

$$i_4' = \vartheta\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{N} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}. \qquad (25\,b)$$

Grenzbedingungen.

Nach den Überlegungen der Seiten 44–45 folgen aus Bild 7 sofort die 4 Übergangsgleichungen:

$$i_1 = i_4 \qquad (26\,a)$$

$$i_1' = i_4' \qquad (26\,b)$$

$$i_2 = i_3 \qquad (26\,c)$$

$$i_2' = i_3'. \qquad (26\,d)$$

Schreiben wir (26a) und (26b) aus:

$$i_s + \mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{N} + \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}},$$

$$\vartheta\,\mathfrak{A} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{A}} = \vartheta\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{N} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}.$$

Umformung ergibt:

$$i_s + (\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\,\mathfrak{N}) + (\underline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}) = 0,$$

$$\vartheta\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\,\mathfrak{N}) + \underline{\vartheta}\,(\underline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}) = 0.$$

Es folgt sofort:

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\,\mathfrak{N} = i_s \frac{\underline{\vartheta}}{\vartheta - \underline{\vartheta}}, \qquad (27\,a)$$

$$\underline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}} = i_s \frac{\vartheta}{\underline{\vartheta} - \vartheta}. \qquad (27\,b)$$

Auf gleiche Weise behandeln wir (26c und 26d):

$$i_s + \mathfrak{A}\,\mathfrak{N} + \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{F} + \underline{\mathfrak{F}}$$

$$\vartheta\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{N} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}} = \vartheta\,\mathfrak{F} + \underline{\vartheta}\,\underline{\mathfrak{F}}.$$

$$i_s + (\mathfrak{A}\,\mathfrak{N} - \mathfrak{F}) + (\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}} - \underline{\mathfrak{F}}) = 0,$$

$$\vartheta\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{N} - \mathfrak{F}) + \underline{\vartheta}\,(\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}} - \underline{\mathfrak{F}}) = 0.$$

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{N} - \mathfrak{F} = i_s \frac{\underline{\vartheta}}{\vartheta - \underline{\vartheta}}. \qquad (27\,c)$$

$$\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}} - \underline{\mathfrak{F}} = i_s \frac{\vartheta}{\underline{\vartheta} - \vartheta}. \tag{27d}$$

Jetzt kombinieren wir Gleichungen (27a) und (27c). Subtraktion der Gleichungen ergibt

$$\mathfrak{A}(1 - \mathfrak{N}) + \mathfrak{F}(1 - \mathfrak{N}) = 0.$$

$$\underline{\mathfrak{F} = -\mathfrak{A}.} \tag{28a}$$

Es folgt:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{N} + 1) = i_s \frac{\vartheta}{\vartheta - \underline{\vartheta}},$$

$$\underline{\mathfrak{A} = -\mathfrak{F} = \frac{i_s}{1 + \mathfrak{N}} \frac{\vartheta}{\vartheta - \underline{\vartheta}}.} \tag{28b}$$

Auf dieselbe Art folgt aus (27b) und (27d)

$$\underline{\mathfrak{A}} = -\underline{\mathfrak{F}}. \tag{28c}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{A}} = \frac{i_s}{1 + \underline{\mathfrak{N}}} \cdot \frac{\underline{\vartheta}}{\underline{\vartheta} - \vartheta}.} \tag{28d}$$

Setzen wir für die Abkürzungen (19) ihre Werte ein, so ergibt sich wegen

$$\frac{\underline{\vartheta}}{\vartheta - \underline{\vartheta}} = \frac{-j\Omega - \lambda}{-\lambda + j\Omega + \lambda + j\Omega} = -\frac{1}{2}(1 - j\,l)$$

und

$$\frac{\vartheta}{\underline{\vartheta} - \vartheta} = \frac{-\lambda + j\Omega}{-\lambda - j\Omega + \lambda - j\Omega} = -\frac{1}{2}(1 + j\,l):$$

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{F} = -\frac{i_s}{2}(1 - j\,l) \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon^{(-\lambda + j\Omega)\cdot\frac{\pi}{\mu}}}. \tag{29a}$$

$$\underline{\mathfrak{A}} = -\underline{\mathfrak{F}} = -\frac{i_s}{2}(1 + j\,l) \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon^{(-\lambda - j\Omega)\frac{\pi}{\mu}}}. \tag{29b}$$

Jetzt können wir den Verlauf der i_t-Funktion anschreiben, wobei wir den Nullpunkt der Zeit auch für den 2. Zeitabschnitt auf Punkt 1, also um $\frac{\pi}{\mu}$ zurückverlegen. Es wird

$$i_{\left(t = 0 \text{ bis } \frac{\pi}{\mu}\right)} = i_s - \frac{i_s(1 - j\,l)\,\varepsilon^{(-\lambda + j\Omega)t}}{2\left[1 + \varepsilon^{(-\lambda + j\Omega)\frac{\pi}{\mu}}\right]} - \frac{i_s(1 + j\,l)\,\varepsilon^{(-\lambda - j\Omega)t}}{2\left[1 + \varepsilon^{(-\lambda - j\Omega)\frac{\pi}{\mu}}\right]}. \tag{30a}$$

$$i_{\left(t = \frac{\pi}{\mu} \text{ bis } \frac{2\pi}{\mu}\right)} = \frac{i_s(1 - j\,l)\,\varepsilon^{(-\lambda + j\Omega)\left(t - \frac{\pi}{\mu}\right)}}{2\left[1 + \varepsilon^{(-\lambda + j\Omega)\frac{\pi}{\mu}}\right]} + \frac{i_s(1 + j\,l)\,\varepsilon^{(-\lambda - j\Omega)\left(t - \frac{\pi}{\mu}\right)}}{2\left[1 + \varepsilon^{(-\lambda - j\Omega)\frac{\pi}{\mu}}\right]}. \tag{30b}$$

Gleichung (30b) läßt sich umformen zu

$$i_{\left(t = \frac{\pi}{\mu} \text{ bis } \frac{2\pi}{\mu}\right)} = \frac{i_s(1 - j\,l)\,\varepsilon^{(-\lambda + j\Omega)t}}{2\left[1 + \varepsilon^{(-\lambda + j\Omega)\left(-\frac{\pi}{\mu}\right)}\right]} + \frac{i_s(1 + j\,l)\,\varepsilon^{(-\lambda - j\Omega)t}}{2\left[1 + \varepsilon^{(-\lambda - j\Omega)\left(-\frac{\pi}{\mu}\right)}\right]}. \tag{30c}$$

Diskussion der Formeln (30).

Die Lösungsgleichungen enthalten zunächst eine Gleichstromkomponente, die während der 1. Halbperiode $= \frac{i_s}{2}$, während der 2. Null ist. Sie ist identisch mit dem nach Bild 7 verlaufenden Anodenstrom. Ihr Betrag ist bei Selbsterregung oder Fremderregung in der Eigenfrequenz klein gegen die folgenden Glieder, die Funktionen der Zeit t sind. Diese enthalten das Glied t nur in den Faktoren $\underline{\varepsilon^{(-\lambda \pm j\Omega)t}}$.

Es handelt sich demnach um gedämpfte Sinusschwingungen der Frequenz Ω und der Dämpfung λ, also um die durch den Anodenstrom angestoßene Eigenfrequenz des Schwingungskreises.

Im Zähler der variablen Glieder steht der Faktor $\underline{1 \pm j l}$, der wegen der Kleinheit von l nahe bei 1 liegt; der kleine imaginäre Anteil bedeutet nur eine geringe Phasenverschiebung.

Im Nenner stehen die Faktoren $\underline{1 + \varepsilon^{(-\lambda \pm j\Omega)\frac{\pi}{\mu}}}$, μ liegt bei Selbsterregung sehr nahe bei Ω, wir können daher mit großer Annäherung die Nennerfaktoren ersetzen durch

$$\underline{1 + \varepsilon^{(-\lambda \pm j\Omega)\frac{\pi}{\Omega}} = 1 - \varepsilon^{-l\pi} \approx l\pi.}$$

Nach Einführung dieser Vereinfachungen lauten die Stromgleichungen:

$$\text{In der 1. Halbperiode } i \approx \frac{i_s}{2} - \frac{i_s}{2\pi l} \cdot \varepsilon^{-\lambda t} (\varepsilon^{j\Omega t} + \varepsilon^{-j\Omega t}),$$

$$\underline{= \frac{i_s}{2} - \frac{i_s}{\pi l} \cdot \varepsilon^{-\lambda t} \cos \Omega t.}$$

$$\text{In der 2. Halbperiode } i \approx \frac{i_s}{2\pi l} \cdot \varepsilon^{-\lambda t} (\varepsilon^{j\Omega t} + \varepsilon^{-j\Omega t}),$$

$$\underline{= \frac{i_s}{\pi l} \cdot \cos \Omega t \cdot \varepsilon^{-\lambda t}.}$$

Es entstehen also in jeder Halbperiode schwach gedämpfte Wellenzüge der Amplitude $\frac{i_s}{\pi l}$. Die Abnahme der Amplituden wird nach jeder Halbwelle durch das Umspringen des Anodenstromes ausgeglichen, so daß der Gesamtstrom von Halbwelle zu Halbwelle ohne Strom- noch Spannungssprung weiterfließt, insgesamt eine sinusähnliche Schwingung von der konstanten Amplitude $\frac{i_s}{\pi l}$ erzeugend.

Die vorliegende Darstellung mit ihren Formeln ist unmittelbar der Art der Schwingungsanregung angepaßt, während die Fouriersche Behandlung auf die Untersuchung der erhaltenen Schwingung mit dem Wellenmesser zugeschnitten ist.

Eine Analyse dieser Schwingung nach Fourier würde zu den Endformeln (10), (13) des Verfahrens I zurückführen.

Um den Rechnungsgang zu veranschaulichen, folge hier ein Zahlenbeispiel. Wir wählen die Dämpfung sehr hoch, um überhaupt merkliche Oberwellen zu erhalten.

Es sei $i_s = 0{,}1$ Amp. (entspricht der Emission einer 5-Watt-Röhre),
$C = 900$ cm $= 10^{-9}$ Farad,
$L = 100000$ cm $= 10^{-4}$ Henry,
$R = 200$ Ohm (unwahrscheinlich hoch).

Wegen der hohen Dämpfung greifen wir auf die genauere Gleichung (12) zurück. Es wird

$$\lambda = \frac{R}{2L} = \frac{200}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^6 \text{ sec}^{-1},$$

$$\Omega' = \sqrt{\frac{1}{CL}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-4} \cdot 10^{-9}}} = 3{,}16 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1},$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega'^2 - \lambda^2} = 3 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}.$$

Die Schwingfrequenz sei:

$$\mu = \Omega' = 3{,}16\,\text{sec}^{-1} \cdot 10^6.$$

Die Komponenten des Anodenstroms sind:

$$a_0 = \frac{i_s}{2} = 0{,}05 \text{ Amp.},$$

$$a_n = -\frac{j\,i_s}{\pi n} = -\frac{j}{n} \cdot 0{,}0159 \text{ Amp.},$$

$$b_n = +\frac{j\,i_s}{\pi n} = +\frac{j}{n} \cdot 0{,}0159 \text{ Amp.}$$

Wir haben also für die Grundwelle:

$$a_1 = -b_1 = -j \cdot 0{,}0159 \text{ Amp.}$$

Für die 1. vorhandene Oberschwingung, nämlich die 3. Harmonische:

$$a_3 = -b_3 = -j \cdot 0{,}0053.$$

Berechnen wir jetzt den Schwingungsstrom. Es wird:

$$p_0 = \frac{i_s}{2} = 0{,}05 \text{ Amp.},$$

$$p_n = -j\frac{i_s}{n\pi} \cdot \frac{\Omega'^2}{\Omega'^2(1-n^2) + 2\lambda n j \Omega'} = -j\frac{0{,}05}{n\pi} \cdot \frac{10^{13}}{10^{13}(1-n^2) + 2 n j \cdot 10^6 \cdot 3{,}16 \cdot 10^6},$$

$$p_n = -\frac{j}{n} \cdot 0{,}0159 \cdot \frac{(1-n^2) - n j \cdot 0{,}632}{(1-n^2)^2 + n^2 \cdot 0{,}4},$$

$$q_n = +\frac{j}{n} \cdot 0{,}0159 \cdot \frac{(1-n^2) + n j \cdot 0{,}632}{(1-n^2)^2 + n^2 \cdot 0{,}4}.$$

Grundwelle:

$$p_1 = -j \cdot 0{,}0159 \cdot \frac{-j \cdot 0{,}632}{0{,}4} = -0{,}025 \text{ Amp.},$$

$$q_1 = -0{,}025 \text{ Amp.}$$

3. Oberwelle:

$$p_3 = -\frac{j}{3} \cdot 0{,}0159 \cdot \frac{(1-3^2)\,3 j \cdot 0{,}632}{(1-3^2)^2 + 3^2 \cdot 0{,}4} = -0{,}149 \cdot 10^{-3} + j \cdot 0{,}626 \cdot 10^{-3} \text{ Amp.},$$

$$q_3 = -0{,}149 \cdot 10^{-3} - j \cdot 0{,}626 \cdot 10^{-3} \text{ Amp.}$$

Wir schreiben jetzt das Resultat tabellarisch in reeller Form an unter Benutzung der bekannten Formeln

$$\frac{1}{2}\left[\varepsilon^{jx} + \varepsilon^{-jx}\right] = \cos x, \tag{33a}$$

$$\frac{1}{2j}\left[\varepsilon^{jx} - \varepsilon^{-jx}\right] = \sin x. \tag{33b}$$

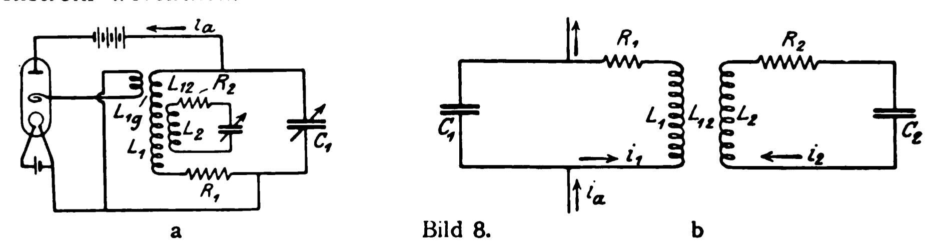
		Anodenstrom Amp. 10^{-3}	Schwingungsstrom Amp. 10^{-3}
Grundwelle	Verlauf	$+31{,}8 \sin \mu t$	$-50 \cos \mu t$
	Amplitude . . .	31,8	50
3. Oberwelle	Verlauf . . .	$10{,}6 \sin 3\mu t$	$-0{,}298 \cos 3\mu t - 1{,}252 \sin 3\mu t$
	Amplitude . .	10,6	$\sqrt{0{,}298^2 + 1{,}252^2} = 1{,}285$
$\frac{\text{3. Oberwelle}}{\text{Grundwelle}}$	(Amplitudenverhältnis)	0,333	0,0257

Also selbst bei übertrieben hoher Dämpfung erreicht im Selbstinduktionszweig des Schwingungskreises die stärkste Oberwellenamplitude nur $\frac{1}{39}$ der Grundamplitude. Die Spannungsamplitude erreicht wegen des 3fachen induktiven Widerstandes $^1/_{13}$ der Grundspannung, so daß $3 \cdot 0{,}0257^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ der Schwingungsleistung auf die dritte Oberwelle entfällt. Die Oberwellen sind so gering, daß eine graphische Darstellung des Schwingungsvorganges sich nicht merklich von einer Sinuskurve unterscheiden würde.

Anwendung der erläuterten Verfahren auf den Zwischenkreissender.

Es möge nun die Aufgabe gestellt sein, den Stromverbrauch eines Senders nach Bild 8a zu berechnen.

Da wir mit einem gegebenen Anodenstrom rechnen, ist für uns nur das in Bild 8b herausgezogene System der 2 Schwingungskreise mit dem durchfließenden Anodenstrom wesentlich.



a Bild 8. b

Der allgemeine Ansatz lautet:

$$L_1 i_1'' + 2 R_1 i_1' + \frac{1}{C_1} i_1 + L_{12} i_2'' = \frac{1}{C_1} i_a \tag{34a}$$

$$L_2 i_2'' + 2 R_2 i_2' + \frac{1}{C_2} i_2 + L_{12} i_1'' = 0. \tag{34b}$$

Die Rechnung nach Verfahren I läßt sich auch hier durchführen, ergibt aber für den Schwingungsstrom unübersichtliche gebrochene Ausdrücke 6. Grades in μ, die sich schlecht auswerten lassen. Wir wählen deshalb die

Rechnung nach Verfahren II.

1. Gedankengang.

Wir wählen als Anodenstromfunktion wieder eine Rechteckkurve, die aber sämtliche Oberwellen enthält. (Wir müssen also die symmetrische Kurve des früheren Rechenbeispiels vermeiden, die sich nur aus ungeraden Harmonischen zusammensetzt.) Die von dieser hervorgerufenen harmonischen Schwingungsamplituden dividieren wir durch die entsprechenden Teilamplituden des Anodenstromes und gewinnen so auf Grund des Proportionalgesetzes die allgemein gültigen Multiplikatoren.

2. Rechnung.

Die Anregungskurve entspreche dem Bilde 9.

Die Differentialgleichungen des Systems stimmen mit Gleichung (34a, b) überein.

Wir benutzen wieder die Abkürzungen:

$$\vartheta_1 = -\alpha_1 + j\omega_1 \text{ (a)} \qquad \vartheta_2 = -\alpha_2 + j\omega_2 \text{ (c)} \tag{40}$$
$$\underline{\vartheta_1} = -\alpha_1 - j\omega_1 \text{ (b)} \qquad \underline{\vartheta_2} = -\alpha_2 - j\omega_2 \text{ (d)}$$

und trennen nach den Abschnitten T_1 und T_2.

Im Zeitabschnitt 1 lautet dann die allgemeine Lösung:

$$i_I = i_s + \mathfrak{A}_1 \varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{A}_1} \varepsilon^{\underline{\vartheta_1} t} + \mathfrak{B}_1 \varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{B}_1} \varepsilon^{\underline{\vartheta_2} t} \tag{41a}$$

$$i_{II} = \mathfrak{A}_2\, \varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{A}}_2\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 t} + \mathfrak{B}_2\, \varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{B}}_2\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 t} \tag{41 b}$$

Nun erinnern wir uns, daß für jede Koppelfrequenz das Verhältnis der Schwingungsströme einen bestimmten Wert $\frac{i_1}{i_2} = Y$ hat, für den sich nach Pauli u. Heegner der Wert ergibt:

$$Y \approx \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \sqrt{\frac{\Omega_2^2 - \omega^2}{\Omega_1^2 - \omega^2}}\,[1], \tag{42 a}$$

der auf Seite 59 dieser Arbeit nochmals kurz abgeleitet wird.

Unter Benutzung dieser Beziehung wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= Y_1 \mathfrak{A}_2 & \qquad \mathfrak{B}_1 &= Y_2 \mathfrak{B}_2 \\ \underline{\mathfrak{A}}_1 &= Y_1 \underline{\mathfrak{A}}_2 & \qquad \underline{\mathfrak{B}}_1 &= Y_2 \underline{\mathfrak{B}}_2 \end{aligned} \tag{42 b}$$

und die allgemeine Lösung erhält die Form

$$i_I = i_s + Y_1 (\mathfrak{A}\, \varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{A}}\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 t}) + Y_2 (\mathfrak{B}\, \varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{B}}\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 t}) \tag{43 a}$$

$$i_{II} = \mathfrak{A}\, \varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{A}}\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 t} + \mathfrak{B}\, \varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{B}}\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 t}. \tag{43 b}$$

Differentiation nach t ergibt

$$i_I' = Y_1 (\vartheta_1 \mathfrak{A}\, \varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\vartheta}_1 \underline{\mathfrak{A}}\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 t}) + Y_2 (\vartheta_2 \mathfrak{B}\, \varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\vartheta}_2 \underline{\mathfrak{B}}\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 t}) \tag{44 a}$$

$$i_{II}' = \vartheta_1 \mathfrak{A}\, \varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\vartheta}_1 \underline{\mathfrak{A}}\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 t} + \vartheta_2 \mathfrak{B}\, \varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\vartheta}_2 \underline{\mathfrak{B}}\, \varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 t}. \tag{44 b}$$

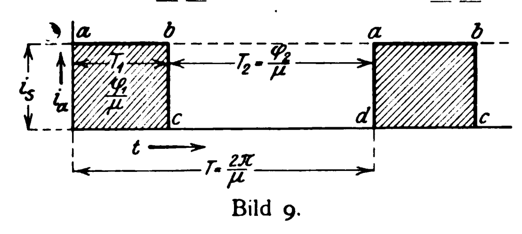


Bild 9.

Für den Zeitpunkt a gilt

$$\begin{aligned} i_{Ia} &= i_s + Y_1 (\mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}}) + Y_2 (\mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}}) \\ i'_{Ia} &= Y_1 (\vartheta_1 \mathfrak{A} + \underline{\vartheta}_1 \underline{\mathfrak{A}}) + Y_2 (\vartheta_2 \mathfrak{B} + \underline{\vartheta}_2 \underline{\mathfrak{B}}) \\ i_{IIa} &= \mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}} \\ i'_{IIa} &= \vartheta_1 \mathfrak{A} + \underline{\vartheta}_1 \underline{\mathfrak{A}} + \vartheta_2 \mathfrak{B} + \underline{\vartheta}_2 \underline{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Führen wir noch folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{\vartheta_1 T_1} = \mathfrak{N}_1 \quad (a) &\qquad &\varepsilon^{\vartheta_2 T_1} = \mathfrak{O}_1 \quad (e) &\qquad &T_1 = \frac{\varphi_1}{\mu} \\ &\varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 T_1} = \underline{\mathfrak{N}}_1 \quad (b) &\qquad &\varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 T_1} = \underline{\mathfrak{O}}_1 \quad (f) & & \\ &\varepsilon^{\vartheta_1 T_2} = \mathfrak{N}_2 \quad (c) &\qquad &\varepsilon^{\vartheta_2 T_2} = \mathfrak{O}_2 \quad (g) &\qquad &T_2 = \frac{\varphi_2}{\mu} \\ &\varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 T_2} = \underline{\mathfrak{N}}_2 \quad (d) &\qquad &\varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 T_2} = \underline{\mathfrak{O}}_2. \quad (h) & & \end{aligned} \tag{45}$$

Dann gilt für den Zeitpunkt b:

$$\begin{aligned} i_{Ib} &= i_s + Y_1 (\mathfrak{A} \mathfrak{N}_1 + \underline{\mathfrak{A}}\, \underline{\mathfrak{N}}_1) + Y_2 (\mathfrak{B} \mathfrak{O}_1 + \underline{\mathfrak{B}}\, \underline{\mathfrak{O}}_1) \\ i'_{Ib} &= Y_1 (\vartheta_1 \mathfrak{N}_1 \mathfrak{A} + \underline{\vartheta}_1 \underline{\mathfrak{N}}_1 \underline{\mathfrak{A}}) + Y_2 (\vartheta_2 \mathfrak{O}_1 \mathfrak{B} + \underline{\vartheta}_2 \underline{\mathfrak{O}}_1 \underline{\mathfrak{B}}) \\ i_{IIb} &= \mathfrak{A} \mathfrak{N}_1 + \underline{\mathfrak{A}}\, \underline{\mathfrak{N}}_1 + \mathfrak{B} \mathfrak{O}_1 + \underline{\mathfrak{B}}\, \underline{\mathfrak{O}}_1 \\ i'_{IIb} &= \vartheta_1 \mathfrak{A} \mathfrak{N}_1 + \underline{\vartheta}\, \underline{\mathfrak{A}}\, \underline{\mathfrak{N}}_1 + \vartheta_2 \mathfrak{B} \mathfrak{O}_1 + \underline{\vartheta}_2 \underline{\mathfrak{B}}\, \underline{\mathfrak{O}}_1. \end{aligned}$$

Genau so gehen wir für Zeitabschnitt 2 vor.

[1]) Siehe S. 38 der vorigen Arbeit.

Allgemeine Lösung:

$$i_I = Y_1(\mathfrak{F}\varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{F}}\varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 t}) + Y_2(\mathfrak{G}\varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{G}}\varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 t}) \tag{43 c}$$

$$i_{II} = \mathfrak{F}\varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{F}}\varepsilon^{\underline{\vartheta}_1 t} + \mathfrak{G}\varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{G}}\varepsilon^{\underline{\vartheta}_2 t}). \tag{43 d}$$

Wir erhalten für den Zeitpunkt c:

$$i_{Ic} = Y_1(\mathfrak{F} + \underline{\mathfrak{F}}) + Y_2(\mathfrak{G} + \underline{\mathfrak{G}})$$

$$i'_{Ic} = Y_1(\vartheta_1\mathfrak{F} + \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{F}}) + Y_2(\vartheta_2\mathfrak{G} + \underline{\vartheta}_2\underline{\mathfrak{G}})$$

$$i_{IIc} = \mathfrak{F} + \underline{\mathfrak{F}} + \mathfrak{G} + \underline{\mathfrak{G}}$$

$$i'_{IIc} = Y_1(\mathfrak{F} + \underline{\mathfrak{F}}) + Y_2(\mathfrak{G} + \underline{\mathfrak{G}})$$

und für Zeitpunkt d

$$i_{Id} = Y_1(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 + \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2) + Y_2(\mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 + \underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2)$$

$$i'_{Id} = Y_1(\vartheta_1\mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 + \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2) + Y_2(\vartheta_2\mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 + \underline{\vartheta}_2\underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2)$$

$$i_{IId} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 + \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2 + \mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 + \underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2$$

$$i'_{IId} = \vartheta_1\mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 + \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2 + \vartheta_2\mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 + \underline{\vartheta}_2\underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2.$$

Für die diesmal auftretenden 8 Integrationskonstanten:

$$\mathfrak{A}, \underline{\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{B}, \underline{\mathfrak{B}}, \quad \mathfrak{F}, \underline{\mathfrak{F}}, \quad \mathfrak{G}, \underline{\mathfrak{G}},$$

haben wir 8 Bestimmungsgleichungen, nämlich

$i_{Ia} = i_{Id}$	(a)	(e)	$i_{IIa} = i_{IId}$
$i'_{Ia} = i'_{Id}$	(b)	(f)	$i'_{IIa} = i'_{IId}$
$i_{Ib} = i_{Ic}$	(c)	(g)	$i_{IIb} = i_{IIc}$
$i'_{Ib} = i'_{Ic}$	(d)	(h)	$i'_{IIb} = i'_{IIc}$. (46)

Zur Lösung dieses umfangreichen Gleichungssystems trennen wir zunächst die Unbekannten der verschiedenen Koppelfrequenzen.

Wir kombinieren zuerst Gleichung (46a) mit (46e):

$$i_s + Y_1(\mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}}_1) + Y_2(\mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}}) = Y_1(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 + \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2) + Y_2(\mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 + \underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2)$$

$$\mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}} \quad + \quad \mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}} = \quad \mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 + \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2 \quad + \quad \mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 + \underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2$$

Wir stellen die Summanden um:

$$i_s + Y_1(\mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}} - \mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2) + Y_2(\mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 - \underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2) = 0$$

$$\mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}} - \mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2 \quad + \quad \mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 - \underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2 = 0. \tag{20}$$

Daraus ergibt sich:

$$\mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}} - \mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2 = -\frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \tag{47 a}$$

$$\mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 - \underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2 = +\frac{i_s}{Y_1 - Y_2}. \tag{48 a}$$

Zusammenstellung von (46) b und f ergibt in ähnlicher Weise:

$$Y_1(\vartheta_1\mathfrak{A} + \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{A}}) + Y_2(\vartheta_2\mathfrak{B} + \underline{\vartheta}_2\underline{\mathfrak{B}}) = Y_1(\vartheta_1\mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 + \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2) + Y_2(\vartheta_2\mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 + \underline{\vartheta}_2\underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2)$$

$$\vartheta_1\mathfrak{A} + \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{A}} + \vartheta_2\mathfrak{B} + \underline{\vartheta}_2\underline{\mathfrak{B}} = \vartheta_1\mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 + \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2 + \vartheta_2\mathfrak{G}\mathfrak{D}_2 + \underline{\vartheta}_2\underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2.$$

Es folgt:

$$\vartheta_1\mathfrak{A} + \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{A}} - \vartheta_1\mathfrak{F}\mathfrak{N}_2 - \underline{\vartheta}_1\underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2 = 0$$

oder

$$\vartheta_1(\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\mathfrak{N}_2) + \underline{\vartheta}_1(\underline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}}_2) = 0 \tag{47 b}$$

und

$$\vartheta_2(\mathfrak{B} - \mathfrak{G}\mathfrak{D}_2) + \underline{\vartheta}_2(\underline{\mathfrak{B}} - \underline{\mathfrak{G}}\,\underline{\mathfrak{D}}_2) = 0. \tag{48 b}$$

Als 3. kombinieren wir (46) c und g:

$$i_s + Y_1(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_1 + \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}}_1) + Y_2(\mathfrak{B}\mathfrak{D}_1 + \underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{D}}_1) = Y_1(\mathfrak{F} + \underline{\mathfrak{F}}) + Y_2(\mathfrak{G} + \underline{\mathfrak{G}})$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{N}_1 + \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{D}_1 + \underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{D}}_1 = \mathfrak{F} + \underline{\mathfrak{F}} + \mathfrak{G} + \underline{\mathfrak{G}}.$$

Wir erhalten:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{F} + \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}_1} - \underline{\mathfrak{F}} = -\frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \tag{47 c}$$

$$\mathfrak{B}\,\mathfrak{O}_1 - \mathfrak{G} + \underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{O}_1} - \underline{\mathfrak{G}} = +\frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \tag{48 c}$$

Schließlich stellen wir (46) d und h zusammen:

$$Y_1(\vartheta_1\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{N}_1 + \underline{\vartheta_1}\,\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}_1}) + Y_2(\vartheta_2\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{O}_1 + \underline{\vartheta_2}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{O}_1}) = Y_1(\vartheta_1\,\mathfrak{F} + \underline{\vartheta_1}\,\underline{\mathfrak{F}}) + Y_2(\vartheta_2\,\mathfrak{G} + \underline{\vartheta_2}\,\underline{\mathfrak{G}})$$

$$\vartheta_1\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{N}_1 + \underline{\vartheta_1}\,\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}_1} + \vartheta_2\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{O}_1 + \underline{\vartheta_2}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{O}_1} = \vartheta_1\,\mathfrak{F} + \underline{\vartheta_1}\,\underline{\mathfrak{F}} + \vartheta_2\,\mathfrak{G} + \underline{\vartheta_2}\,\underline{\mathfrak{G}}$$

und erhalten:

$$\vartheta_1(\mathfrak{A}\,\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{F}) + \underline{\vartheta_1}(\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}_1} - \underline{\mathfrak{F}}) = 0 \tag{47 d}$$

$$\vartheta_2(\mathfrak{B}\,\mathfrak{O}_1 - \mathfrak{G}) + \underline{\vartheta_2}(\underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{O}_1} - \underline{\mathfrak{G}}) = 0. \tag{48 d}$$

Die Gleichungen (47) enthalten nur die zu ω_1 gehörigen Konstanten $\mathfrak{A}$, $\underline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{F}$, $\underline{\mathfrak{F}}$. Die Gleichungen (48) für die $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$ sind ihnen negativ gleich, wenn man für ϑ_1 den Wert ϑ_2 und für $\mathfrak{N}$ den Wert $\mathfrak{O}$ einsetzt.

Aus den Gleichungen (47) lassen sich die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$ leicht finden. Wir kombinieren (47) a und b:

$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\,\mathfrak{N}_2) + (\underline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}_2}) = -\frac{i_s}{Y_1 - Y_2}$$

$$\underline{\vartheta_1(\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\,\mathfrak{N}_2) + \vartheta_2(\underline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}_2}) = 0.}$$

Es ergibt sich:

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\,\mathfrak{N}_2 = \frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\underline{\vartheta_1}}{\vartheta_1 - \underline{\vartheta_1}} \tag{49 a}$$

und

$$\underline{\mathfrak{A}} - \underline{\mathfrak{F}}\,\underline{\mathfrak{N}_2} = \frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\vartheta_1}{\underline{\vartheta_1} - \vartheta_1}. \tag{49 c}$$

Ebenso ergibt sich aus (47) c und d:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{F} = \frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\underline{\vartheta_1}}{\vartheta_1 - \underline{\vartheta_1}} \tag{49 b}$$

und

$$\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{N}_1} - \underline{\mathfrak{F}} = \frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\vartheta_1}{\underline{\vartheta_1} - \vartheta_1}. \tag{49 d}$$

Aus (49 a b) folgt:

$$\underline{\mathfrak{A} = \frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\underline{\vartheta_1}}{\vartheta_1 - \underline{\vartheta_1}} \cdot \frac{1 - \mathfrak{N}_2}{1 - \mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2}} \tag{50 a}$$

und

$$\underline{\underline{\mathfrak{A}} = \frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\vartheta_1}{\underline{\vartheta_1} - \vartheta_1} \cdot \frac{1 - \underline{\mathfrak{N}_2}}{1 - \underline{\mathfrak{N}_1}\,\underline{\mathfrak{N}_2}}} \tag{50 c}$$

$$\underline{\mathfrak{F} = \frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\underline{\vartheta_1}}{\vartheta_1 - \underline{\vartheta_1}} \cdot \frac{1 - \mathfrak{N}_1}{1 - \mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2}} \tag{50 b}$$

und

$$\underline{\underline{\mathfrak{F}} = \frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 - \underline{\vartheta_1}} \cdot \frac{1 - \underline{\mathfrak{N}_1}}{1 - \underline{\mathfrak{N}_1}\,\underline{\mathfrak{N}_2}}} \tag{50 d}$$

und schließlich bei sinngemäßer Zeichenvertauschung:

$$\underline{\mathfrak{B} = -\frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\underline{\vartheta_2}}{\vartheta_2 - \underline{\vartheta_2}} \cdot \frac{1 - \mathfrak{O}_2}{1 - \mathfrak{O}_1\,\mathfrak{O}_2}} \tag{50 e}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{B}} = -\frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\vartheta_2}{\underline{\vartheta_2} - \vartheta_2} \cdot \frac{1 - \underline{\mathfrak{O}_2}}{1 - \underline{\mathfrak{O}_1}\,\underline{\mathfrak{O}_2}}} \tag{50 g}$$

$$\underline{\mathfrak{G} = -\frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\underline{\vartheta_2}}{\vartheta_2 - \underline{\vartheta_2}} \cdot \frac{1 - \mathfrak{O}_1}{1 - \mathfrak{O}_1\,\mathfrak{O}_2}} \tag{50 f}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{G}} = -\frac{i_s}{Y_1 - Y_2} \cdot \frac{\vartheta_2}{\underline{\vartheta_2} - \vartheta_2} \cdot \frac{1 - \underline{\mathfrak{O}_1}}{1 - \underline{\mathfrak{O}_1}\,\underline{\mathfrak{O}_2}}} \tag{50 h}$$

Setzen wir für die Abkürzungen noch ihre Werte ein, so bekommen wir

$$\mathfrak{A} = -J \cdot (1 - j\,a_1)\,\frac{1 - \varepsilon^{(-\alpha_1 + j\,\omega_1)\frac{\varphi_1}{\mu}}}{1 - \varepsilon^{(-\alpha_1 + j\,\omega_1)\frac{2\pi}{\mu}}}, \tag{51 a}$$

$$\mathfrak{F} = +J \cdot (1 - j\,a_1)\,\frac{1 - \varepsilon^{(-\alpha_1 + j\,\omega_1)\frac{\varphi_1}{\mu}}}{1 - \varepsilon^{(-\alpha_1 + j\,\omega_1)\frac{2\pi}{\mu}}}, \tag{51 b}$$

$$\underline{\mathfrak{A}} = -J\cdot(1+j\,a_1)\frac{1-\varepsilon^{(-\alpha_1-j\,\omega_1)\frac{\varphi_1}{\pi}}}{1-\varepsilon^{(-\alpha_1-j\,\omega_1)\frac{2\pi}{\mu}}}, \tag{51 c}$$

$$\underline{\mathfrak{F}} = +J\cdot(1+j\,a_1)\frac{1-\varepsilon^{(-\alpha_1-j\,\omega_1)\frac{\varphi_1}{\mu}}}{1-\varepsilon^{(-\alpha_1-j\,\omega_1)\frac{2\pi}{\mu}}}, \tag{51 d}$$

$$\mathfrak{B} = +J\cdot(1-j\,a_2)\frac{1-\varepsilon^{(-\alpha_2+j\,\omega_2)\frac{\varphi_1}{\mu}}}{1-\varepsilon^{(-\alpha_2+j\,\omega_2)\frac{2\pi}{\mu}}}, \tag{51 e}$$

$$\mathfrak{G} = -J\cdot(1-j\,a_2)\frac{1-\varepsilon^{(-\alpha_2+j\,\omega_2)\frac{\varphi_1}{\mu}}}{1-\varepsilon^{(-\alpha_2+j\,\omega_2)\frac{2\pi}{\mu}}}, \tag{51 f}$$

$$\underline{\mathfrak{B}} = +J\cdot(1+j\,a_2)\frac{1-\varepsilon^{(-\alpha_2-j\,\omega_2)\frac{\varphi_1}{\mu}}}{1-\varepsilon^{(-\alpha_2-j\,\omega_2)\frac{2\pi}{}}}, \tag{51 g}$$

$$\mathfrak{G} = -J\cdot(1+j\,a_2)\frac{1-\varepsilon^{(-\alpha_2-j\,\omega_2)\frac{\varphi_1}{\mu}}}{1-\varepsilon^{(-\alpha_2-j\,\omega_2)\frac{2\pi}{\mu}}}, \tag{51 h}$$

mit

$$\frac{i_s}{2(Y_1-Y_2)} = J, \qquad \frac{\alpha_1}{\omega_1} = a_1 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_2}{\omega_2} = a_2.$$

Setzen wir diese 8 Werte in die allgemeine Lösung Gleichung (43) ein, so haben wir den Verlauf des Schwingungsstromes als Zusammensetzung aus gedämpften Wellenzügen dargestellt.

Diskussion der Lösungsgleichungen 51.

Der genaue Betrag der in der Schwingung enthaltenen Oberwellen jeder Frequenz wird im folgenden berechnet und das Ergebnis auf Seite 57 ff. besprochen. Der allgemeine Charakter der Schwingung läßt sich jedoch direkt aus den Formeln (51) ersehen, wenn man die Größen $\mathfrak{A}\ \underline{\mathfrak{A}}\ \mathfrak{B}\ \underline{\mathfrak{B}}\ \mathfrak{F}\ \underline{\mathfrak{F}}\ \mathfrak{G}\ \underline{\mathfrak{G}}$ in die Gleichungen (43) einsetzt, die hier nochmals zusammengestellt seien:

1. Anstoßperiode:

Gleichung (43 a, b) $i_1 = i_s + Y_1[\mathfrak{A}\,\varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{A}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta_1} t}] + Y_2[\mathfrak{B}\,\varepsilon^{\vartheta_2 t}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta_2} t}]$

$i_2 = \mathfrak{A}\,\varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{A}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta_1} t} + \mathfrak{B}\,\varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{B}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta_2} t}.$

2. Anstoßperiode:

Gleichung (43 c, d) $i_1 = Y_1[\mathfrak{F}\,\varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{F}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta_1} t}] + Y_2[\mathfrak{G}\,\varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{G}}\,\varepsilon^{\vartheta_2 t}]$

$i_2 = \mathfrak{F}\,\varepsilon^{\vartheta_1 t} + \underline{\mathfrak{F}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta_1} t} + \mathfrak{G}\,\varepsilon^{\vartheta_2 t} + \underline{\mathfrak{G}}\,\varepsilon^{\underline{\vartheta_2} t}.$

Die Deutung ist entsprechend der auf S. 48/49 vorgenommenen Diskussion der Formeln (30), die für den einfachen Sender gelten: Der Schwingungsstrom besteht aus dem — nur den Primärkreis durchfließenden — Anodenstrom und dem durch diesen angestoßenen freien Schwingungsstrom, der beim Zwischenkreissender 2 selbstständige Koppelfrequenzen enthält.

Wir machen ähnliche Voraussetzungen wie auf Seite 49: Schwache Dämpfung der Koppelfrequenzen und Anregung in einer Koppelfrequenz, also

$$a_1 \ll 1; \qquad a_2 \ll 1; \qquad \mu = \omega_1.$$

Zunächst betrachten wir die für die Grundschwingung in Betracht kommenden Größen $\mathfrak{A}\ \underline{\mathfrak{A}}\ \mathfrak{F}\ \underline{\mathfrak{F}}$.



Wegen $1 \pm j a_1 \approx 1$ und $1 - \varepsilon^{(-a_1 + j\omega_1)\frac{2\pi}{\mu}} = 1 - \varepsilon^{(-a_1 + j) 2\pi} = 1 - \varepsilon^{-2\pi a_1} \approx 2\pi a_1$ vereinfachen sich die Ausdrücke zu:

$$A \approx -\frac{J}{2\pi a_1}\left[1 - \varepsilon^{(-a_1 + j)\varphi_2}\right] \qquad F \approx +\frac{J}{2\pi a_1}\left[1 - \varepsilon^{(-a_1 + j)\varphi_1}\right]$$

$$\underline{A} \approx -\frac{J}{2\pi a_1}\left[1 - \varepsilon^{(-a_1 - j)\varphi_2}\right] \qquad \underline{F} \approx +\frac{J}{2\pi a_1}\left[1 - \varepsilon^{(-a_1 - j)\varphi_1}\right]$$

Sämtliche Ausdrücke enthalten im Zähler den Faktor $J = \frac{i_s}{2(Y_1 - Y_2)}$. Dieser ist zunächst proportional dem Emissionsstrom i_s. Weiter enthält er ein Nennerglied $Y_1 - Y_2$, das in Gestalt einer Resonanzkurve die Stromverteilung zwischen Primär- und Sekundärkreis bestimmt und, wie unten abgeleitet wird, stets ein echter Bruch, aber bei einigermaßen fester Kopplung nicht gegen 1 zu vernachlässigen ist. Als zweiter Zählerfaktor folgt ein Glied $1 - \varepsilon^{(\alpha_1 \pm j)\varphi}$. Dies drückt die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Anodenstromkurve aus. Für $\varphi = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ und ebenso für $\varphi_1 = 2\pi$, $\varphi_2 = 0$ wird der Anodenstrom zu einem reinen Gleichstrom der Stärke 0 bzw. i_s. Für die gleichen Werte erreicht die Zählerfunktion ein scharfes Minimum — die Schwingungen setzen aus. Den größten Wechselstromanteil erreicht der Anodenstrom bei $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$ (symmetrische Rechteckkurve). Die gleichen Werte machen die Zählerfunktion zu einem Maximum vom Betrag $1 + \varepsilon^{-a_1\pi} \sim 2$.

Im Nenner steht das kleine Glied $2\pi a_1$. Die Schwingungsamplitude ist also groß von der Ordnung $\frac{1}{a_1}$ gegen den Anodenstrom.

Die entsprechende Untersuchung führen wir für die Glieder $\mathfrak{B}$ $\underline{\mathfrak{B}}$ $\mathfrak{G}$ $\underline{\mathfrak{G}}$ durch. Nach Einführung der Kürzung $\eta \equiv \frac{\omega_2}{\omega_1}$ können wir mit gleicher Näherung wie oben setzen:

$$\mathfrak{B} \approx J\,\frac{1 - \varepsilon^{(-a_2 + j)\varphi_2\eta}}{1 - \varepsilon^{(-a_2 + j)2\pi\eta}} \qquad \mathfrak{G} \approx -J\,\frac{1 - \varepsilon^{(-a_2 + j)\varphi_1\eta}}{1 - \varepsilon^{(-a_2 + j)2\pi\eta}}$$

$$\underline{\mathfrak{B}} \approx J\,\frac{1 - \varepsilon^{(-a_2 - j)\varphi_2\eta}}{1 - \varepsilon^{(-a_2 - j)2\pi\eta}} \qquad \underline{\mathfrak{G}} \approx -J\,\frac{1 - \varepsilon^{(-a_2 - j)\varphi_1\eta}}{1 - \varepsilon^{(-a_2 - j)2\pi\eta}}.$$

Für den Zählerfaktor J gilt das bei der Grundschwingung Gesagte. Der zweite Zählerfaktor bringt wieder die Abhängigkeit der Schwingungsnebenwelle von der Nebenwelle des Anodenstroms zum Ausdruck.

Entscheidend für die Größenordnung der Amplitude wird der Nennerausdruck. Er erreicht ein scharfes Minimum, wenn η zu einer ganzen Zahl n wird. In diesem Falle ist sein Betrag $1 - \varepsilon^{-2\pi n a_2} \approx 2\pi n a_2$. Auch die 2. Koppelschwingung wächst in diesem „Resonanzfall" zu der Größenordnung $\frac{i_s}{a_2}$, wird also vergleichbar mit der Grundfrequenz. Je größer n, desto kleiner ist wegen des Faktors $\frac{1}{n}$ die angestoßene Oberwellenamplitude.

Für $\eta = n + 0{,}5$ erreicht der Nenner ein Maximum im Betrage von $1 - \varepsilon^{-2\pi n a_2} \approx 2$. Je weiter das Frequenzverhältnis η also von einer ganzen Zahl abweicht, desto mehr sinkt die 2. Koppelschwingung zur Größenordnung des Anodenstromes herab.

Die Gleichungen (51) sind infolge des den Winkel φ enthaltenden Zählergliedes abhängig von der gewählten Form des Anodenstromes. Verwandeln wir sie aber in eine harmonische Reihe und dividieren wir Glied für Glied die Harmonischen des Schwingungsstromes durch die entsprechenden des Anodenstromes, so erhalten



wir **allgemein gültige** Schwingungsmultiplikationen nach **Fourier**scher Methode. In diesem Sinne ist allgemein $P_{\mathrm{I}n}$ der Betrag, mit dem der Anodenstromteil der Frequenz $\varepsilon^{+jn\mu t}$, und $Q_{\mathrm{I}n}$ der Betrag, mit dem der Anodenstromteil der Frequenz $\varepsilon^{-jn\mu t}$ multipliziert werden muß, um den entsprechenden Anteil des Schwingungsstroms im Kreise $i_{(1,2)}$ zu erhalten.

Die Rechnung ergibt als strenge Lösung:

$$P_{\mathrm{I}n} = 1 + \frac{jn\mu}{2(Y_1 - Y_2)}\left[\left(\frac{1-ja_2}{\vartheta_1 - jn\mu} + \frac{1+ja_1}{\vartheta_1 - jn\mu}\right)Y_1 - \left(\frac{1-ja_2}{\vartheta_2 - jn\mu} + \frac{1+ja_2}{\vartheta_2 - jn\mu}\right)Y_2\right] \quad (57\,a)$$

$$Q_{\mathrm{I}n} = 1 - \frac{jn\mu}{2(Y_1 - Y_2)}\left[\left(\frac{1-ja_1}{\vartheta_1 + jn\mu} + \frac{1+ja_1}{\vartheta_2 + jn\mu}\right)Y_1 - \left(\frac{1-ja_1}{\vartheta_2 - jn\mu} + \frac{1+ja_2}{\vartheta_2 + jn\mu}\right)Y_2\right] \quad (57\,b)$$

$$P_{\mathrm{II}n} = \frac{jn\mu}{2(Y_1 - Y_2)}\left[\frac{1-ja_1}{\vartheta_1 - jn\mu} + \frac{1+ja_1}{\vartheta_1 - jn\mu} - \frac{1-ja_2}{\vartheta_2 - jn\mu} - \frac{1+ja_2}{\vartheta_2 - jn\mu}\right] \quad (57\,c)$$

$$Q_{\mathrm{II}n} = -\frac{jn\mu}{2(Y_1 - Y_2)}\left[\frac{1-ja_1}{\vartheta_1 + jn\mu} + \frac{1+ja_2}{\vartheta_1 + jn\mu} - \frac{1-ja_2}{\vartheta_2 + jn\mu} - \frac{1+ja_2}{\vartheta_2 + jn\mu}\right]. \quad (57\,d)$$

Diskussion der Lösungsgleichungen (57).

Wie unten gezeigt wird, haben Y_1 und Y_2 stets verschiedene Vorzeichen und eines von ihnen ist $> |1|$. Die in (57) und (58) vorkommenden Zahlenfaktoren sind stets echte Brüche, dürfen aber gegen 1 nicht vernachlässigt werden. Im allgemeinen werden die Nenner $\vartheta \pm jn\mu$ ebenso wie die Zähler die Größenordnung einer der Kreisfrequenzen haben, so daß die meisten Summanden der Multiplikatoren die Größenordnung 1 besitzen. Wesentlich größere Summanden, d. h. starke Schwingungen, können nur vorkommen, wenn einer der Nenner $\vartheta \pm jn\mu$ oder $\alpha \pm j\omega \pm jn\mu$ ungefähr auf die Größe α sinkt. Bedingung dafür ist Resonanz zwischen $n\mu$ und ω.

Wir setzen also im folgenden voraus, daß

1. $\mu \approx \omega_1$ (Erregung in Resonanz mit einer Koppelfrequenz)
2. $\alpha \ll \omega$ (schwache Dämpfung der Senderschwingungen).

Führen wir diese Bedingungen in Gleichung (57) ein, setzen wir für die ϑ ihre Werte (40) und beschränken wir uns dann noch auf **die** Summanden, deren Nenner wesentlich kleiner als ω werden kann, so erhalten wir:

$$P_{\mathrm{I}n} \approx \frac{jn\omega_1}{2(Y_1 - Y_2)}\left[\frac{Y_1}{-\alpha_1 + j\omega_1(1-n)} - \frac{Y_2}{-\alpha_2 + j(\omega_2 - \omega_1 n)}\right] \quad (60\,a)$$

$$Q_{\mathrm{I}n} \approx + \frac{jn\omega_1}{2(Y_1 - Y_2)}\left[\frac{Y_1}{+\alpha_1 + j\omega_1(1-n)} - \frac{Y_2}{+\alpha_1 + j(\omega_2 - n\omega_1)}\right]. \quad (60\,b)$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Multiplikatoren des Antennensekundärkreises zusammenziehen zu den Näherungswerten

$$P_{\mathrm{II}n} \approx + \frac{jn\omega_1}{2(Y_1 - Y_2)}\left[\frac{1}{-\alpha_1 + j\omega_1(1-n)} - \frac{1}{-\alpha_2 + j(\omega_2 - n\omega_1)}\right] \quad (61\,a)$$

und

$$Q_{\mathrm{II}n} \approx + \frac{jn\omega_1}{2(Y_1 - Y_2)}\left[\frac{1}{\alpha_1 + j\omega_1(1-n)} - \frac{1}{\alpha_2 + j(\omega_2 - n\omega_1)}\right]. \quad (61\,b)$$

Aus den Gleichungen (60), (61) ist nun der Schwingungscharakter ohne weiteres ersichtlich. Für die **Grundwelle** wird $(1-n) = 0$ und die Multiplikatoren nähern sich den Werten

$$P_{\mathrm{I}1} \approx \frac{j\omega_1}{2(Y_1 - Y_2)}\,\frac{Y_1}{-\alpha_1}; \qquad Q_{\mathrm{I}1} \approx \frac{j\omega_1}{2(Y_1 - Y_2)}\,\frac{Y_1}{+\alpha},$$

also

$$P_{I_1} = -Q_{I_1} = -\frac{j}{2\,a_1}\,\frac{Y_1}{Y_1 - Y_2} \tag{62 a}$$

für den Zwischenkreis, und

$$P_{II_1} = -Q_{II_1} = -\frac{j}{2\,a_1}\cdot\frac{1}{Y_1 - Y_2} \tag{62 b}$$

für den Antennenkreis.

Die Oberwellen bleiben im allgemeinen in der zu vernachlässigenden Größenordnung der entsprechenden Wellen des Anodenstroms. Eine gefährliche Stärke erreichen die Oberwellen nur für den „resonanzartigen" Sonderfall, daß ihre Frequenz $n\,\omega_1$ der 2. Kopplungsfrequenz ω_2 nahe kommt. Für diesen „Resonanzfall" lauten die Multiplikatoren

$$P_{In} \approx \frac{j\,n\,\omega_1}{2(Y_1 - Y_2)}\left(\frac{-Y_2}{-\alpha_2}\right) = \frac{j\,\omega_2}{2\,(Y_1 - Y_2)}\,\frac{Y_2}{\alpha_2},$$

$$Q_{In} \approx \frac{j\,n\,\omega_1}{2(Y_1 - Y_2)}\left(\frac{-Y_2}{+\alpha_2}\right).$$

also

$$\underset{\text{Resonanz}}{P_{In} = -Q_{In}} \approx \frac{j}{2\,a_2}\,\frac{Y_2}{Y_1 - Y_2}, \tag{63 a}$$

und entsprechend

$$\underset{\text{Resonanz}}{P_{IIn} = -Q_{IIn}} \approx +\frac{j}{2\,a_2}\,\frac{1}{Y_1 - Y_2}\left(= -P_{II_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}\right). \tag{63 b}$$

Wir sehen also, daß die Wellenfaktoren der nten Oberwelle und damit die Oberwelle selbst bis zur Größenordnung der Grundwelle anwachsen können, sobald sich die Koppelfrequenzen dem ganzzähligen Verhältnis n:1 nähern. Die physikalische Möglichkeit dieser resonanzartigen Erscheinung ist nachgewiesen durch Untersuchungen von Glage und Edler, (Lit-Verz. 5), deren Photogramme geradezu als Illustrationen zu den Formeln (62), (63) dienen können.

Die von Glage und Edler gemessenen Kondensatorspannungen stehen in einfacher Beziehung zu den hier berechneten Strömen.

Bei induktiver Kopplung der Einzelkreise ist $\bar{e}_1 = \frac{\bar{i}_1}{C_1\,\omega}$ und $\bar{e}_2 = \frac{\bar{i}_2}{C_2\,\omega}$.

Bei kapazitiver Kopplung, bei der sich die Kapazitäten der Einzelkreise gegenseitig beeinflussen, gilt

$$\bar{e}_1 = \bar{i}_1\,L_1\,\omega \quad \text{und} \quad \bar{e}_2 = \bar{i}_2\,L_2\,\omega.$$

Allerdings verzerren sich die Bilder dadurch, daß für die Grundwellenkomponente ω_1, für die Oberwelle ω_2 eingesetzt werden muß. Bei induktiver Kopplung werden die Oberwellen der Ströme, bei kapazitiver die der Spannungen stärker hervortreten.

Man kann sie sich übrigens mit einfachen Mitteln durch folgenden Versuch veranschaulichen:

Einem einkreisigen ungedämpft schwingenden Meßsender nähere man einen Wellenmesser mit einem empfindlichen Hitzdrahtamperemeter als Schwingungsanzeiger.

Nun kann man den Schwingungskreis des Meßsenders als Primärkreis, den Wellenmesser als sehr lose gekoppelten Sekundärkreis eines Zwischenkreissenders auffassen. Bei solch losen Kopplungen nähern sich bekanntlich die Koppelfrequenzen stark den Eigenfrequenzen der Einzelkreise. Man stimme nun zuerst den Wellenmesser auf die Senderfrequenz ab; das Amperemeter wird kräftig ausschlagen gemäß Formel (62 b).

Verstimmt man nun den Wellenmesser in der Richtung auf kürzere Wellen, so wird man deutlich Maxima erhalten, sobald die Frequenz des Wellenmessers

einem ganzen (bei symmetrischer Senderanregung **ungeraden**) Vielfachen der Senderfrequenz nahekommt.

Berechnung der Y-Werte.

Um mit Hilfe der Formeln (62), (63) die Schwingungswerte bei gegebenen Senderkonstanten quantitativ vorauszuberechnen, müssen wir über die Größe der Y_1, Y_2 unterrichtet sein. Wir haben ihren allgemeinen Wert in Gleichung (42a) schon den Arbeiten von Heegner & Pauli entnommen, doch sei er hier vor der numerischen Auswertung nochmals abgeleitet.

Beschränken wir uns von vornherein auf schwach gedämpfte Kreise, so gelten angenähert die Differentialgleichungen:

$$L_1 i_1'' + \frac{1}{C_1} i_1 + L_{12} i_2'' = 0 \qquad a$$

$$L_2 i_2'' + \frac{1}{C_2} i_2 + L_{12} i_1'' = 0 \qquad b$$

oder nach Division durch L_1 bzw. L_2:

$$i_1'' + \Omega_1^2 i_1 + \frac{L_{12}}{L_1} i_2'' = 0 \qquad c$$

$$i_2'' + \Omega_2^2 i_2 + \frac{L_{12}}{L_2} i_1'' = 0 \qquad d$$

Der Lösungsansatz lautet jetzt:

$$i_1 = Y i_2 = \mathfrak{A} \varepsilon^{j \omega t}.$$

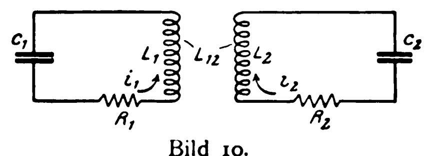


Bild 10.

Einsetzen in c ergibt:

$$\mathfrak{A} \varepsilon^{j \omega t} \left[Y(-\omega^2 + \Omega_1^2) + \frac{L_{12}}{L_1} \right] = 0$$

$$Y = -\frac{L_{12}}{L_1(-\omega^2 + \Omega_1^2)} \qquad e.$$

Einsetzen in d ergibt:

$$\mathfrak{A} \varepsilon^{j \omega t} \left[(-\omega^2 + \Omega_2^2) + \frac{L_{12}}{L_2} \cdot Y \right] = 0$$

$$Y = -\frac{L_2(-\omega^2 + \Omega_2^2)}{L_{12}} \qquad f.$$

Nach Multiplikation von Gleichung (e) und (f) folgt:

$$Y^2 = + \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{-\omega^2 + \Omega_2^2}{-\omega^2 + \Omega_1^2}$$

$$Y = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot \sqrt{\frac{\Omega_2^2 - \omega^2}{\Omega_1^2 - \omega^2}}$$

Bestimmen wir noch das Vorzeichen der Wurzel! Wir legen fest, daß sich der Index 1 stets auf die langsame, Index 2 auf die rasche Koppelschwingung bezieht. Nun entsteht bei induktiv gekoppelten Kreisen nach Bild 10 offenbar die langsame Schwingung dadurch, daß die Ströme der Einzelkreise die Induktionsspulen gleichsinnig durchfließen und so den wirksamen Spulenfluß vergrößern, während bei der raschen Schwingung der Spulenfluß durch Gegeneinanderfließen der Einzelströme verringert wird. Demgemäß ist Y_1 ein positiver, Y_2 ein negativer Faktor.

Beide Y enthalten das Glied $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$. Führen wir zu dessen Ausschaltung ein „reduziertes" Amplitudenverhältnis

$$Z = Y \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \tag{67 a}$$

ein und benutzen die Abkürzungen

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = x, \tag{67 b}$$

$$\frac{\omega_1}{\Omega_1} = Q_1, \tag{67 c}$$

$$\frac{\omega_2}{\Omega_1} = Q_2, \tag{67 d}$$

so erhalten wir für Z die Werte

$$Z_1 = + \sqrt{\frac{x^2 - Q_1^2}{1 - Q_1^2}} \tag{68 a}$$

$$Z_2 = - \sqrt{\frac{Q_2^2 - x^2}{Q_2^2 - 1}}. \tag{68 b}$$

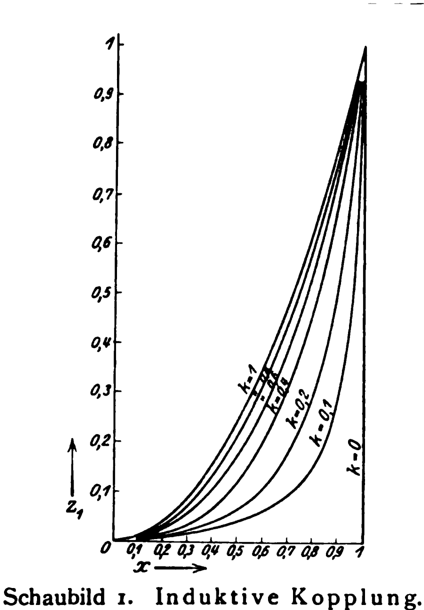


Schaubild 1. Induktive Kopplung. Z_1 in Abhängigkeit von x und k für das Gebiet $x < 1$. $\left(\text{Bei } x > 1 \text{ gilt } Z_{1(x)} = \frac{1}{Z_{1\left(\frac{1}{x}\right)}}.\right)$

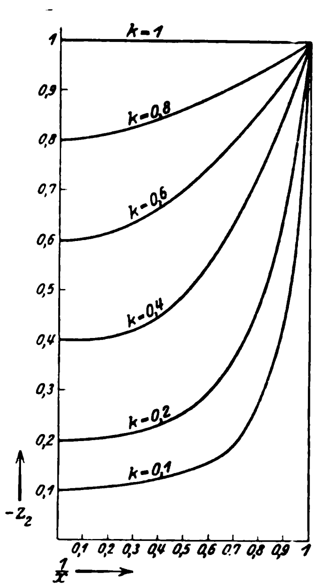


Schaubild 2. Induktive Kopplung. $- Z_1$ in Abhängigkeit von $\frac{1}{x}$ und k für das Gebiet $x > 1$. $\left(\text{Bei } x > 1 \text{ gilt } Z_{2(x)} = \frac{1}{Z_{2\left(\frac{1}{x}\right)}}.\right)$

Nach den Ableitungen von S. 26 vorstehender Arbeit ist nun:

$$Q^2 = \frac{1 + x^2}{2\sigma}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right] = \frac{1}{2(1 - k^2)}\left[1 + x^2 \mp \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4k^2x^2}\right].$$

Setzen wir diesen Wert in die Formeln (68) ein, so erhalten wir

$$Z = \pm \sqrt{\frac{x^2 - \frac{1}{2(1 - k^2)}\left[1 + x^2 \mp \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4k^2x^2}\right]}{1 - \frac{1}{2(1 - k^2)}\left[1 + x^2 \mp \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4k^2x^2}\right]}}. \tag{69 a, b}$$

Die Formeln (69) enthalten nur 2 Variable: das Frequenzverhältnis x und die Kopplung k.

In Abhängigkeit von diesen 2 Größen sind in untenstehender Tabelle 1 die Größen Z_1, Z_2 und $\frac{1}{Z_1 - Z_2}$ ausgerechnet und in Schaubild 1 bis 3 aufgezeichnet.

Rechen- und Zeichenarbeit werden vermindert durch folgende Überlegung. Z_1 sei bekannt für ein bestimmtes $x = x_1$. Wir fragen nach dem Z_1 für $x_2 = \frac{1}{x_1}$. Nun steht es uns frei, in den gleichberechtigten Einzelkreisen die Indexziffer 1 und 2 zu vertauschen. Hierbei bleiben natürlich die Koppelfrequenzen unverändert; das Frequenzverhältnis $x = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ dagegen nimmt den reziproken Wert an. Nehmen wir diese Vertauschung an der Definitionsgleichung

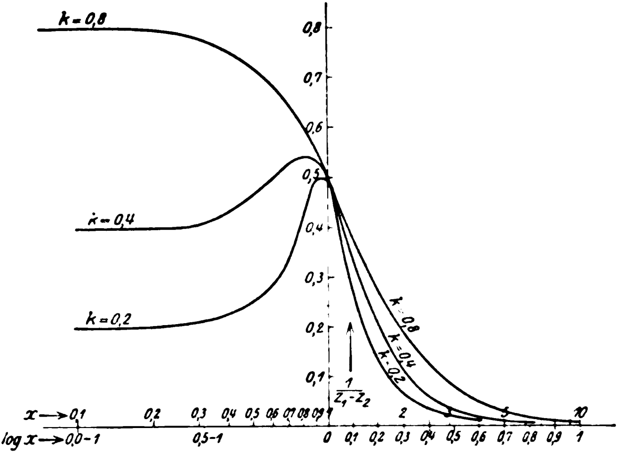


Schaubild 3. Induktive Kopplung. $\frac{1}{Z_1 - Z_2}$ in Abhängigkeit von log x und k.

$$Z_{1\,(x_1)} = \sqrt{\frac{\Omega_2^2 - \omega_1^2}{\Omega_1^2 - \omega_1^2}}$$

vor. Wir erhalten sofort:

$$Z_{1\,\left(\frac{1}{x_1}\right)} = \sqrt{\frac{\Omega_1^2 - \omega_1^2}{\Omega_2^2 - \omega_1^2}} = \frac{1}{Z_{1\,(x_1)}}.$$

Dieselbe Überlegung trifft für Z_2 zu. Es gilt also der Satz: Zu reziproken Frequenzverhältnissen gehören auch reziproke Amplitudenverhältnisse.

Tabelle 1. Z-Werte für induktive Kopplung.

x	$\log^{10}$ x	k = 1			k = 0,8			k = 0,6		
		Z_1	$-Z_2$	$+\frac{1}{Z_1 - Z_2}$	Z_1	$-Z_2$	$\frac{1}{Z_1 - Z_2}$	Z_1	$-Z_2$	$\frac{1}{Z_1 - Z_2}$
0,10 [1]	0,000 — 1	0,01	1	0,99	0,01	1,24	0,80	0,01	1,65	0,60
0,30	0,477 — 1	0,09	1	0,92	0,07	1,21	0,78	0,06	1,57	0,60
0,50	0,699 — 1	0,25	1	0,80	0,22	1,15	0,72	0,18	1,42	0,63
0,70	0,845 — 1	0,49	1	0,67	0,45	1,09	0,65	0,40	1,24	0,61
0,90	0,954 — 1	0,81	1	0,55	0,79	1,03	0,55	0,75	1,07	0,55
1,00	0	1,00	1	0,50	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	0,50
1,11	0,046	1,24	1	0,45	1,26	0,97	0,45	1,32	0,93	0,44
1,43	0,155	2,07	1	0,33	2,25	0,92	0,32	2,52	0,81	0,30
2,00	0,301	3,97	1	0,20	4,44	0,87	0,19	5,62	0,70	0,16
3,33	0,523	11,1	1	0,08	14,10	0,83	0,07	16,7	0,64	0,06
10,00 [1]	1,000	101	1	0,01	124	0,80	0,01	140	0,61	0,01

[1]) Die extremen Werte für x = 0,1 und x = 10 sind unzuverlässig, weil außerhalb der Rechenschiebergenauigkeit.

x	k = 0,4			k = 0,2			k = 0,1		
	Z_1	$-Z_2$	$\frac{1}{Z_1 - Z_2}$	Z_1	$-Z_2$	$\frac{1}{Z_1 - Z_2}$	Z_1	$-Z_2$	$\frac{1}{Z_1 - Z_2}$
0,10 [1])	0,01	2,48	0,40	0,01	4,96	0,20	0,005	9,90	0,10
0,30	0,03	2,42	0,41	0,02	4,78	0,21	0,01	9,14	0,11
0,50	0,12	2,00	0,47	0,06	3,81	0,26	0,04	7,17	0,14
0,70	0,31	1,58	0,53	0,19	2,72	0,34	0,09	5,58	0,18
0,90	0,69	1,17	0,54	0,54	1,49	0,49	0,35	2,25	0,38
1,00	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	0,50
1,11	1,44	0,86	0,43	1,85	0,67	0,40	2,84	0,45	0,35
1,43	3,23	0,63	0,26	5,25	0,37	0,18	11,1	0,18	0,09
2,00	8,45	0,50	0,11	15,90	0,26	0,06	25	0,14	0,04
3,33	31,20	0,41	0,03	45	0,21	0,02	70	0,11	0,01
10,00 [1])	160,0	0,40	0,01	180	0,20	0,01	210	0,10	0,00

Übertragung der obigen Ableitungen auf kapazitiv gekoppelte Sender.

Bei allen bisherigen Rechnungen war vorausgesetzt, daß die Einzelkreise nach Bild 10 induktiv gekoppelt sind.

Der Lösungsansatz des Verfahrens II:

$$i = \mathfrak{A}\,\varepsilon^{\vartheta_1 t} + \mathfrak{B}\,\varepsilon^{\vartheta_2 t}$$

macht aber von dieser Voraussetzung keinen Gebrauch. Unsere sämtlichen Ergebnisse lassen sich also ohne weiteres auf einen kapazitiv gekoppelten Sender nach Bild 11 anwenden. Nur werden hier die Y bzw. Z andere Werte annehmen.

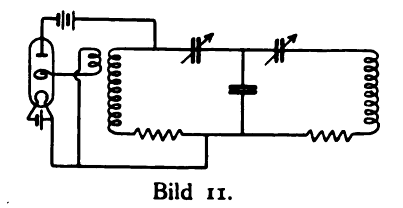


Bild 11.

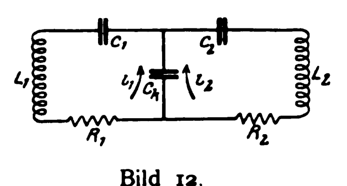


Bild 12.

Ausrechnung der Y- bzw. Z-Werte für kapazitiv gekoppelte Kreise.

Für ein System nach Bild 12 gelten bei vernachlässigter Dämpfung die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 i_1'' + \frac{1}{C_1} i_1 + \frac{1}{C_k} i_2 &= 0, & a\\ L_2 i_2'' + \frac{1}{C_2} i_2 + \frac{1}{C_k} i_1 &= 0. & b\\ i_1'' + \Omega_1^2 i_1 + \frac{1}{L_1 C_k} i_2 &= 0, & c\\ i_2'' + \Omega_2^2 i_2 + \frac{1}{L_2 C_k} i_1 &= 0. & d \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Lösungsansatz:

$$i_1 = Y\, i_2 = \mathfrak{A}\,\varepsilon^{j\omega t}.$$

Einsetzen in c:

$$\mathfrak{A}\,\varepsilon^{j\omega t}\left[Y(-\omega^2 + \Omega_1^2) + \frac{1}{L_1 C_k}\right] = 0,$$

[1]) Die extremen Werte für x = 0,1 und x = 10 sind unzuverlässig, weil außerhalb der Rechenschiebergenauigkeit.

$$Y = -\frac{1}{L_1 C_k(-\omega^2 + \Omega_1^2)} \qquad e.$$

Einsetzen in d:

$$\mathfrak{A}\,\varepsilon^{j\omega t}\left[(-\omega^2 + \Omega_2^2) + \frac{Y}{L_2 C_k}\right] = 0.$$

$$Y = -L_2(C_k - \omega^2 + \Omega_2^2) \qquad f.$$

Multiplikation von e und f:

$$Y^2 = \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{-\omega^2 + \Omega_2^2}{-\omega^2 + \Omega_1^2},$$

$$Y = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot \sqrt{\frac{\Omega_2^2 - \omega^2}{\Omega_1^2 - \omega^2}}. \tag{71}$$

Führen wir wieder die Bezeichnungen ein:

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = x,$$

$$\frac{\omega_1}{\Omega_1} = Q_1, \qquad \text{und} \qquad Z = Y\sqrt{\frac{L_1}{L_2}},$$

$$\frac{\omega_2}{\Omega_1} = Q_2.$$

so wird

$$Z = \sqrt{\frac{x^2 - Q_{1,2}^2}{1 - Q_{1,2}^2}}. \tag{72}$$

Bei kapazitiven Kreisen entsteht die langsame Schwingung dadurch, daß sich die Ströme der Einzelkreise im Kopplungskondensator entgegenfließen und dadurch dessen Aufladung verzögern.

Wir müssen also setzen:

$$Z_1 = -\sqrt{\frac{x^2 - Q_1^2}{1 - Q_1^2}}, \tag{73a}$$

$$Z_2 = +\sqrt{\frac{Q_2^2 - x^2}{Q_2^2 - 1}}. \tag{73b}$$

Die Form der Ausdrücke für Y und Z ist bei kapazitiver Kopplung dieselbe wie bei induktiver. Die Zahlenwerte werden andere, weil Q_1 und Q_2 sich nach einem anderen Gesetz aus x und k zusammensetzen. Es ist

$$Q_1^2 = \frac{1}{2}\left[1 + x^2 - \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4x^2k^2}\right],$$

$$Q_2^2 = \frac{1}{2}\left[1 + x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4x^2k^2}\right].$$

Damit wird

$$Z_1 = -\sqrt{\frac{1 - x^2 - \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4k^2x^2}}{-1 + x^2 - \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4k^2x^2}}}, \tag{74a}$$

$$Z_2 = +\sqrt{\frac{1 - x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4k^2x^2}}{-1 + x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^2 + 4k^2x^2}}}. \tag{74b}$$

Wie bei induktiver Kopplung gilt $Z_{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{Z_{(x)}}$. Aus den Gleichungen (74) folgt noch die Gültigkeit einer 2. Vereinfachung, nämlich

$$Z_{2\,(x)} = -\frac{1}{Z_{1\,(x)}}. \tag{75}$$

In Worten: Für gleiche x-Werte sind die Amplitudenverhältnisse der beiden Koppelschwingungen einander negativ reziprok.

Tabelle 2. Z-Werte für kapazitive Kopplung.

x	$\log^{10} x$	k = 1			k = 0,8			k = 0,6		
		$-Z_1$	$+Z_2$	$-\frac{1}{Z_1 - Z_2}$	$-Z_1$	$+Z_2$	$-\frac{1}{Z_1 - Z_2}$	$-Z_1$	$+Z_2$	$-\frac{1}{Z_1 - Z_2}$
0,10	0,00 — 1	0,10	10,00	0,10	0,08	12,50	0,08	0,07	16,50	0,06
0,30	0,477 — 1	0,30	3,33	0,27	0,25	4,09	0,23	0,19	5,20	0,19
0,50	0,699 — 1	0,50	2,00	0,40	0,44	2,32	0,36	0,35	2,85	0,31
0,70	0,845 — 1	0,70	1,43	0,47	0,65	1,55	0,45	0,51	1,78	0,44
0,90	0,954 — 1	0,90	1,11	0,50	0,88	1,14	0,50	0,83	1,19	0,49
1,00	0,00	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	0,50
1,11	0,046	1,11	0,90	0,50	1,14	0,88	0,50	1,19	0,83	0,49
1,43	0,155	1,43	0,70	0,47	1,55	0,65	0,45	1,78	0,51	0,44
2,00	0,301	2,00	0,50	0,40	2,32	0,44	0,36	2,85	0,35	0,31
3,33	0,523	3,33	0,30	0,27	4,09	0,25	0,23	5,20	0,19	0,19
10,00	1,000	10,00	0,10	0,10	12,50	0,08	0,08	16,50	0,07	0,06

x	k = 0,4			k = 0,2			k = 0,1		
	$-Z_1$	$+Z_2$	$-\frac{1}{Z_1 - Z_2}$	$-Z_1$	$+Z_2$	$-\frac{1}{Z_1 - Z_2}$	$-Z_1$	$+Z_2$	$-\frac{1}{Z_1 - Z_2}$
0,10	0,04	24,80	0,05	0,02	49,60	0,02	0,01	99,00	0,01
0,30	0,13	7,65	0,13	0,07	15,50	0,06	0,03	30,40	0,03
0,50	0,25	4,01	0,23	0,13	7,63	0,13	0,07	15,07	0,07
0,70	0,45	2,27	0,37	0,25	3,88	0,24	0,13	7,38	0,13
0,90	0,77	1,29	0,48	0,61	1,66	0,44	0,40	2,51	0,34
1,00	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	0,50
1,11	1,29	0,77	0,48	1,66	0,61	0,44	2,51	0,40	0,34
1,43	2,27	0,45	0,37	3,88	0,25	0,24	7,38	0,13	0,13
2,00	4,01	0,25	0,23	7,63	0,13	0,13	15,07	0,07	0,07
3,33	7,65	0,13	0,13	15,50	0,07	0,06	30,40	0,03	0,03
10,00	24,80	0,04	0,05	49,60	0,02	0,02	99,00	0,01	0,01

Während also in Tabelle 1 in Abhängigkeit von x und k die Werte von Z, Z_2 und $\frac{1}{Z_1 - Z_2}$ berechnet sind, genügt hier zur Veranschaulichung der Z-Werte die Aufzeichnung von Z_1 in Schaubild 4. Schaubild 5 gibt den Verlauf der $\frac{1}{Z_1 - Z_2}$-Werte in Abhängigkeit von log x.

Da $Y = Z\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$, ist $\frac{1}{Y_1 - Y_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{1}{Z_1 - Z_2}$. Die Werte $\frac{1}{Z_1 - Z_2}$ sind also direkt proportional den Gleichungen (62b), (63b) gewonnenen Multiplikatoren des

Antennenstroms und damit diesem selbst. Aus den Schaubildern 3 und 5 sehen wir, daß im Resonanzfall $x = 1$ der Ausdruck $\frac{1}{Z_1 - Z_2}$ unabhängig von k den Wert 0,5 annimmt, bei steigender Verstimmung $x > 1$ aber um so rascher abfällt, je loser die Kopplung ist. Bedenken wir noch, daß wir, um den Resonanzfall $\frac{\omega_2}{\omega_1} = n\,(n = 2, 3, \ldots)$ zu erreichen, die Einzelkreise um so stärker nach wachsendem X hin verstimmen müssen, je loser wir koppeln! Wir erkennen daraus, daß wir den Resonanzfall mit einigermaßen beträchtlichen Antennenströmen, also genügendem Wirkungsgrade des Zwischenkreises, **nur bei sehr fester Kopplung** werden darstellen können.

Schaubild 4.
Kapazitive Kopplung.
$Z_1 = -\frac{1}{Z_2}$ in Abhängigkeit von x und k für das Gebiet $x < 1$.
(Für $x > 1$ gilt: $Z_{(x)} = -\frac{1}{Z_{\left(\frac{1}{x}\right)}}$.)

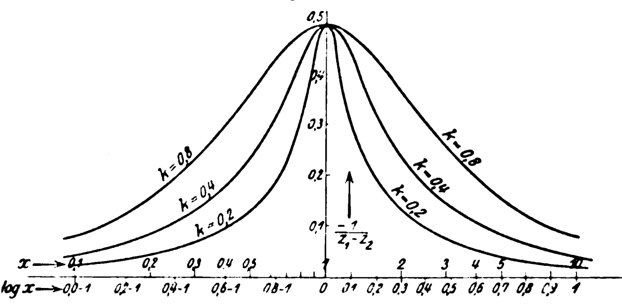


Schaubild 5. Kapazitive Kopplung.
$-\frac{1}{Z_1 - Z_2}$ in Abhängigkeit von log x und k.

Zahlenbeispiele.

Die bisherigen Entwicklungen mögen durch zahlenmäßige Lösung bestimmter Aufgaben veranschaulicht werden:

Wir rechnen einige Beispiele durch, die so gewählt sind, daß „Resonanz" zwischen langsamer und rascher Koppelschwingung auftritt.

Bei sämtlichen Beispielen mußten daher ungewöhnlich feste Kopplungen vorausgesetzt werden.

Die Einzelkreise seien induktiv gekoppelt, die Anregungskurve bestehe aus Sinushalbbögen, siehe Schaubild 10.

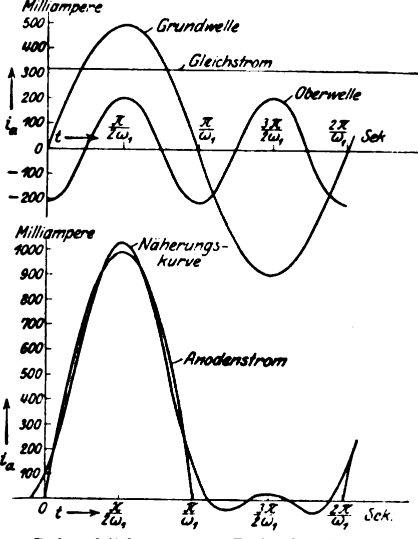


Schaubild 10 zum Beispiel S. 65.
Annänerung des Anodenstroms durch die Gleichstromkomponente und die zwei ersten Harmonischen.

1. Zahlenbeispiel:

Es sei: $i_s = 0,1$ Ampere	$L_{12} = 73\,500\,\text{cm} = 0,735 \cdot 10^{-4}$ Hy
$L_1 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ Hy	$L_2 = 10^5\,\text{cm} = 10^{-4}$ Hy
$C_1 = 1040\,\text{cm} = 11,56 \cdot 10^{-10}$ Fd	$C_2 = 1560\,\text{cm} = 17,38 \cdot 10^{-10}$ Fd
$R_1 = 6\,\Omega$	$R_2 = 20$ Ohm

Zuerst berechnen wir die Schwingungsgrößen der Einzelkreise.

Es ist: $\Omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{10^4 \cdot 10^{10}}{1,5 \cdot 11,56} = 5,78 \cdot 10^{12}$

$\Omega_1 = 2,4 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$

$\lambda_1 = \frac{R_1}{2 L_1} = \frac{6}{3 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$

$l_1 = \frac{\lambda_1}{\Omega_1} = 8,33 \cdot 10^{-3}$

$\Omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} = 5,78 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-2}$

$\Omega_1 = 2,4 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$

$\lambda_2 = \frac{R_2}{2 L_2} \; 10^5 \text{ sec}^{-1}$

$l_2 = 4,17 \cdot 10^{-2}$

Die Kopplung beträgt $k = \sqrt{\frac{L_{12}^2}{L_1 \cdot L_2}} = \sqrt{\frac{0,735^2 \cdot 10^{-8}}{1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4}}} = 0,6.$

Die Streuung: $\sigma = 1 - k^2 = 0,64.$

Das Frequenzverhältnis $x = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 1.$

Jetzt sind wir in der Lage, die Koppelfrequenzen und Koppeldämpfungen auszurechnen. Es wird

$$\omega^2 = \Omega_1^2 \cdot \frac{1 + x^2}{2\sigma} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}} \right]$$

$$= 5,78 \cdot 10^{12} \cdot \frac{1 + 1}{2 \cdot 0,64} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 0,64 \cdot 1}{(1 + 1)^2}} \right]$$

$$= 5,78 \cdot 10^{12} \cdot \frac{1}{0,64} (1 \mp 0,6)$$

$\omega_1^2 = 8,9 \cdot 10^{12} \cdot 0,4$

$\omega_1^2 = 3,55 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-2}$

$\omega_1 = 1,885 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$

$\omega_2^2 = 8,9 \cdot 10^{12} \cdot 1,6$

$\omega_2^2 = 14,2 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-2}$

$\omega_2 = 3,77 \cdot 10^6 = 2\,\omega_1$

Wir haben also bei der sehr engen Kopplung $k = 0,6$ trotz Resonanz der Einzelkreise ($x = 1$) unter den Koppelfrequenzen das ganzzahlige Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2.$

Die Koppeldämpfungen betragen nach Rogowski [Gleichung (12), S. 38]:

$\alpha_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$

$$u_1 = \frac{1}{2\sigma} \left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1 + x^2}}{w} \right]$$

$$u_2 = \frac{1}{2\sigma} \left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma}{1 + x^2}}{w} \right]$$

$\alpha_2 = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$

$$U_1 = \frac{1}{2\sigma} \left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1 + x^2}}{w} \right]$$

$$U_2 = \frac{1}{2\sigma} \left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma}{1 + x^2}}{w} \right]$$

mit

$$w = \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}.$$

In unserem Fall wird wegen $x = 1$, $\sigma = 0,64$:

$u_1 = u_2 = 0,3125$, demnach:

$\alpha_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 0,3125$

$\quad = (2 \cdot 10^4 + 10^5) \cdot 0,3125 \text{ sec}^{-1}$

$\alpha_1 = 3,75 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$

$a_1 = \frac{\alpha_1}{\omega_1} = \frac{3,75 \cdot 10^4}{1,885 \cdot 10^6}$

$a_1 = 2 \cdot 10^{-2}$

$U_1 = U_2 = 1,25$, demnach:

$\alpha_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 1,25$

$\quad = (2 \cdot 10^4 + 10^5) \cdot 1,25$

$\alpha_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$

$a_2 = \frac{\alpha_2}{\omega_2} = \frac{1,5 \cdot 10^5}{3,77 \cdot 10^6}$

$a_2 = 4 \cdot 10^{-2}$

Aus den Diagrammen 1 und 2 entnehmen wir für $k = 0{,}6$, $x = 1$:

$Z_1 = -Z_2 = 1$. Nach Definitions-Gleichung (67 a) is $Y_n = Z_n \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$.

$$Y_1 = 1 \sqrt{\frac{1{,}0 \cdot 10^{-4}}{1{,}5 \cdot 10^{-4}}} = 0{,}817 \qquad Y_2 = -0{,}817$$

und damit:

$$\frac{Y_1}{Y_1 - Y_2} = +0{,}5 \qquad \frac{1}{Y_1 - Y_2} = 0{,}613$$

$$\frac{Y_2}{Y_1 - Y_2} = -0{,}5$$

Jetzt können wir die Muliplikatoren der einzelnen Frequenzen anschreiben: Für die Grundwelle wird nach Gleichung (62)

$$P_{I\,0} = 1 \qquad P_{II\,0} = 0$$

$$P_{I\,1} = -Q_{I\,1} = -\frac{j}{2\,a_1} \cdot \frac{Y_1}{Y_1 - Y_2} = -\frac{j \cdot 0{,}5}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}$$

$$P_{I\,1} = -Q_{I\,1} = -j \cdot 12{,}5$$

$$P_{II\,1} = -Q_{II\,1} = -\frac{j}{2\,a_1} \cdot \frac{1}{Y_1 - Y_2} = -\frac{j \cdot 0{,}613}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}$$

$$P_{II\,1} = -Q_{II\,1} = -j \cdot 15{,}3$$

Für die resonierende Oberwelle wird nach Gleichung (63):

$$P_{I\,2} = -Q_{I\,2} = +\frac{j}{2\,a_2} \cdot \frac{Y_2}{Y_1 - Y_2} = \frac{j}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \cdot -0{,}5$$

$$P_{I\,2} = -Q_{I\,2} = -j \cdot 6{,}25$$

$$P_{II\,2} = -Q_{II\,2} = \frac{j}{2\,a_2} \cdot \frac{1}{Y_1 - Y_2} = \frac{j}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \cdot 0{,}613$$

$$P_{II\,2} = -Q_{II\,2} = +j \cdot 7{,}66$$

Zur Bestimmung der Schwingungsströme fehlt noch die harmonische Analyse des Anodenstroms.

Nach Schaubild 10 ist der Anodenstrom darstellbar durch die Funktion:

$$i_{a\left(t = 0 \text{ bis } \frac{\pi}{\omega}\right)} = i_0 \sin \omega_1 t = \frac{i_s}{2\,j} \left[\varepsilon^{j \omega_1 t} - \varepsilon^{-j \omega_1 t}\right]$$

$$i_{a\left(t = \frac{\pi}{\omega_1} \text{ bis } \frac{2\pi}{\omega_1}\right)} = 0.$$

Daraus folgt:

$$a_0 = \frac{\omega_1}{2\,\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\varepsilon^{j \omega_1 t} - \varepsilon^{-j \omega_1 t})\, dt \cdot \frac{i_s}{2\,j} = \frac{i_s}{\pi} = \frac{0{,}1}{\pi}$$

$$a_0 = 31{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ Amp. (Gleichstrom)}$$

$$a_1 = \frac{\omega_1}{2\,\pi} \cdot \frac{i_s}{2\,j} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\varepsilon^{j \omega_1 t} - \varepsilon^{-j \omega_1 t})\, \varepsilon^{-j \omega_1 t}\, dt = \frac{\omega_1'}{2\,\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1 - \varepsilon^{-2 j \omega t})\, dt \cdot \frac{i_s}{2\,j}$$

$$a_1 = -b_1 = -j \cdot \frac{i_s}{4} = -j \cdot \frac{0{,}1}{4}$$

$$a_1 = -b_1 = -j \cdot 25 \cdot 10^{-3} \text{ Amp. (Grundwelle)}$$

$$a_n = \frac{\omega}{2\,\pi} \cdot \frac{i_s}{2\,j} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\varepsilon^{j \omega t} - \varepsilon^{-j \omega t})\, \varepsilon^{-j n \omega t}\, dt$$

Für ungerade n wird $a_n = + b_n = 0$.

Für gerade n wird $a_n = + b_n = \frac{- i_s}{\pi (n^2 - 1)}$, also für $n = 2$:

$$a_2 = b_2 = - \frac{i_s}{3 \pi} = - 10,6 \cdot 10^{-3} \text{ Amp. (resonierende Oberwelle).}$$

Um außer den Strömen auch die Spannungen der einzelnen Frequenzen angeben zu können, müssen wir die Widerstände berechnen. Wir gehen dabei auf die kapazitiven Zweige zurück, da die Induktivität durch die Gegeninduktion des Nachbarstroms beeinflußt wird.

Es ist für die Grundwelle:

$$r_{I\,1} = \frac{1}{j C_1 \omega_1} = \frac{1}{j \cdot 11,56 \cdot 10^{-10} \cdot 1,885 \cdot 10^6} = - j \cdot 458 \text{ Ohm}$$

$$r_{II\,1} = \frac{1}{j C_2 \omega_1} = \frac{1}{j \cdot 17,38 \cdot 10^{-10} \cdot 1,885 \cdot 10^6} = - j \cdot 305 \text{ Ohm}$$

Für die Oberwelle:

$$r_{I\,2} = \frac{1}{j C_1 \omega_2} = \frac{1}{j \cdot 11,56 \cdot 10^{-10} \cdot 3,77 \cdot 10^6} = - j \cdot 229 \text{ Ohm}$$

$$r_{II\,2} = \frac{1}{j C_2 \omega_2} = \frac{1}{j \cdot 17,38 \cdot 10^{-10} \cdot 3,77 \cdot 10^6} = - j \cdot 152,5 \text{ Ohm}$$

Nun haben wir alle nötigen Daten und können die Ergebnisse tabellarisch auftragen.

Tabelle 3.

		Anodenkreis	Primärkreis	Sekundärkreis
		Milliampere	Milliampere	Milliampere
Ströme	Gleichstrom	31,8	31,8	0
	Grundwelle kompl.	$-25 j (\varepsilon^{j \omega_1 t} - \varepsilon^{-j \omega_1 t})$	$-312,5 (\varepsilon^{j \omega_1 t} + \varepsilon^{-j \omega_1 t})$	$-383 (\varepsilon^{j \omega_1 t} + \varepsilon^{-j \omega_1 t})$
	Grundwelle reell	$-50 \cdot \sin \omega_1 t$	$-625 \cos \omega_1 t$	$-766 \cos \omega_2 t$
	Oberwelle kompl.	$-10,6 \cdot (\varepsilon^{j \omega_2 t} + \varepsilon^{-j \omega_2 t})$	$-66,2 j (\varepsilon^{j \omega_2 t} - \varepsilon^{-j \omega_2 t})$	$+81,2 j (\varepsilon^{j \omega_2 t} - \varepsilon^{-j \omega_2 t})$
	Oberwelle reell	$-21,2 \cos \omega_2 t$	$+132,4 \sin \omega_2 t$	$-162,5 \sin \omega_2 t$
		Volt	Volt	Volt
Spannung	Gleichspannung	$190,8 \cdot 10^{-3}$	$190,8 \cdot 10^{-3}$	0
	Grundwelle kompl.	$j \cdot 143 (\varepsilon^{j \omega_1 t} - \varepsilon^{-j \omega_1 t})$	$j \cdot 143 (\varepsilon^{j \omega_1 t} - \varepsilon^{-j \omega_1 t})$	$j \cdot 116,6 (\varepsilon^{j \omega_1 t} - \varepsilon^{-j \omega_1 t})$
	Grundwelle reell	$-286 \sin \omega_1 t$	$-286 \sin \omega_1 t$	$-233,2 \sin \omega_1 t$
	Oberwelle kompl.	$-15,2 (\varepsilon^{j \omega_2 t} + \varepsilon^{-j \omega_2 t})$	$-15,2 (\varepsilon^{j \omega_2 t} + \varepsilon^{-j \omega_2 t})$	$+12,4 (\varepsilon^{j \omega_2 t} + \varepsilon^{-j \omega_2 t})$
	Oberwelle reell	$-30,4 \cos \omega_2 t = \frac{\hat{e}\, \hat{i}}{2}$	$-30,4 \cos \omega_2 t = \frac{\hat{i}^2 R}{2}$	$+24,8 \cos \omega_2 t = \frac{\hat{i}^2 R}{2}$
Leistung	Grundwelle	7,15 Watt	1,2 Watt	5,9 Watt
	Oberwelle	0,32 Watt	0,053 Watt	0,265 Watt

Betrachten wir die Werte der Tabelle 3, so sehen wir, daß im Antennenkreis die Oberwelle



an Stromstärke $\frac{162,5}{766} = 21,3\,\%$,

an Spannung $\frac{24,8}{233,2} = 10,7\,\%$,

an Leistung $\frac{0,265}{5,9} = 4,5\,\%$

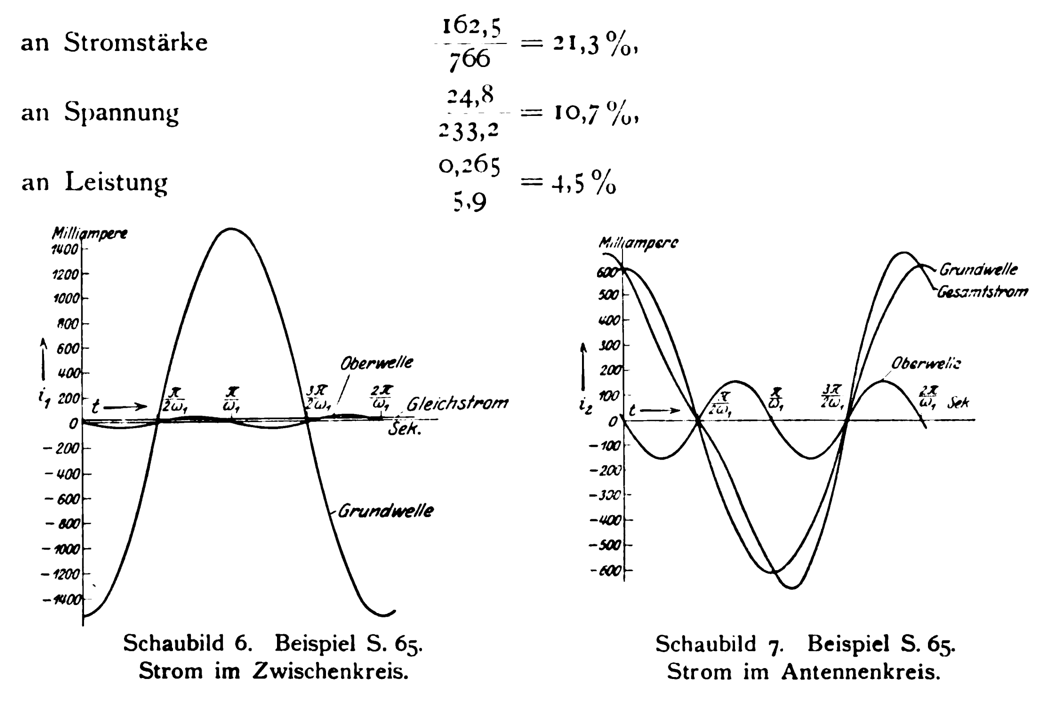


Schaubild 6. Beispiel S. 65.
Strom im Zwischenkreis.

Schaubild 7. Beispiel S. 65.
Strom im Antennenkreis.

der Grundwelle erreicht bei einer Übertragung von $\frac{5,9}{7,15} = 82,5\,\%$ der gesamten Schwingleistung auf den Antennenkreis. Der betrachtete Sender würde also für die Praxis wegen der zu starken Oberschwingungen unbrauchbar sein.

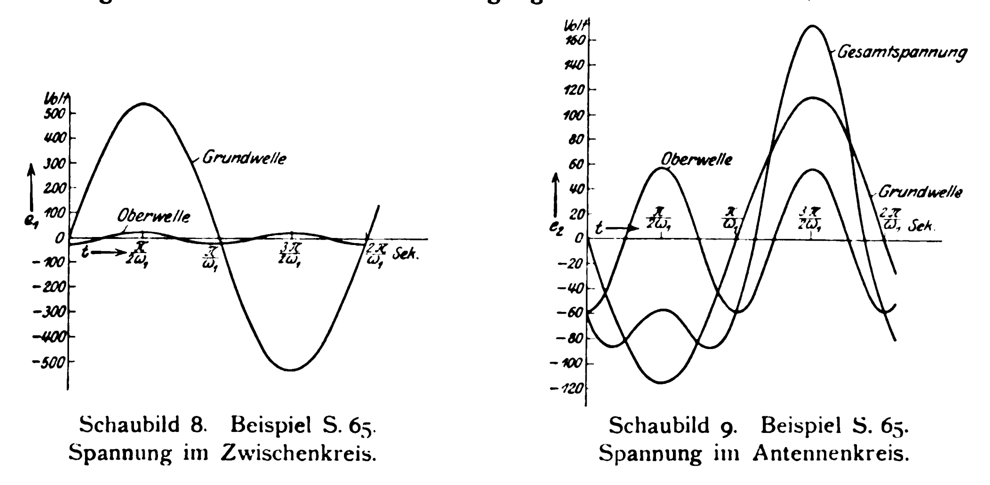


Schaubild 8. Beispiel S. 65.
Spannung im Zwischenkreis.

Schaubild 9. Beispiel S. 65.
Spannung im Antennenkreis.

Um eine Vorstellung von den Schwingungsformen des Resonanzfalles zu geben, sind in Schaubild 6 bis 9 die Strom- und Spannungsverhältnisse aufgezeichnet, die in einem kapazitiv gekoppelten System mit folgenden Konstanten entstehen: Anregungskurve: Sinushalbwellen.

$L_1 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ Hg, $L_2 = 1 \cdot 10^{-4}$ Hg, $i_s = 0,1$ Amp.,
$C_1 = 1,475 \cdot 10^{-9}$ Fd, $C_2 = 7,67 \cdot 10^{-10}$ Fd, $C_k = 2,66 \cdot 10^{-9}$ Fd,
$R_1 = 6$ Ohm, $R_2 = 20$ Ohm.

Glage und Edler zeigen auch Resonanzbilder mit höheren Oberwellen. Es sei hier ein Beispiel durchgeführt mit einem Frequenzverhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 5$.

2. Zahlenbeispiel.

Gewählt sei **kapazitive Kopplung** und **rechteckige Anodenstromkurve** nach Bild 7 S. 45.

Berechnen wir zunächst die notwendige Verstimmung der Einzelkreise unter der Annahme, daß wir mit der Kopplung nicht über $k = 0{,}4$ hinaus gehen können. Es gilt

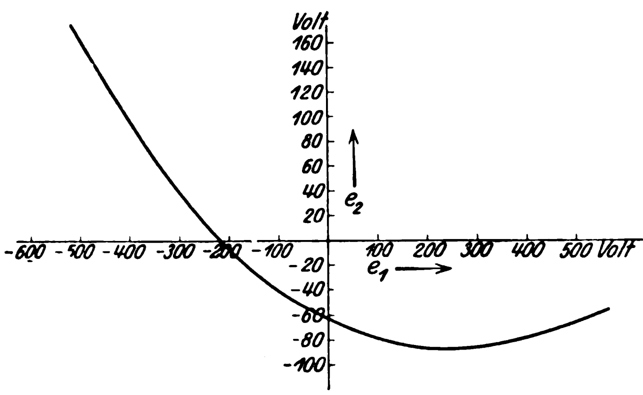


Schaubild 11. Beispiel S. 65/69.
Lissajousche Figur aus den Spannungen in Zwischen- und Antennenkreis.

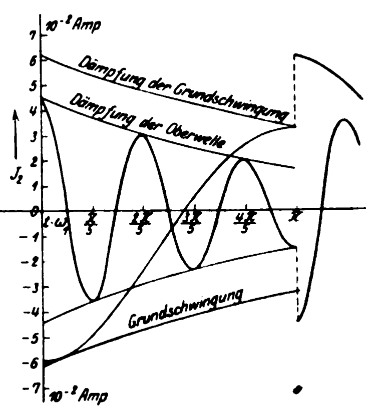


Schaubild 12.
Zusammensetzung des Antennenstroms in Zahlenbeispiel 2.

$$\omega^2 = \frac{1 + x^2}{2}[1 \mp w] \quad \text{mit} \quad w = \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}},$$

da nun $\omega_2 = 5\,\omega_1$ sein soll, gilt

$$(1 + w) = 25\,(1 - w),$$

$$w = \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}} = \frac{12}{13}.$$

Mit $k = 0{,}4$, $\sigma = 1 - (0{,}4)^2 = 0{,}84$ wird

$$\underline{\underline{x = 4{,}51.}}$$

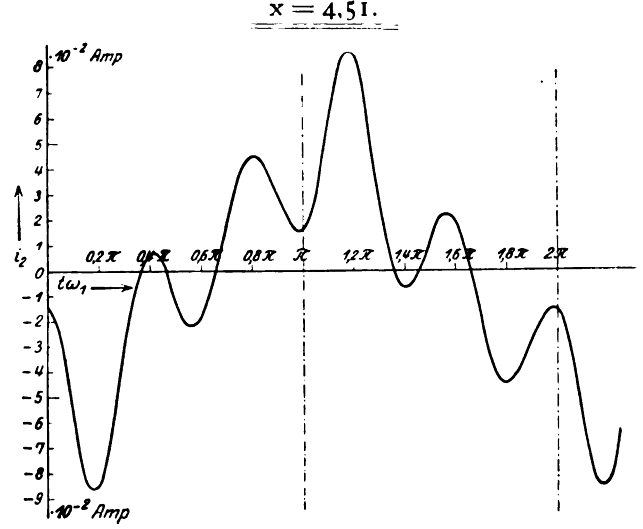


Schaubild 13. Verlauf des Antennenstroms in Zahlenbeispiel 2.

Bei einer derartigen Verstimmung wird nur ein ganz geringer Teil der Schwingungsenergie der Grundwelle auf den Sekundärkreis übertragen; das Beispiel hat also keinerlei praktische Bedeutung für einen Sender.

Wir können daher auch die Widerstände übertrieben hoch ansetzen, um die Dämpfung der Oberwelle während der Halbperiode zu verdeutlichen. Nur müssen wir bei hohen Dämpfungszahlen nach den unverkürzten Formeln (30) rechnen. Gegeben seien die Größen:

$i_s = 0{,}1$ Amp. $\qquad C_k = 2{,}47 \cdot 10^{-9}$ Fd
$L_1 = 10^{-3}$ H $\qquad L_2 = 1{,}11 \cdot 10^{-4}$ H
$R_1 = 300$ Ohm $\qquad R_2 = 55{,}5$ Ohm
$C_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-9}$ Fd $\qquad C_2 = 6{,}5 \cdot 10^{-10}$ Fd

Es folgt:

$\Omega_1 = 8{,}17 \cdot 10^5$ $\qquad \Omega_2 = 3{,}72 \cdot 10^6 = 4{,}51\, \Omega_1$
$\omega_1 = 7{,}48 \cdot 10^5$ $\qquad \omega_2 = 3{,}74 \cdot 10^6 = 5\, \omega_1$
$\alpha_1 = 1{,}51 \cdot 10^5$ $\qquad \alpha_2 = 2{,}49 \cdot 10^5$
$a_1 = 0{,}202$ $\qquad a_2 = 0{,}0665$

Bei diesen Daten wird 98,5 % der Grundwellenenergie im Zwischenkreis und nur 1,5 % im Sekundärkreis verzehrt. Im Zwischenkreis nähert sich die Schwingungsform stark einer Sinuslinie, die 5. Oberwelle tritt ganz schwach auf.

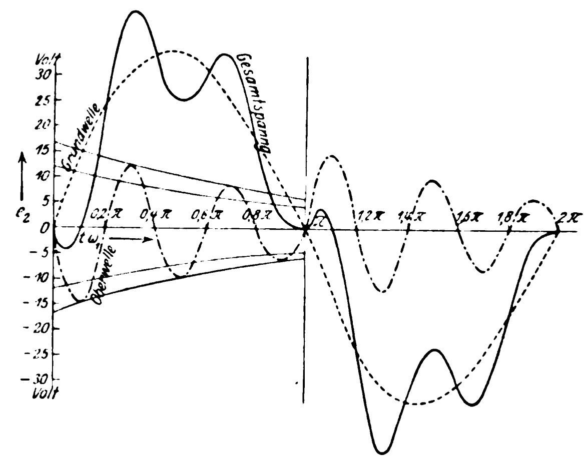


Schaubild 14. Zusammensetzung der Antennenspannung in Zahlenbeispiel 2.

Für den Sekundärkreis, bei dem die Oberwelle fast so stark ist wie die Grundwelle, sind Strom- und Spannungsverlauf in den Schaubildern (12) bis (14) aufgezeichnet. Man sieht die Zusammensetzung des kontinuierlichen Gesamtstroms aus 2 unstetig verlaufenden, gedämpften Teilschwingungen.

Auch ist, besonders bei der Stromkurve, deutlich zu sehen, wie die rascher abklingenden Oberwellen nach jeder Halbperiode neu angestoßen werden.

Anwendung der bisherigen Ergebnisse auf Antennen mit verteilter Kapazität und Selbstinduktion.

Die in den obigen Ableitungen angewandte Darstellung des Antennenkreises durch Kondensator, Induktionsspule und Widerstand gibt die tatsächlichen Verhältnisse nur unvollständig wieder. Die Antenne soll Energie ausstrahlen, das elektrische Feld sich also möglichst weit im Raum erstrecken und nicht zwischen den Platten eines Kondensators eingeschlossen sein.

Es handelt sich demnach in Wirklichkeit stets um schwingende Gebilde mit verteilter Kapazität und Selbstinduktion. Die Frequenzgleichung einer solchen Antenne, die hier abzuleiten über den Rahmen dieser Arbeit hinausginge, enthält aber neben den Potenzen von ω noch Exponentialglieder der Form $\varepsilon^{j l \omega}$. Da die imaginäre

Exponentialfunktion periodisch ist mit $2\pi j$ als Periode, hat der Frequenzausdruck beliebig viele Lösungen. Außer in der Grundwelle kann die Antenne in theoretisch unendlich vielen Oberwellen schwingen.

Ist die Antenne mit einem Zwischenkreis gekoppelt, so ergibt jede einzelne Eigenschwingung der Antenne mit der des Zwischenkreises zwei mögliche Koppelfrequenzen, die bei Stoßerregung — etwa durch eine Funkenstrecke — auch alle mehr oder weniger stark mitschwingen.

Infolge dieser Vielheit von Koppelfrequenzen ist es auch bei loser Kopplung und auf den Zwischenkreis abgestimmter Antennengrundwelle ($x_1 = 1$) leicht möglich, daß eine der oberen Schwingungszahlen einem ganzen Vielfachen der Grundschwingung nahe kommt. Diese „resonierende" Oberwelle wird sich dann, genau wie bei Kreisen mit konzentrierten Kapazitäten und Selbstinduktionen zu merklichen Amplituden aufschaukeln.

Eine strenge Berechnung der Schwingungsamplituden würde die allgemeine Lösung der Frequenzgleichung voraussetzen. Diese gestaltet sich aber wegen der eingehenden transzendenten Glieder sehr schwierig und für jede Antennenform verschieden. Wir begnügen uns deshalb zur Veranschaulichung des Resonanzeffektes mit folgender Einschränkung der Aufgabe (die freilich nur angenähert richtig ist):

Durch Messung oder Rechnung sei für die ungekoppelte Antenne festgestellt, daß sie beim Schwingen in der Grundwelle äquivalent sei einem Kreis mit den konzentrierten Gliedern L_a, C_a, R_a, in den Oberwellenkreisen mit den Gliedern

$$\begin{matrix} L_b & C_b & R_b \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ L_n & C_n & R_n \end{matrix}$$

Wir gehen jetzt so vor, als bestände die Antenne aus voneinander unabhängigen Teilkreisen L_i, C_i, R_i, die jeder für sich mit dem gemeinsamen Zwischenkreis gekoppelt seien.

Da nun dem ganzen System eine Koppelfrequenz von Zwischenkreis und Anodengrundkreis (L_a, C_a, R_a) aufgedrückt ist, werden die Schwingungen in allen übrigen Kreisen klein und zu vernachlässigen sein bis auf die „resonierenden" Ersatzkreise, in denen sie dann nach den abgeleiteten Formeln berechnet und zu einem gemeinsamen Antennenstrom addiert werden.

Zusammenfassung des II. Teiles.

1. Es wird die Aufgabe gestellt, im Zwischenkreissender aus einem gegebenen Verlauf des Anodenstromes die Schwingungsströme nach Amplitude und Wellenform zu berechnen.

2. Es werden die typischen Formen der Anodenstromkurve in Abhängigkeit von Gittervorpotential- und Rückkopplung abgeschätzt.

3. Zur Berechnung der Schwingungsströme werden 2 Verfahren angegeben:

I. die komplexe Wechselstromrechnung,

II. die Kombination der Differentialgleichungen, die sich ergeben, wenn man sich die Anodenstromkurve aus geradlinigen Teilstücken zusammengesetzt denkt.

4. Es wird gezeigt, daß beide Verfahren zu identischen Ergebnissen führen und daß bei harmonischer Analyse jede Oberwelle der Schwingungsströme der entsprechenden Oberwelle des Anodenstromes direkt proportional ist.

5. Die Proportionalitätsfaktoren zwischen Anodenstrom und Schwingungsströmen werden berechnet und die Endformeln durch Näherungsausdrücke vereinfacht. Es ergibt sich die Möglichkeit sehr starker Oberwellen bei ganzzahligem Verhältnis der Koppelfrequenzen ω_1 und ω_2.



6. Die Ergebnisse der Rechnung werden an Hand von Zahlenbeispielen erläutert.
7. Es wird die für den Idealfall konzentrierter Kapazitäten und Selbstinduktionen zugeschnittene Rechnung in erster Näherung auf Antennen mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität angewandt.

Die vorliegende Arbeit und die Arbeit S. 23 entstanden auf Anregung meines sehr verehrten Lehrers, des Herrn Professor Rogowski, Aachen. Es ist mir eine Ehre, ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank auszusprechen für die Förderung, die er mir durch sein reges Interesse und seinen stets gern erteilten Rat zuteil werden ließ.

Abkürzungsverzeichnis.

1. Allgemeine elektrische Größen:

Zeichen:	Bedeutung:	Einheit:
C	Kapazität	Farad
e	Spannung	Volt
i	Strom	Ampere
L	Selbstinduktion	Henry
M	Gegenseitige Induktion	Henry
R	Widerstand	Ohm.

2. Röhrenkonstanten:

Zeichen	Bedeutung	Einheit
D	Durchgriff	Zahl
i_s	Sättigungsstrom	Ampere
R_i	Innerer Widerstand	Ohm
S	Steilheit	Siemens.

3. Schwingungsgrößen; Dimension sec^{-1}:

Ω Eigenfrequenz eines Kreises,
λ Eigendämpfung eines Kreises,
ω Koppelfrequenz zweier Kreise,
α Koppeldämpfung zweier Kreise,
ϑ komplexer Frequenzausdruck ($= j\omega - \alpha$).

4. Zahlengrößen:

$a = \frac{\alpha}{\omega}$ Reduzierte Koppeldämpfung zweier Kreise,

$l = \frac{\lambda}{\Omega}$ Reduzierte Eigendämpfung eines Kreises,

u, U Dämpfungsgewichte nach Rogowski,

$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$ oder $\frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_k}$ Kopplungskoeffizient,

$j = \sqrt{-1}$ Imaginäre Einheit,

ε Logarithmenbasis,

η Wirkungsgrad,

$\sigma = 1 - k^2$ Streukoeffizient.

5. Symbolische Zeichen:

i Effektivwert eines Wechselstromes,
$\hat{\imath}$ Amplitudenwert eines Wechselstromes,

$\approx$ ungefähr gleich,
$<$ kleiner als,
$>$ größer als,
$\ll$ von geringerer Größenordnung als,
$\gg$ von höherer Größenordnung als,
i' Differentialquotient von i nach der Zeit $\left(= \frac{\partial i}{\partial t}\right)$.
$\equiv$ identisch gleich.

Benutzte Literatur.

1. Appleton und van der Pol, Phil. Magazine, Januar 1922, S. 177.
2. Burstyn, ETZ 1920, S. 951.
3. Drude, Ann. d. Physik, 1904, Bd. 13, S. 535.
4. Glage und Edler, Arch. f. Elektrot. 1920, Bd. 9, S. 20
5. — — Arch. f. Elektrot. 1920, Bd. 10, S. 56.
6. Größer, Arch. f. Elektrot. 1921, Bd. 10, S. 257.
7. — Arch. f. Elektrot. 1921, Bd. 10, S. 314.
8. Harms, Jahrb. drahtl. Tel. 1920, Bd. 15, S. 442.
9. — Ann. d. Physik 1921, Bd. 66, S. 25.
10. Hazeltine, Proc. Inst. Radio Engineers 1918, Bd. 6, S. 63.
11. Heegner, Arch. f. Elektrot. 1920, Bd. 9, S. 127.
12. Kiebitz, Ann. d. Physik 1913, Bd. 40, S. 138.
13. — Jahrb. drahtl. Tel. 1914, Bd. 8, S. 45.
14. Möller, Die Elektronenröhren (Vieweg) 1920, 1. Aufl.
15. — Die Elektronenröhren (Vieweg) 1922, 2. Aufl.
16. — Jahrb. drahtl. Tel. 1920, Bd. 16, S. 402.
17. Pauli, Jahrb. drahtl. Tel. 1921, Bd. 17, S. 322.
18. van der Pol, Phil. Magazine 1922, April, S. 700.
19. Rogowski, Arch. f. Elektrot. 1920, Bd. 9, S. 427.
20. — Arch. f. Elektrot. 1921, Bd. 10, S. 1.
21. — Arch. f. Elektrot. 1921, Bd. 10, S. 15.
22. — Arch. f. Elektrot. 1921, Bd. 10, S. 209.
23. — Zeitschr. techn. Physik 1922, Bd. 3, S. 135.
24. Rukop und Hausser-Ganßwindt, Telefunkenzeitschrift 1922, Heft 25.
25. Vallauri, Jahrb. drahtl. Tel. 1917, Bd. 12, S. 349.
26. Wien, Ann. d. Physik 1897, Bd. 61, S. 157.

Wellenstrommagnetisierung und Wellenstrommessungen mit eisenhaltigen Meßgeräten.

Von

Dr.-Ing. **Melchior Stöckl**, Nürnberg

Vorbemerkung. Eine Überlagerung von Gleichstrom und technischem, zum Nullniveau symmetrischen Wechselstrom heißt Wellenstrom [vgl. Handb. (= Handbuch der Elektrotechnik herausgegeben von Dr. C. Heinke) Bd. I, 2, Nr. 152 u. f. 257 bis 266]. Da bei den magnetischen Ausgleichsvorgängen die Form der MMK und damit auch die Form des Stromes eine charakteristische Unterscheidungsursache ist, so kann danach unterschieden werden in:

a) Gleichstrommagnetisierung,
b) Wechselstrommagnetisierung (symmetrische oder zyklische Magnetisierung),
c) Wellenstrommagnetisierung (unsymmetrische oder aszyklische magnetische Kreisprozesse.)

Für manche Untersuchung wird es zweckmäßig sein, die Wellenstrommagnetisierung bzw. das Wellenfeld wieder in die beiden Elemente, das Gleichfeld und das Wechselfeld zu zerlegen.

I. Teil.

Wellenstrommagnetisierung.

1. Wellenstrom-Hystereseschleifen.

Bei Änderungen der MMK zwischen zwei gleich großen positiven und negativen Höchstwerten wird ein symmetrischer magnetischer Kreisprozeß durchlaufen. Die absteigenden und aufsteigenden Hysteresekurven sind einander vollkommen gleich und bilden eine symmetrische Hystereseschleife (Linienzug G R C G′ R′ C′ G des Bildes 1). Wird dieser Vorgang periodisch zwischen den Amplituden $+D'$ und $-D'$ wiederholt, so entstehen immer die gleichen symmetrischen Kurven und Schleifen.

Wird aber die Änderung der MMK bei irgend einem Werte der absteigenden Hysteresekurven unterbrochen (z. B. im Punkte F_1 oder F_2) und von diesem Minimal- oder Umkehrpunkt in entgegengesetzter Richtung bis zum Ausgangswert G vergrößert, so ergeben sich ebenfalls vollkommene magnetische Kreisprozesse. Es entstehen neue aufsteigende Hysteresekurven, die von den einzelnen Minimalpunkten ausgehen, und sich alle in dem Höchstwerte G vereinigen. Diese neuen Hystereseschleifen sind unsymmetrisch zu den Achsen gelagert. Es sind aszyklische oder Wellenstrom-Hystereseschleifen.

Wählt man für eine Reihe derartiger unsymmetrischer Hystereseschleifen immer den gleichen Höchstwert oder Ursprung G auf der jungfräulichen Kurve oder der Neulinie, so bilden diese ein System zusammengehöriger Hystereseschleifen. Die absteigenden Kurven all dieser unsymmetrischen Schleifen fallen mit der absteigenden symmetrischen zusammen, alle aufsteigenden Linien sind der symmetrischen ähnlich, liegen vollkommen innerhalb der symmetrischen Schleifen und laufen im Ursprung zusammen.

Wird die MMK vom Ursprung G aus (Bild 2) nach links um mehr als 2 D′ vergrößert, so gelangen wir über den Symmetriepunkt G′ hinaus. Der symmetrische absteigende Ast geht vom Punkte G′ aus in die Neulinie G′G″ über. Betrachten wir G″ mit der MMK $-D''$ als einen neuen Umkehrpunkt, so entsteht eine Hysteresekurve G″F G‴. Sie ist symmetrischer Art, da der Ausgangspunkt G″ auf der Neulinie liegt. Die Kurve kehrt nicht mehr zum Ursprung G des obigen Systems



zurück, sondern verläuft vollkommen außerhalb desselben. G″ ist der Ursprung eines neuen Systems. Unsymmetrische Hystereseschleifen eines Systems sind nur so lange möglich, als das Gefälle der MMK ($\triangle D_1$, $\triangle D_2$ .... Bild 1) kleiner ist, als das doppelte der MMK des Ursprungs, also $\triangle D < 2 D'$.

In der gleichen Weise, wie ein Punkt der Neulinie als Ursprung eines Systems unsymmetrischer Hystereseschleifen wählbar ist, kann auch irgend ein Punkt eines absteigenden symmetrischen oder unsymmetrischen Hystereseastes genommen werden. Vom Punkte F (Bild 2) des symmetrischen Astes G″F G‴ ausgegangen und die MMK bis D″ vergrößert, liefert die Kurve F E G″. Wird der Magnetisierungsprozeß bei E(— D′) unterbrochen und E als Umkehrpunkt betrachtet, so gelangt man auf einem neuen Wege zum Ausgangspunkt F zurück. Es entsteht eine neue unsymmetrische Hystereseschleife E F. Diese ist anderer Art, da keiner der Umkehrpunkte auf der Neulinie liegt.

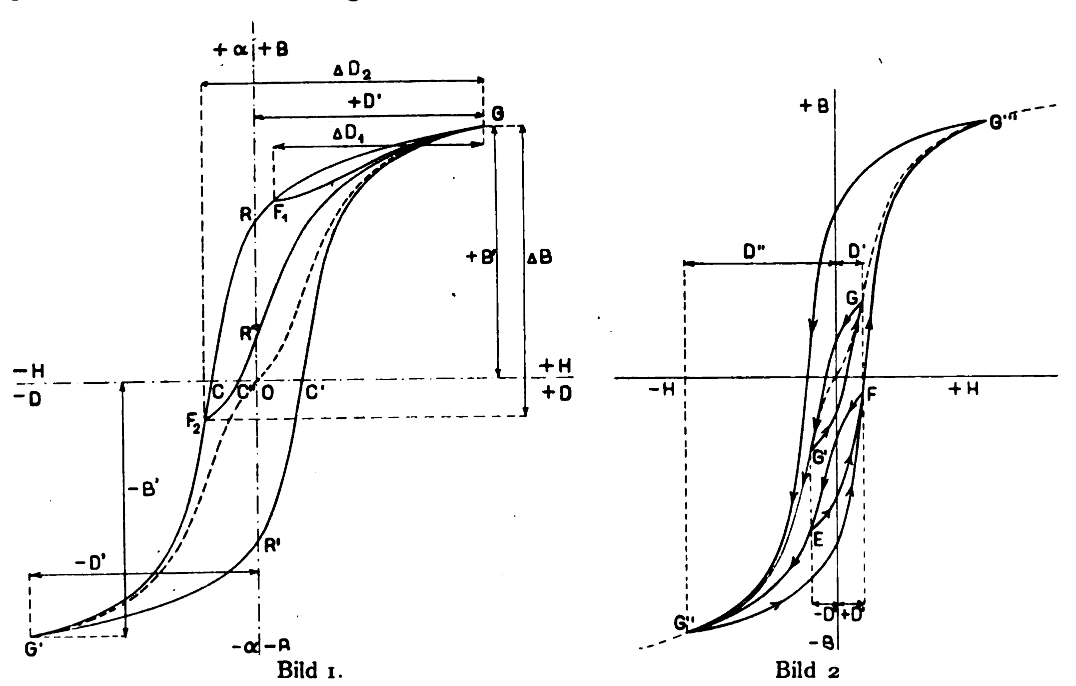


Bild 1. Bild 2

Das charakteristische Unterscheidungsmerkmal der Wellenstromhystereseschleifen und -Kurven ist die Lage der Umkehrpunkte. Bei allen symmetrischen Schleifen liegen beide Umkehrpunkte auf der Neulinie. Bei dem System unsymmetrischer Schleifen des Bildes 1 ist der Ursprung auf der Neulinie. Alle Minimalpunkte sind auf einer symmetrischen Hysteresekurve. Man kann hier von einer Unsymmetrie 1. Ordnung sprechen. Bei der Wellenstromschleife F E des Bildes 2 liegt Umkehrpunkt F auf einer symmetrischen, Punkt E auf einer unsymmetrischen Kurve, also keiner mehr auf der Neulinie. Die Unsymmetrie ist um einen Punkt größer. Diese Schleife wäre unsymmetrisch von der zweiten Ordnung. In der gleichen Weise könnte noch von unsymmetrischen Wellenstrom-Hystereseschleifen 3., 4. und höherer Ordnung gesprochen werden. Dieselbe Betrachtungsweise gestattet auch die auf- und absteigenden Hysteresekurven nach ihrem Ausgangs- und Umkehrpunkt zu charakterisieren.

Auf Grund dieser Einteilung läßt sich bisher folgendes sagen:

Jeder Magnetisierungsprozeß ist vollkommen charakterisiert durch den Grad der Unsymmetrie seiner Hysteresekurven und -schleifen. Er ist eindeutig bestimmt durch die beiden Umkehrpunkte:



Alle Hystereseschleifen gleicher Ordnung und gleichen Ursprungs haben eine gemeinsame absteigende Hysteresekurve.

Alle aufsteigenden Kurven der gleichen Ordnung und des gleichen Systems liegen innerhalb ihrer Symmetriekurven als Grenzlinien, verlaufen ähnlich wie diese und vereinigen sich im Ursprung.

Bild 2 zeigt die Entwicklung einer Hystereseschleife niederer, in eine solche höherer Ordnung und umgekehrt. Über die erstere Umwandlung läßt sich früher Gesagtes in den Satz zusammenfassen:

Bei der Entstehung einer Hystereseschleife niederer in eine solche höherer Ordnung liegt der Umkehrpunkt auf der Hysteresekurve mit dem höheren Grade und zwar ist das Gesamtgefälle der MMK kleiner, als die Differenz der MMKe zwischen Ursprung und Umkehrpunkt der Hystereseschleife der nächst niederen Ordnung.

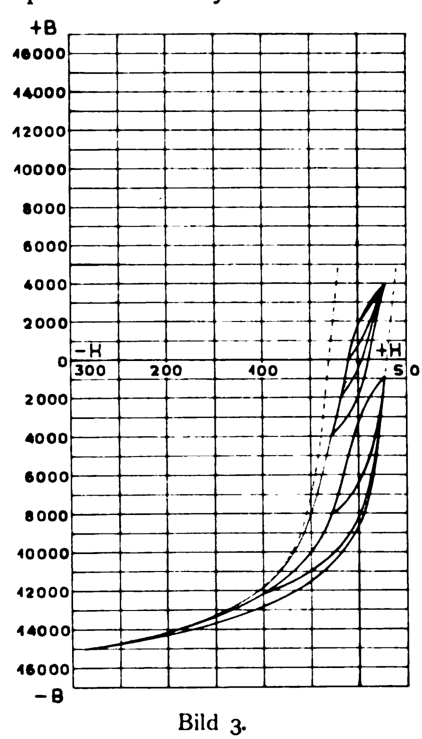


Bild 3.

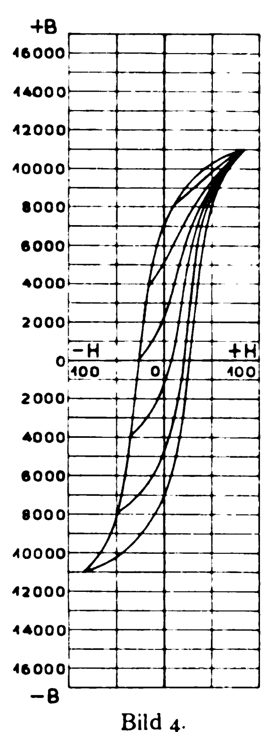


Bild 4.

Wird die MMK bei der Schleife F E nach links, also in der negativen Richtung von H über E hinaus vergrößert, so behält die Hysteresekurve F E G″ ihren Unsymmetriegrad bei. Erst bei Vergrößerung über G″ wird sie zur Neulinie. Die Linie E F, die unsymmetrisch vom 2. Grade ist, geht bei der Vergrößerung der MMK über den Ursprung F hinaus, in den symmetrischen Ast F G‴ und über G‴ hinaus ebenfalls in die Neulinie über.

Vergrößert man bei einer Hystereseschleife höherer Ordnung die MMK über die Umkehrpunkte hinaus, so schreitet der Ausgleichsvorgang auf einer Kurve niederen Grades weiter.

Bei Erweiterung der Grenzen kann aus einer Wellenstromhystereseschleife höherer Ordnung eine solche niederer Ordnung, aus diesen eine Wechselstromhystereseschleife und daraus die Gleichstromcharakteristik oder Neulinie entwickelt werden.

Jeder Punkt einer absteigenden Hysteresekurve kann der Umkehrpunkt eines aufsteigenden Astes des gleichen Systemes sein. Damit sind innerhalb dieser

Hystereseschleife unendlich viele unsymmetrische Kurven der gleichen Ordnung und des gleichen Systems möglich. Legt man mehrere Systeme der gleichen oder einer anderen Ordnung, jedes mit einem anderen Ursprung übereinander, und wählt irgend einen Punkt innerhalb derselben aus, so ist durch diesen immer eine Kurve eines jeden Systemes möglich.

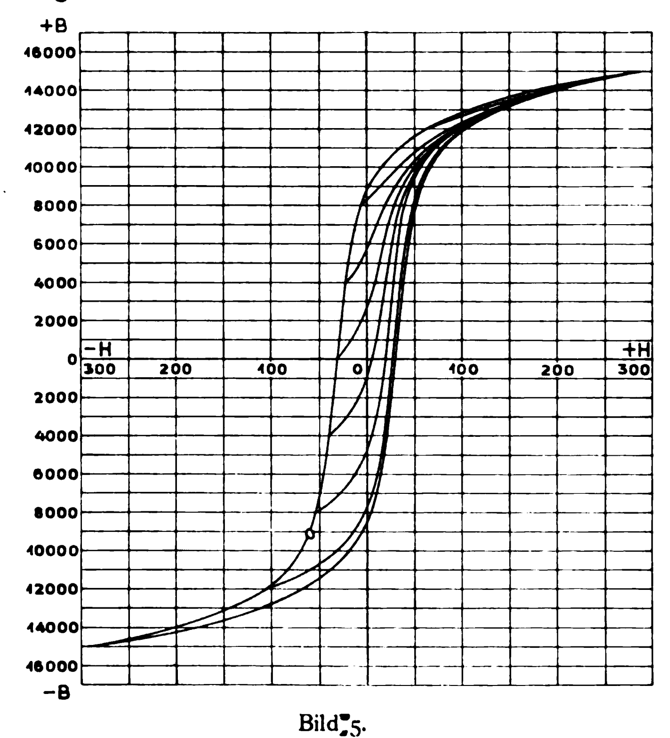


Bild 5.

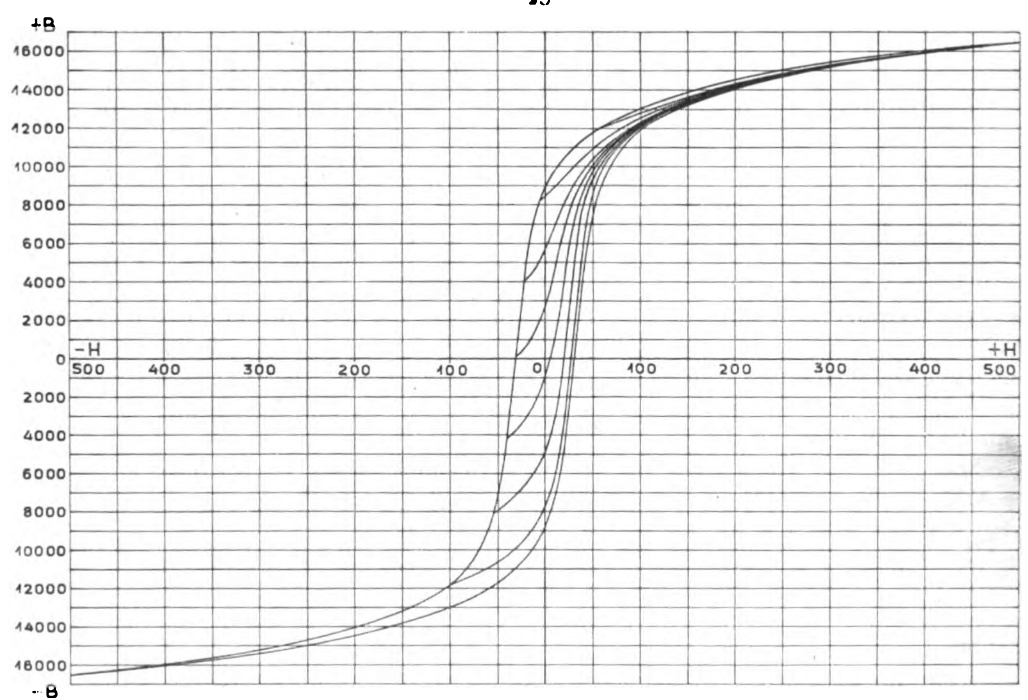


Bild 6.



Zahlentafel 1.

Bild 5.

H′ = 288 B′ = 15 000.

H	B: B° = — 15 000	B° = — 12 000	B° = — 8 025	B° = — 4 000	B° = + 25	B° = + 4 000	B° = + 8 000	B° = + 12 000	B Mittel	Größte Abweichung
+ 288	+ 15 000	15 000	15 030	15 000	14 975	14 980	15 000	15 025	15 000	+ 30
260	14 780	14 800	14 800	14 800	14 775	14 800	14 775	14 800	14 791	— 16
240	14 550	14 600	14 600	14 575	14 575	14 600	14 575	14 575	14 581	— 31
220	14 425	14 425	14 425	14 400	14 425	14 425	14 400	14 425	14 419	— 19
200	14 175	14 175	14 200	14 175	14 175	14 200	14 150	14 150	14 175	± 25
180	13 935	13 975	13 975	13 975	13 950	14 000	13 975	13 975	13 975	± 25
160	13 700	13 725	13 725	13 675	13 700	13 700	13 700	13 725	13 706	— 31
140	13 450	13 450	13 425	13 425	13 450	13 450	13 425	13 450	13 441	— 16
120	13 125	13 100	13 100	13 125	13 100	13 150	13 100	13 125	13 116	+ 34
100	12 825	12 800	12 800	12 800	12 800	12 825	12 800	12 825	12 809	+ 16
90	12 575	12 550	12 575	12 575	12 550	12 575	12 550	12 575	12 566	— 16
80	12 375	12 400	12 350	12 350	12 350	12 425	12 350	12 425	12 378	+ 47
70	12 125	12 100	12 100	12 075	12 075	12 100	12 100	12 100	12 100	+ 25
60	11 900	11 900	11 900	11 850	11 850	11 900	11 850	—	11 879	— 29
50	11 550	11 550	11 550	11 525	11 525	11 575	11 550	—	11 546	+ 29
40	11 180	11 175	11 175	11 150	11 125	11 200	11 175	—	11 169	— 44
30	10 800	10 775	10 725	10 725	10 725	10 800	10 775	—	10 761	+ 39
20	10 250	10 225	10 200	10 175	10 175	10 250	10 225	—	10 214	— 39
10	9 550	9 550	9 525	9 500	9 500	9 550	9 525	—	9 529	— 29
0	8 650	8 625	8 575	8 550	8 575	8 650	8 650	—	8 611	— 61
— 5	8 000	7 975	7 950	7 925	7 950	8 000	8 000	—	7 971	— 46
— 10	7 300	7 225	7 150	7 150	7 150	7 300	—	—	7 212	+ 88
— 15	6 190	6 150	6 100	6 100	6 100	6 200	—	—	6 140	+ 60
— 20	4 650	4 600	4 525	4 525	4 575	4 525	—	—	4 567	+ 83
— 22	—	—	—	—	—	+ 4 000	—	—	—	—
— 25	2 520	2 325	2 350	2 475	2 500	—	—	—	2 434	— 109
— 30	— 110	— 25	— 150	+ 25	+ 25	—	—	—	— 67	— 83
— 35	— 2 320	— 2 400	— 2 450	— 2 350	—	—	—	—	— 2 380	— 70
— 39,5	—	—	—	— 4 000	—	—	—	—	—	—
— 40	— 4 425	— 4 450	— 4 500	—	—	—	—	—	— 4 458	— 42
— 45	— 6 050	— 6 075	— 6 075	—	—	—	—	—	— 6 037	+ 17
— 50	— 7 310	— 7 375	— 7 325	—	—	—	—	—	— 7 337	— 38
— 54	—	—	— 8 025	—	—	—	—	—	—	
— 55	— 8 260	— 8 325	—	—	—	—	—	—	— 3 282	— 33
— 60	— 9 010	— 9 025	—	—	—	—	—	—	— 9 018	+ 8
— 65	— 9 600	— 9 600	—	—	—	—	—	—	— 9 600	0
— 70	— 10 080	— 10 075	—	—	—	—	—	—	— 10 078	+ 3
— 80	— 10 900	— 10 900	—	—	—	—	—	—	— 10 900	0
— 90	— 11 425	— 11 420	—	—	—	—	—	—	— 11 422	3
— 100	— 11 860	— 11 875	—	—	—	—	—	—	— 11 868	+ 8
— 104	—	— 12 000	—	—	—	—	—	—	—	—
— 120	— 12 500	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 140	— 13 100	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 160	— 13 400	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 180	— 13 720	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 200	— 14 050	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 220	— 14 310	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 240	— 14 525	—	—	—	—	—	—	—	—	—

H	B								B	
	B° = − 15 000	B° = − 12 000	B° = − 8 025	B° = − 4 000	B° = + 25	B° = + 4 000	B° = + 8 000	B° = + 12 000	Mittel	Größte Abweichung
− 260	− 14 760	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 288	− 15 000	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 260	− 14 790	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 240	− 14 580	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 220	− 14 420	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 200	− 14 180	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 180	− 13 980	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 160	− 13 710	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 140	− 13 440	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 120	− 13 120	—	—	—	—	—	—	—	—	—
− 104	—	− 12 000	—	—	—	—	—	—	—	—
− 100	− 12 810	− 11 950	—	—	—	—	—	—	—	—
− 90	− 12 570	− 11 750	—	—	—	—	—	—	—	—
− 80	− 12 380	− 11 525	—	—	—	—	—	—	—	—
− 70	− 12 100	− 11 325	—	—	—	—	—	—	—	—
− 60	− 11 880	− 11 050	—	—	—	—	—	—	—	—
− 54	—	—	− 8 025	—	—	—	—	—	—	—
− 50	− 11 550	− 10 775	− 7 925	—	—	—	—	—	—	—
− 40	− 11 170	− 10 450	− 7 575	—	—	—	—	—	—	—
− 39,5	—	—	—	− 4 000	—	—	—	—	—	—
− 30	− 10 760	− 10 000	− 7 125	− 3 550	+ 25	—	—	—	—	—
− 22	—	—	—	—	—	+ 4 000	—	—	—	—
− 20	− 10 210	− 9 470	− 6 575	− 3 000	+ 675	4 050	—	—	—	—
− 10	− 9 530	− 8 830	− 5 875	− 2 125	1 450	4 700	—	—	—	—
− 5	− 9 180	− 8 450	− 5 425	− 1 700	1 950	5 050	+ 8 000	—	—	—
0	− 8 610	− 7 925	− 4 850	− 1 025	2 550	5 575	8 275	—	—	—
+ 5	− 7 970	− 7 225	− 4 050	− 200	3 325	6 175	8 525	—	—	—
10	− 7 210	− 6 470	− 3 150	− 775	4 100	6 775	8 750	—	—	—
15	− 6 190	− 5 350	− 1 775	2 150	5 350	7 425	9 000	—	—	—
20	− 4 650	− 3 750	− 25	3 875	6 475	8 000	9 275	—	—	—
25	− 2 520	− 1 520	+ 2 425	5 675	7 450	8 475	9 525	—	—	—
30	+ 110	+ 1 025	4 900	7 050	8 100	8 925	9 850	—	—	—
35	2 320	3 450	6 675	8 000	8 725	9 300	10 050	—	—	—
40	4 425	5 500	7 975	8 650	9 150	9 600	10 300	—	—	—
45	6 050	7 075	8 800	9 200	9 600	9 975	10 525	—	—	—
50	7 310	8 175	9 400	9 650	9 975	10 300	10 750	—	—	—
55	8 260	9 050	9 875	10 050	10 325	10 525	10 950	—	—	—
60	9 010	9 650	10 200	10 375	10 550	10 800	11 100	—	—	—
65	9 600	10 150	10 550	10 625	10 850	11 025	11 325	+ 12 000	—	—
70	10 080	10 550	10 850	10 925	11 050	11 200	11 475	12 075	—	—
75	10 510	10 925	11 050	11 125	11 250	11 425	11 625	12 175	—	—
80	10 900	11 175	11 325	11 400	11 475	11 575	11 800	12 325	—	—
90	11 420	11 600	11 700	11 700	11 825	11 925	12 050	12 475	—	—
100	11 860	12 000	12 025	12 025	12 075	12 150	12 350	12 650	—	—
120	12 500	12 575	12 550	12 575	12 600	12 650	12 775	13 000	—	—
140	13 010	13 025	13 025	13 025	13 050	13 075	13 125	13 325	—	—
160	13 400	13 400	13 375	13 400	13 425	13 450	13 475	13 575	—	—
180	13 720	13 700	13 700	13 700	13 725	13 775	13 775	13 875	—	—
200	14 050	14 050	14 025	14 020	14 025	14 025	14 025	14 075	—	—
220	14 300	14 275	14 275	14 300	14 300	14 300	14 300	14 350	—	—
240	14 500	14 500	14 525	14 525	14 525	14 525	14 525	14 525	—	—
260	14 750	14 750	14 725	14 750	14 725	14 750	14 775	14 750	—	—
288	15 025	15 000	15 025	15 000	14 975	14 980	15 000	15 000	—	—



Innerhalb der größten Hystereseschleife (bei absoluter Sättigung) können durch jeden Punkt unendlich viele unsymmetrische Hysteresekurven einer jeden Ordnung, aber nur eine symmetrische Hysteresekurve gelegt werden.

Die Achsenabschnitte der symmetrischen Hystereseschleifen, die Remanenz und Koerzitivkraft, sind für diese besonders charakteristisch. Hiefür sind die positiven und negativen Werte einander gleich. Bei Wellenstromschleifen können sie jeden Wert vom symmetrischen bis Null annehmen. Fällt Ursprung und Umkehrpunkt in den gleichen Quadranten, so ergeben sich Schleifen ohne Remanenz und ohne Koerzitivkraft.

Die Wellenstromhystereseschleifen höherer Ordnung kommen verhältnismäßig selten vor, weshalb im folgenden nur solche mit Unsymmetrie erster Ordnung behandelt seien.

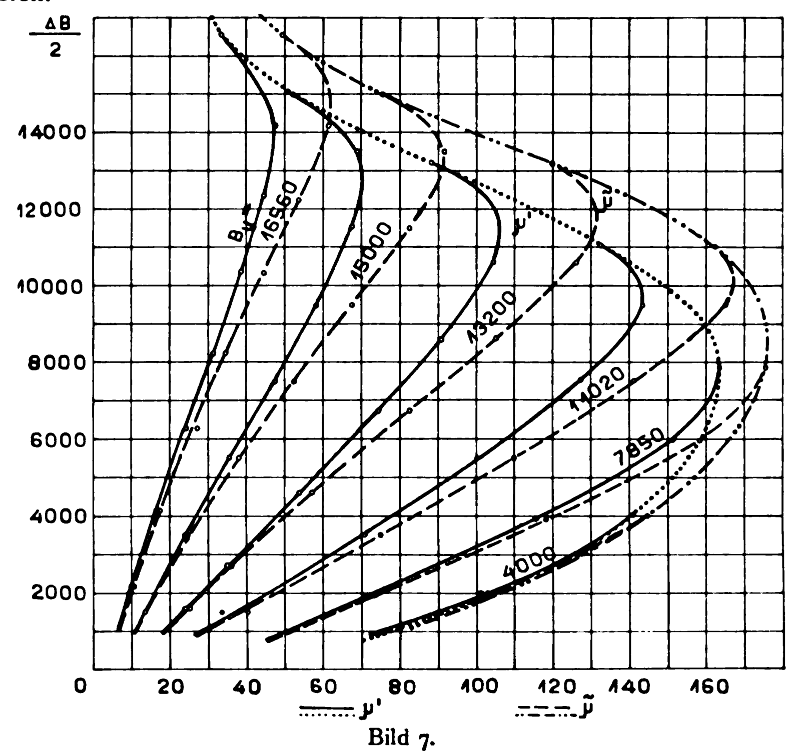


Bild 7.

Obige Ausführungen wurden abgeleitet und bestätigt durch eine Anzahl von Versuchen, die an einem Prüfstab aus gehärtetem Stahl durchgeführt wurden. Bild 3—6.

Die Aufnahmen mit dem Drehspulenapparat eignen sich ganz besonders für den Beweis, daß alle absteigenden Hysteresekurven eines Systems in der absteigenden symmetrischen Kurve zusammenfallen. Jede einzelne Hystereseschleife wird vollkommen für sich allein und zeitlich unabhängig von den andern aufgenommen. Der Beweis für obigen Satz ist damit erbracht, daß alle absteigenden Kurven sich vollkommen decken. Als Beispiel hierüber seien die Meßergebnisse (Zahlentafel 1) für das System mit dem Ursprung $H' = 288$ $B' = 15000$ angeführt.

2. Permeabilität und Selbstinduktionskoeffizient.

Für sämtliche Versuche wurde die Permeabilität berechnet. Für symmetrische Magnetisierungsprozesse ist diese gleich dem Quotienten der Amplituden der spez.

MMK und der Induktion $\mu' = \frac{B'}{H'}$. Dem entspricht bei unsymmetrischen Schleifen das Intervall aus Ursprung und Minimalpunkt. Daher ist μ' allgemein der Quotient aus der gesamten Induktionsdifferenz Δ B und dem Gesamtgefälle der spez. MMK — Δ H: $\mu' = \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{\Delta B/2}{\Delta H/2}$. Dieser Ausdruck stellt eigentlich den Tangens dar und erreicht nach dem Verlauf der positiven und negativen Neulinie im 1. und 3. Quadranten ein absolutes Maximum, wenn die Verbindungslinie der Umkehrpunkte der Schleife, Tangente an die Neulinie ist. Für größere und kleinere Induktionen wird μ' kleiner. Für unsymmetrische Schleifen ist μ' gleich dem Tangens des Winkels, den die Verbindungsgerade durch Ursprung und Minimalpunkt mit der H-Achse bildet. Ist die

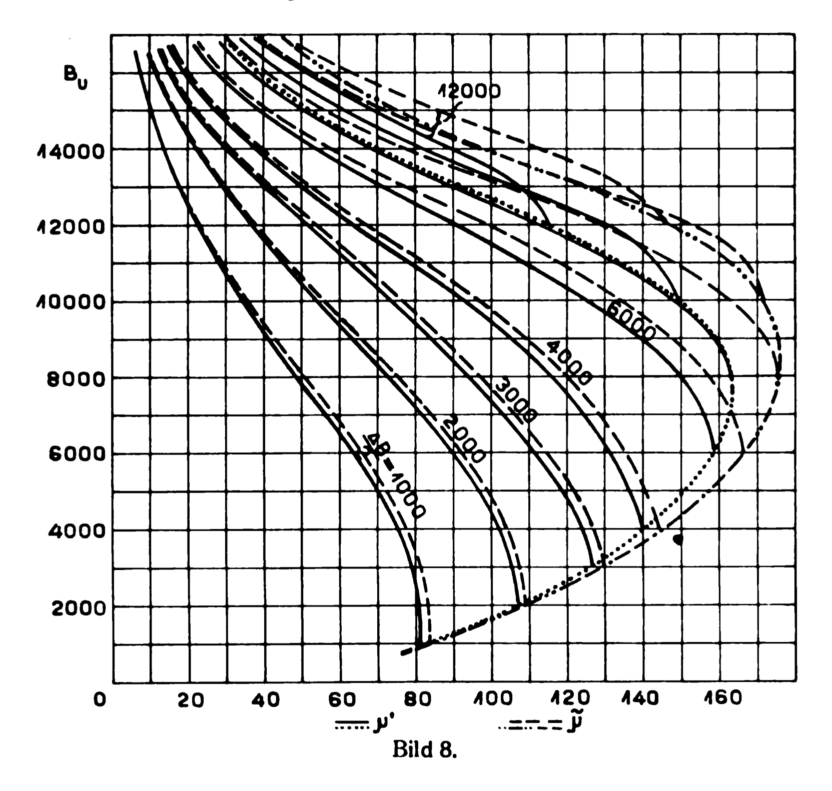


Bild 8.

Ursprungsinduktion kleiner als die Knieinduktion, so ist μ' ein Maximum für die zugehörige symmetrische Schleife. Rückt der Ursprung dagegen in das Sättigungsgebiet vor, so ergibt sich dann die größte Permeabilität, wenn die Verbindungsgerade der Umkehrpunkte, einerseits durch den Ursprung geht, andererseits Tangente an die absteigende Hysteresekurve ist und zwar diese in dem Knie berührt, das dem Ursprung gegenüber liegt. Bei konstanter Ursprungsinduktion B_u und veränderlichem Induktionsgefälle $\frac{\Delta B}{2}$ verlaufen die Kurven alle innerhalb der Grenzkurve für symmetrische Magnetisierung (Bild 7). Bild 8 beweist die Tatsache, daß für konstantes Induktionsgefälle $\frac{\Delta B}{2}$ die Permeabilität umso kleiner wird je größer die Ursprungsinduktion B_u war, und daß die μ'-Kurven außerhalb der Grenzlinie für Symmetrie liegen, wenn $\frac{\Delta B}{2}$ größer ist als die Knieinduktion. Man kann also sagen, daß zwischen Grenzen, die durch das Material bestimmt werden, nahezu jeder Wert der Permeabilität erhalten werden kann.



a) bei gegebenem B_u durch die Wahl von $\frac{\Delta B}{2}$,

b) bei gegebenem $\frac{\Delta B}{2}$ durch die Veränderung von B_u.

In die gleichen Bilder sind noch die Ergebnisse für die Effektivwerte zwischen spez. MMK ($\tilde{H}$) und Induktion ($\tilde{B}$) für sinusförmigen Induktionsverlauf eingetragen $\tilde{\mu} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{H}}$. Die Kurven verlaufen ähnlich, wie jene für μ'. Die Folgerungen sind die gleichen.

Der Selbstinduktionskoeffizient ist direkt proportional μ. Damit gelten hiefür die gleichen Einflußmöglichkeiten und die gleichen Schlüsse.

3. Scheitelfaktor.

Bei sinusförmiger Wechselkomponente der Induktion wird bei unsymmetrischen magnetischen Ausgleichsvorgängen der Verlauf von H ebenfalls unsymmetrisch und

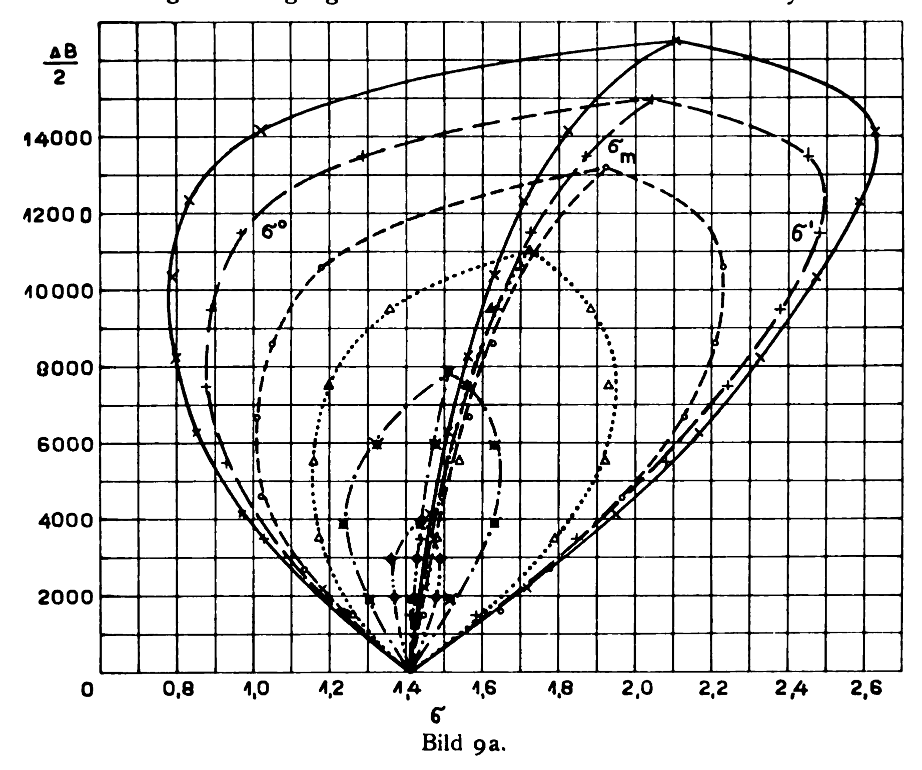


Bild 9a.

je nach der Sättigung von der Sinusform abweichen. Als charakteristische Zahl hiefür gelte der Scheitelfaktor σ, der Quotient aus dem Höchstwert h' der Wechselkomponente zum Effektivwert desselben $\tilde{H}$. Da keine Symmetrie hinsichtlich der Zeitachse besteht ist der positive Maximalwert h' (vom Gleichniveau aus gerechnet), nicht gleich dem negativen h^0 (Kleinstwert). Damit ergeben sich 2 Scheitelfaktoren $\sigma' = \frac{h'}{\tilde{H}}$; $\sigma^0 = \frac{h^0}{\tilde{H}}$ und ihr algebraische Mittelwert σ_m. Die graphischer Darstellung in Bild 9a liefert ein System herzförmiger Kurven. Die Unterschiede zwischen σ' und σ^0 sind sehr beträchtlich und nehmen mit B_u zu. Den größten Unterschied ergeben die Versuche für $B_u = 16560$ bei $\frac{\Delta B}{2} = 10380$ zu $\Delta\sigma = 1{,}686$ ($\sigma' = 2{,}480$; $\sigma^0 = 0{,}794$).

Die σ_m-Kurven scheinen wirr durcheinander zu liegen. In der Abhängigkeit von B_u tritt eine auffallende Gesetzmäßigkeit zutage (Bild 9b). [Vergleiche Ummagnetisierungsarbeit Bild 14 u. 15]. Für manche Fälle mag die allgemeine Beziehung

$$\sigma_m = 1{,}414 \frac{\tilde{\mu}}{\mu'}$$ wertvoll sein.

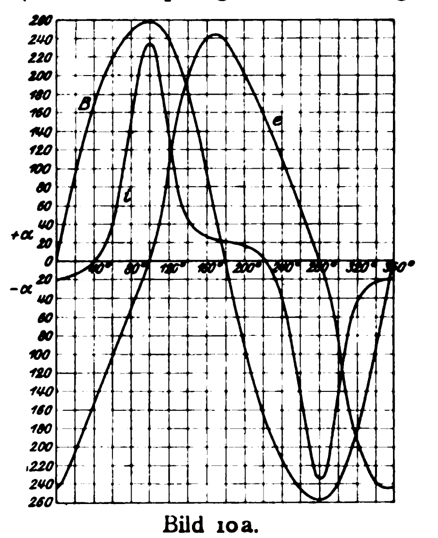


Bild 10a.

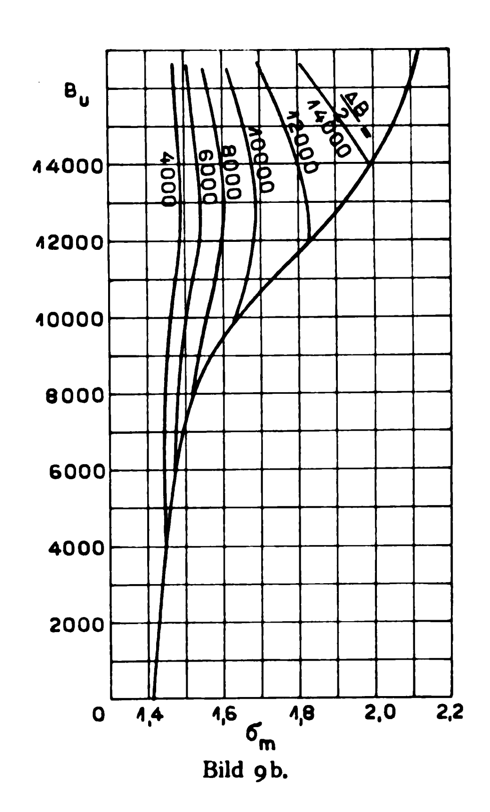


Bild 9b.

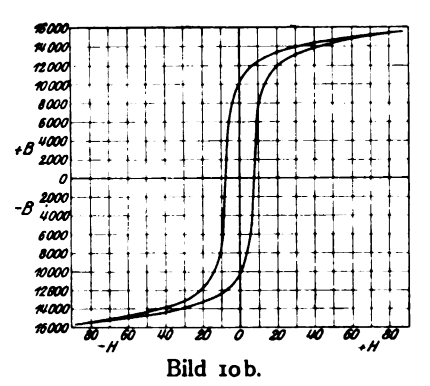


Bild 10b.

4. Dynamische Versuche.

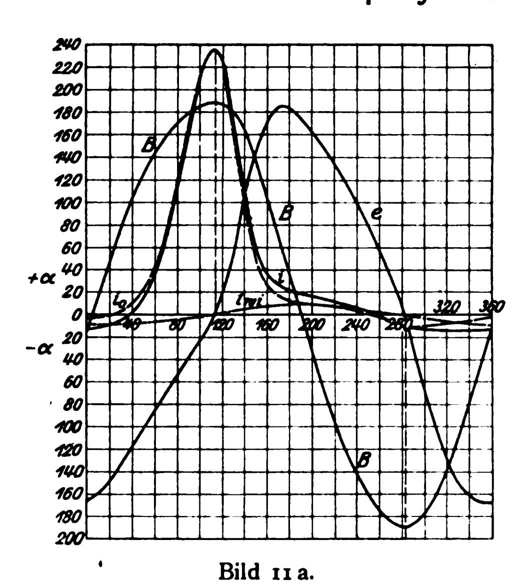


Bild 11a.

Bei periodisch sich ändernder MMK erfolgt der magnetische Ausgleichsvorgang immer in Form eines Kreisprozesses. Wird die MMK durch Wellenstrom erzeugt, so kann nur die Wechselkomponente einen magnetischen Kreislauf hervor-

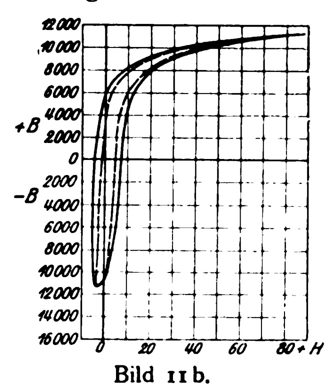


Bild 11b.

rufen. Die Gleichstromkomponente hat bei Eisen insofern einen Einfluß, als durch ihre Größe die Lage des magnetischen Ausgleiches bestimmt wird, ob er im proportionalen Teil der Charakteristik stattfindet, weiter ins Knie oder ins Sättigungsgebiet vorgeschoben wird. Die Hystereseschleifen müssen hier punktweise aus zeitlich zusammengehörigen Werten der Kurven der MMKe und der Induktion konstruiert werden (Bild 10 und 11). Letztere muß punktweise abgeleitet werden, da die induzierte Spannungskurve mehr oder weniger von der Sinusform abweichen kann. Strom- und Spannungskurven wurden experimentell nach dem Kontaktmacherverfahren ermittelt. [Vgl. Handb. II, 4, S. 96 u. f.; ETZ 1905 S. 503; Hirschauer, Dissertation München 1910. Die Permeabilität des Eisens bei techn. Wechselströmen].

Die Auswertung der Versuche sei an zwei Beispielen gezeigt. An der Aufnahme der symmetrischen Hystereseschleife in Bild 10a, b und der unsymmetrischen Schleife in Bild 11a, b.

In Bild 12 und 13 sind folgende der durchgeführten dynamischen Versuche zusammengestellt.

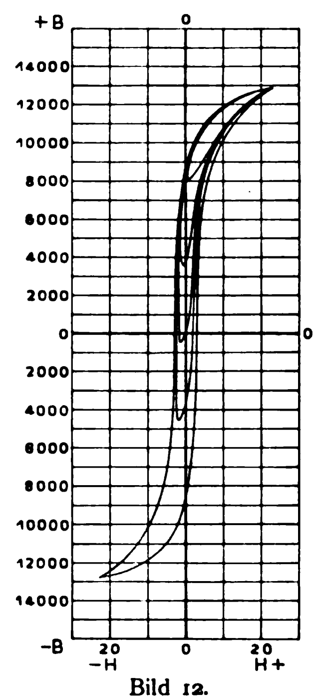


Bild 12.

H′	H⁰	B′	B⁰	Bild
+ 22,7	—	12 810	—	12
22,84	— 2,55	8 720	— 4 630	„
22,65	— 1,82	6 650	— 490	„
22,84	— 1,32	4 630	+ 3 550	„
22,5	+ 0,46	2 390	+ 8 030	„
+ 88,7	—	15 500	—	13
+ 87,2	— 30,90	14 570	— 13 640	„
+ 88,7	— 5,27	11 370	— 7 240	„
+ 89,3	— 3,6	6 540	+ 2 420	„
+ 88,9	— 0,075	3 990	+ 7 520	„
+ 89,3	+ 4,14	2 440	+ 10 620	„
+ 89,5	+ 18,6	1 160	+ 13 180	„

Hierin bedeutet:

H′ = Höchstwert der spez. MMK der Hystereseschleife
H⁰ = Minimalwert „ „ „ „ „
B′ = Höchstwert der Induktion.

Für Wechsel- und Wellenstromversuche sind die induzierten Spannungskurven bis auf kleinere Abweichungen nahezu symmetrisch und sinusförmig. Infolgedessen bleiben es auch die Induktionskurven. Die daraus abgeleiteten Hystereseschleifen sind damit ebenfalls zu einer Achse symmetrisch (Bild 10 b und 11 b). Für die Wellenstromaufnahmen verschieben sich die i- bzw. H-Kurven und also auch die Schleifen einseitig nach Größe und Richtung der Gleichstromkomponente. Schneidet diese die Zeitachse nicht mehr, so bleibt auch die Hystereseschleife vollkommen auf einer Seite der Ordinatenachse liegen. Die sämtlichen Schleifen eines Systems haben ihren Höchstwert von B und H, ihren Ursprung, gemeinsam. Sie müssen alle darauf bezogen, d. h. parallel zur H-Achse bis zu diesem Punkte verschoben werden. Diese auf den Ursprung bezogenen Minimalwerte sind in der Zahlentafel mit H^0 und B^0 bezeichnet, zwei verschobenen Systeme in den Bildern 12 und 13 zusammengestellt. Wie die statischen Aufnahmen beweisen auch diese Versuche, daß die Hystereseschleifen eines Systems vollständig innerhalb die zugehörige symmetrische fallen. Doch ist hier eine bemerkenswerte Abweichung näher zu betrachten. Hier



decken sich nicht mehr vollkommen alle absteigenden Hysteresekurven desselben Systems mit der symmetrischen. Im Sättigungsgebiet bis zum Knie sind die Abweichungen gering, im steilabfallenden Teil werden sie größer und am bezeichnendsten treten sie in der Nähe des Minimalpunktes hervor. Die scharfe Spitze verschwindet hier vollkommen. Ausgenommen scheint hiervon nur die zweitgrößte und die kleinste Schleife des Bildes 13 zu sein, deren Minimalpunkte schon außerhalb der Knieinduktionen liegen. Dieses Abschleifen der Spitzen wurde für symmetrische Hystereseschleifen von Ewing, Gumlich und Rose (ETZ 1905, S. 503) eingehend untersucht. Die Ursache sehen sie in der Viskosität und in der Ausbildung von Wirbelströmen, die eine Verbreiterung der Schleife bewirken.

Durch die Wahl der Eisenblechdicke mit $\delta = 0{,}307$ mm konnte die Wirkung der Wirbelströme auf ein geringes Maß zurückgedämmt, jedoch nicht vollständig aufgehoben werden. Betrachtet man die Wirbelströme lediglich als Strömung infolge

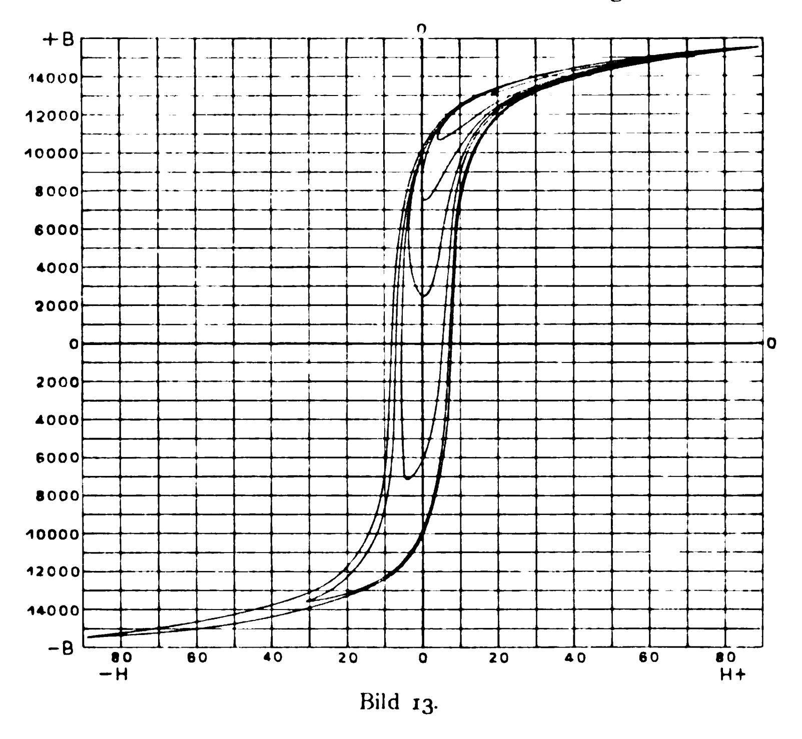


Bild 13.

der induzierten EMK, also ohne eine mögliche Phasenverschiebung, so verlaufen beide phasengleich und proportional. Folglich sind die Wirbelströme gleich Null, wenn die Spannung gleich Null oder die Induktion ein Maximum ist. Damit können die Wirbelströme keinen Einfluß auf die Umkehrpunkte selbst ausüben, was auch die Versuche bewiesen haben. Die Einwirkung macht sich am deutlichsten in der Nähe der Minimalpunkte der unsymmetrischen Schleifen geltend, wenn diese in den steil abfallenden Bereich zu liegen kommen, und zwar weil:

1. Im Zeitpunkt des Nullwertes der Induktionskurve die Stromstärke selbst klein ist, so daß schon geringe Wirbelströme eine starke Änderung hervorrufen können;

2. Zur gleichen Zeit die Spannungs- und folglich auch die Wirbelstromkurve den größten Wert hat.

Bild 11 zeigt diese Verhältnisse deutlich. Die Wechselstromkomponente des Wellenstromes beträgt $\tilde{J}_w = 1{,}092$ Amp. Die Wirbelstromstärke sei bei den dünnen Blechen zu etwa 10% also zu 0,10 Amp. angenommen. Daraus ergibt sich mit



dem Scheitelfaktor 1,41 die eingezeichnete Kurve i_{wi}. Diese von der Gesamtstromkurve i subtrahiert liefert die Differenzkurve i_0. Sie senkt sich im abnehmenden Teil und hebt sich im zunehmenden. Bei dem Nullwert der Spannungskurve e, etwa bei 284°, erscheint wieder die spitze Stromform, die durch die Überlagerung der Wirbelströme vollkommen verschwunden war. Diese starke Veränderung ist dadurch möglich, daß in diesem Teile die Wirbelströme 66% der i-Kurve ausmachen. Mit der Zurückgewinnung der unteren Stromspitze tritt bei der Hystereseschleife auch der untere Umkehrpunkt mit seiner ausgeprägten Spitzenform wieder auf. Die unsymmetrische Hystereseschleife wird wieder schmal und erhält seinen charakteristischen Verlauf, wie bei den statischen Versuchen. Ebenso lassen sich auch bei allen anderen Wellenstromaufnahmen die Abweichungen nur auf die Wirbelströme zurückführen. In Übereinstimmung mit Hirschauer sind bei diesen mit 100 Wechsel aufgenommenen Magnetisierungsversuchen keine anderen meßbaren Erscheinungen vorhanden, die eine Erklärung durch die Theorie der Viskosität rechtfertigen würden.

5. Hysterese-Arbeit.

Steinmetz zog aus seinen Versuchen über die Energieverluste durch magnetische Hysterese die Schlußfolgerung, daß diese nur von der Amplitude des magnetischen Kreisprozesses nicht aber von den Absolutwerten der Induktion abhängen [ETZ 1892 S. 136, 519]. Er stellte für die Hysteresearbeit die Gleichungen auf:

$$A = \eta (B')^{1,6} \text{ für symmetrische Hysterese,}$$

$$A = \eta \left(\frac{B' - B^0}{2}\right)^{1,6} \text{ für unsymmetrische Hysterese,}$$

[η = Hysteresekoeffizient].

Diesen Gleichungen stehen Untersuchungen von Niethammer [ETZ 1898 S. 669] und Holm (Dissertation Berlin 1912: Untersuchungen über magnetische Hysterese) schroff gegenüber. Bei Niethammer schwankt bei einem Induktionsintervall von 278 bis 2042 der Steinmetzsche Koeffizient zwischen 0,00192 und 0,00686. η nimmt also um den 3fachen Betrag zu. Daraus schließt er:

1. Daß der Hystereseverlust auf gleiche Induktion bezogen, bei teilweiser Ummagnetisierung wesentlich größer ist als bei voller zyklischer;

2. Daß das Steinmetzsche Gesetz durchaus unrichtig ist, da sowohl η ganz andere absolute Werte annimmt als auch keineswegs konstant ist.

Holm untersucht diese Frage eingehender und kommt zu den gleichen Ergebnissen.

Bevor die mit dem Drehspulenapparat durchgeführten Versuche für die Ummagnetisierungsarbeit ausgewertet werden können, muß eine Korrektur wegen der Scherungskurven des Apparates vorgenommen werden. Nach den Versuchen der Physikalisch-technischen Reichsanstalt sind die Scherungslinien Kurven, die nach beiden Seiten ergänzt selbst wieder eine sehr schmale Hystereseschleife geben [Handb. II, 4, S. 261, Bild 247]. Für das magnetisch harte Versuchsmaterial ist ihre Breite etwa 5,6 H-Einheiten bei $B' = 16500$. Um eine vollständig einwandfreie Korrektur durchführen zu können müßten für alle symmetrischen und unsymmetrischen Versuche entsprechende Scherungshystereseschleifen bekannt sein, was nicht der Fall ist. Deshalb wurde als Notbehelf auf das erweiterte Steinmetzsche Gesetz zurückgegriffen. Da bei $B' = 16560$ die Ummagnetisierungsarbeit der Rohkurven des Probeeisens 150400 Erg und der Scherungsbetrag 5940 Erg, also nur 2,5% ausmacht, kann der Fehler, der durch obige Gleichung in die Rechnung kommt, nicht größer als 0,5% sein. Demnach ist die Scherungskorrektur

$$A_s = \eta_s \left(\frac{B' - B^0}{2}\right)^{1,6} \quad [\eta_s = 0,00106]$$

Zahlentafel 2.

Hysteresearbeit.

$$A = \eta \left(\frac{\Delta B}{2}\right)^{1,6} \text{Erg.}$$

Bild 14 bis 16.

B′ CGS	B° CGS	$\frac{\Delta B}{2} = \frac{B' - B^0}{2}$ CGS	A_r Erg	A_s Erg	$A = A_r - A_s$ Erg	η aus $A = \eta \left(\frac{\Delta B}{2}\right)^{1,6}$	X aus $A = \eta_m \left(\frac{\Delta B}{2}\right)^x$
4 000	− 4 000	4 000	9 947	616	9 331	0,01515	1,533
„	− 2 000	3 000	5 427	389	5 038	0,01380	1,556
„	0	2 000	2 340	203	2 137	0,01117	1,525
„	+ 2 000	1 000	477	67	410	0,00649	1,440
7 850	− 7 850	7 850	39 105	1 812	37 293	0,02185	1,611
„	− 4 100	5 975	22 282	1 170	21 112	0,01916	1,573
„	+ 50	3 900	9 947	603	9 344	0,01644	1,577
„	+ 4 000	1 925	2 546	191	2 355	0,01309	1,547
„	+ 5 950	950	684	62	622	0,01070	1,511
11 020	− 11 020	11 020	77 987	3 116	74 871	0,02552	1,649
„	− 7 925	9 472	57 296	2 446	54 850	0,02382	1,640
„	− 3 975	7 498	36 048	1 683	34 365	0,02169	1,610
„	+ 25	5 498	20 610	1 024	19 586	0,02030	1,603
„	+ 3 925	3 548	9 470	508	8 962	0,01872	1,592
„	+ 8 000	1 510	2 148	129	2 019	0,01655	1,576
13 200	− 13 200	13 200	107 270	4 645	102 625	0,02620	1,630
„	− 8 000	10 600	68 914	2 928	65 986	0,02393	1,623
„	− 4000	8 600	44 812	2 095	42 716	0,02164	1,609
„	− 150	6 675	28 250	1 397	26 853	0,02041	1,603
„	+ 4 000	4 600	14 801	770	14 031	0,01935	1,597
„	+ 7 800	2 700	6 096	328	5 768	0,01866	1,593
„	+ 10 000	1 600	2 388	142	2 246	0,01768	1,577
15 000	− 15 000	15 000	125 730	5 103	120 627	0,02510	1,627
„	− 12 000	13 500	102 020	4 312	97 708	0,02406	1,621
„	− 8 025	11 512	74 326	3 341	70 985	0,02256	1,614
„	− 4 000	9 500	50 930	2 457	48 473	0,02095	1,607
„	+ 25	7 488	33 104	1 679	31 425	0,01987	1,601
„	4 000	5 500	19 051	1 025	18 026	0,01868	1,593
„	8 000	3 500	8 674	497	8 177	0,01746	1,585
„	12 000	1 500	1 910	128	1 782	0,01476	1,562
16 560	− 16 560	16 560	150 400	5 940	144 460	0,02566	1,629
„	− 11 800	14 180	108 700	4 664	104 036	0,02369	1,619
„	− 8 100	12 330	80 055	3 729	76 326	0,02173	1,609
„	− 4 200	10 380	56 819	2 832	53 987	0,02024	1,603
„	+ 100	8 230	37 083	1 953	35 130	0,01910	1,595
„	4 000	6 280	22 918	1 267	21 651	0,01814	1,592
„	8 250	4 155	11 300	654	10 646	0,01727	1,584
„	12 150	2 205	3 820	237	3 583	0,01602	1,573

und der Reinbetrag A der Hysteresearbeit berechnet sich aus dem Rohwert A_r zu: $A = A_r - A_s$. Die Versuchsergebnisse enthält Zahlentafel 2 und das Bild 14.

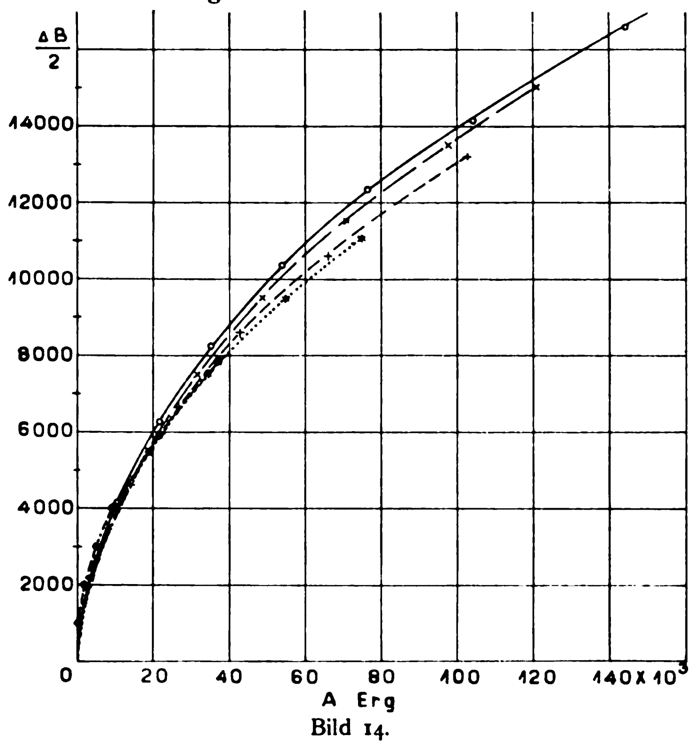


Bild 14.

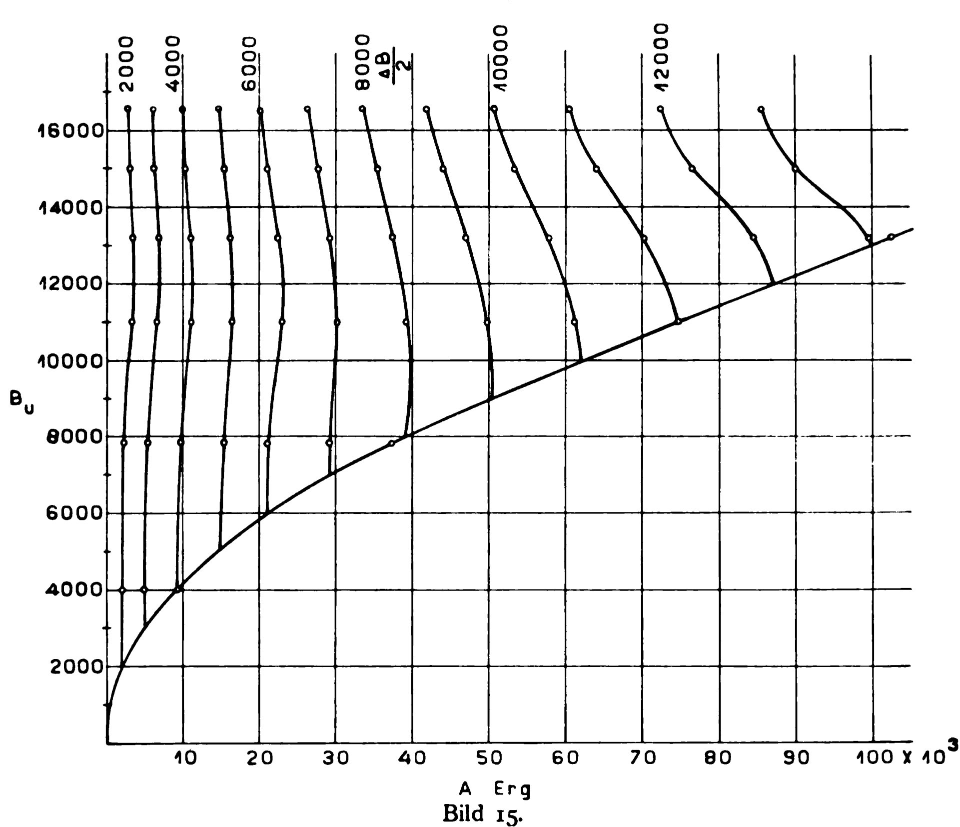


Bild 15.

Die Ummagnetisierungsarbeit der Schleifen eines jeden Systems liegen auf Kurven, die scheinbar gesetzlos neben- und durcheinander laufen. Würde man eine einzige mittlere Kurve annehmen, so hätte man das Steinmetzsche Ergebnis. Trägt man jedoch für konstantes Induktionsgefälle $\frac{\Delta B}{2}$ die Hysteresearbeit A abhängig von der Ursprungsinduktion B_u des Systems auf, so tritt eine auffallende Gesetzmäßigkeit zutage (Bild 15). Wären η und der Exponent konstant und A unabhängig von B_u, so müßten diese Kurven als Gerade parallel zur B_u-Achse verlaufen. Unter der Voraussetzung, daß der Exponent konstant und gleich 1,6 sei,

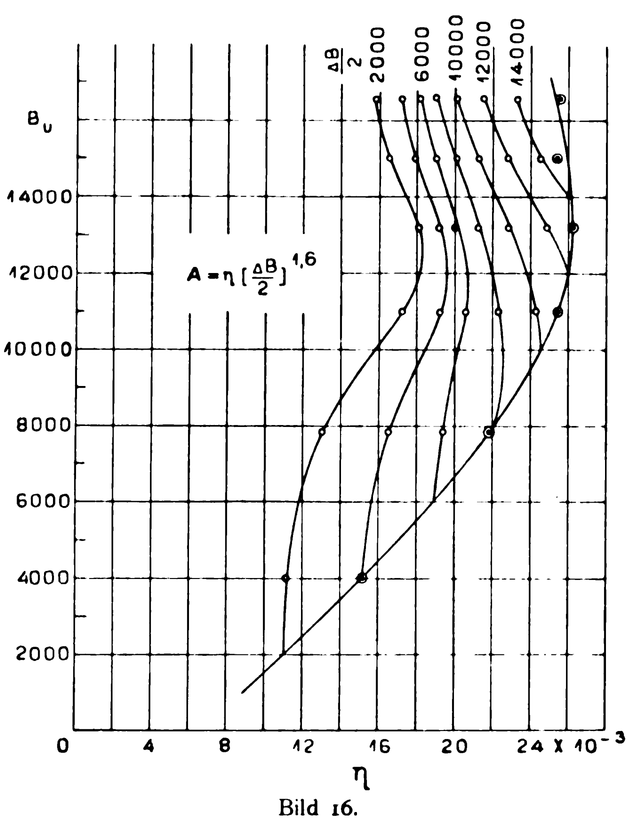


Bild 16.

wurde aus der Steinmetzschen Gleichung η berechnet (Zahlentafel 2, Bild 16). Der kleinste Wert ist 0,00649, der größte 0,0262; der größte absolute Unterschied ist 0,01971, zwischen den Werten eines Systems 0,01115. Der Koeffizient nimmt um den 2,5 bis 3fachen, absolut sogar um den 4fachen Betrag zu.

Bei der Darstellung der Hysteresearbeit auf Logarithmenpapier gehen alle $A \Big/ \frac{\Delta B}{2}$ Linien, durch den Punkt mit den Koordinaten $\frac{\Delta B}{2} = 6000$, $A = 22500$. Dem entspricht ein mittleres $\eta_m = 0{,}01955$, das als Konstante für die Untersuchung des Exponenten x angenommen wurde (Zahlentafel 2). Die graphische Darstellung ist ähnlich dem Bilde 16. Der kleinste Wert ist $x = 1{,}440$ der größte $x = 1{,}649$; die größte absolute Differenz 0,209; der größte Unterschied innerhalb eines Systems 0,116. Diese Ergebnisse stimmen also vollkommen mit Niethammer und Holm überein.

Die Versuchswerte würden weiterhin nach der Gleichung von Richter (ETZ 1910, S. 1241) $A = m \frac{\Delta B}{2} + n \left(\frac{\Delta B}{2}\right)^2$ analysiert. m stellt selbst wieder eine

Zahlentafel 3.

Hysteresearbeit.

$$A_{ber.} = (a + b\,B_u)\,\frac{\Delta B}{2} + (c + d\,B_u)\left(\frac{\Delta B}{2}\right)^2.$$

$\frac{\Delta B}{2}$ CGS	A Erg	$A_{ber.}$	$A - A_{ber.}$	%	$A'_{ber.} - \eta_m \left(\frac{\Delta B}{2}\right)^{1,6}$ $A'_{ber.}$	$A - A'_{ber.}$	%
4 000	9 331	9 600	— 269	— 2,80	11 336	— 2 005	— 17,7
3 000	5 038	5 281	— 243	— 4,60	7 155	— 2 117	— 29,6
2 000	2 137	2 242	— 105	— 4,68	3 739	— 1 602	— 42,9
1 000	410	482	— 72	— 14,9	1 233	— 828	— 66,7
7 850	37 293	37 297	— 4	— 0,01	33 338	+ 3 955	+ 11,8
5 975	21 112	21 772	— 660	— 3,03	21 542	— 430	— 1,99
3 950	9 344	9 668	— 324	— 3,35	11 110	— 1 766	— 15,9
1 925	2 355	2 409	— 54	— 2,24	3 518	— 1 163	— 33,1
950	622	642	— 20	— 3,12	1 136	— 514	— 45,3
11 020	74 871	70 281	+ 4 590	+ 6,53	57 364	+ 17 507	+ 30,6
9 472	54 850	52 252	2 598	4,97	45 024	+ 9 826	+ 21,8
7 498	34 365	33 217	1 148	3,46	30 980	+ 3 385	+ 10,9
5 498	19 586	18 303	1 283	7,00	18 857	+ 729	+ 3,87
3 548	8 962	8 002	960	11,98	9 357	— 395	— 4,22
1 510	2 019	1 713	306	17,86	2 385	— 366	— 15,3
13 200	102 625	96 980	+ 5 645	+ 5,82	76 570	+ 26 055	+ 34,0
10 600	65 986	63 470	2 516	3,97	53 910	+ 12 076	+ 22,4
8 600	42 716	42 507	209	0,49	38 580	+ 4 136	+ 10,7
6 675	26 853	26 268	585	2,23	25 720	+ 1 133	+ 4,41
4 600	14 031	13 113	918	7,00	14 166	— 135	— 0,95
2 700	5 768	5 016	752	15,0	6 044	— 276	— 4,76
1 600	2 246	2 051	195	9,51	2 617	— 371	— 14,2
15 000	120 627	120 966	— 339	0,28	93 950	+ 26 677	+ 28,4
13 500	97 708	98 743	— 1 035	— 1,05	79 364	+ 18 344	+ 23,2
11 512	70 985	72 760	— 1 775	— 2,44	61 516	+ 9 469	+ 15,4
9 500	48 473	50 486	— 2 013	— 3,99	45 238	+ 3 235	+ 7,15
7 488	31 425	32 262	— 837	— 2,59	30 913	+ 512	+ 1,66
5 500	18 026	18 229	— 203	— 1,11	18 868	— 842	— 4,46
3 500	8 177	8 100	+ 77	+ 0,95	9 155	— 978	— 10,7
1 500	1 782	1 972	— 190	— 9,64	2 360	— 578	— 24,5
16 560	144 460	142 656	+ 1 804	+ 1,26	110 060	+ 34 400	+ 31,2
14 180	104 036	106 034	— 1 998	— 1,88	85 870	+ 18 166	+ 21,2
12 330	76 326	81 244	— 4 918	— 6,05	68 660	+ 7 666	+ 11,2
10 380	53 987	58 674	— 4 687	— 7,99	52 130	+ 1 857	+ 3,56
8 230	35 130	38 021	— 2 891	— 7,61	35 960	— 830	— 2,3
6 280	21 651	23 089	— 1 438	— 6,23	23 330	— 1 679	— 7,2
4 155	10 646	11 063	— 417	— 3,77	12 046	— 1 400	— 11,6
2 205	3 583	3 806	— 223	— 5,86	4 371	— 788	— 18,0

lineare Funktion der Ursprungsinduktion nach der Gleichung $m = a + b\,B_u$ dar. Ebenso kann auch n genügend genau als die Gleichung einer Geraden $n = c + d\,B_u$ wiedergegeben werden. Folglich ist die Hysteresearbeit sowohl vom Induktionsgefälle, als auch von der Ursprungsinduktion abhängig nach der Gleichung:

$$A = (a + b\,B_u)\frac{\Delta B}{2} + (c + d \cdot B_u)\left(\frac{\Delta B}{2}\right)^2.$$

Für den untersuchten gehärteten Stahl ergab sich:

$$A = (-0{,}42 + 6{,}5625 \cdot 10^{-5} \cdot B_u)\frac{\Delta B}{2} + (0{,}00069 - 1{,}2667 \cdot 10^{-8} \cdot B_u)\left(\frac{\Delta B}{2}\right)^2.$$

Zur Beurteilung ihrer Gültigkeit wurde die Hysteresearbeit für die gleichen Werte von B_u und $\frac{\Delta B}{2}$ berechnet, für welche die Versuche durchgeführt wurden (Zahlentafel 3). Für die 38 Versuche ergibt sich das Mittel der Unterschiede zwischen dem berechneten Wert A_{ber} und dem Versuchswert A zu $\pm 4{,}93\,\%$ und die mittlere Abweichung hiervon zu $+0{,}225\,\%$. In diesen Differenzen sind noch die Fehler durch Versuch, Aufzeichnung, Planimetrierung usw. eingeschlossen, so daß der Fehler durch die Gleichung allein geringer sein dürfte. Wurden einige abnormale Ergebnisse weggelassen, so wäre das Mittel $\pm 3{,}2\,\%$ bzw. $-0{,}66\,\%$. Zum Vergleiche wurde auch die Hysteresearbeit nach der erweiterten Steinmetzschen Gleichung berechnet (Zahlentafel 3 — A'_{ber}). Diese Differenzen sind wesentlich größer. Das Mittel beträgt $\pm 17{,}49\,\%$, die mittlere Abweichung hiervon — 2,05 %. Unterschiede von mehr als 20 % treten 14 mal, von mehr als 30 % 7 mal auf; nur 12 Versuche bleiben unter 10 %. Bei der erweiterten Richterschen Gleichung sind nur für 4 Versuche die Unterschiede größer als 10 %.

6. Hysteretischer Phasenwinkel α.

Nach Steinmetz [ETZ 1895, S. 667] kann geschrieben werden:

$$\sin\alpha = \frac{4 \cdot \eta}{B^{0,4}}\mu = \frac{4 \cdot \eta \cdot B}{B^{0,4} \cdot H} = \frac{4 \cdot \eta \cdot B^{1,6}}{B \cdot H} = \frac{4 \cdot A}{B \cdot H} = \frac{4 \cdot A}{\frac{\Delta B}{2} \cdot \frac{\Delta H}{2}}.$$

Die hieraus berechneten Winkel α liegen zwischen 2° und 24°. Die erste Gleichung läßt erkennen, daß diese Kurven ähnlich verlaufen müssen wie die μ-Kurven der Bilder 7 und 8 und daß für α auch die gleichen Schlüsse gelten.

7. Wellenstromtransformation.

Das von einem Wellenstrom erzeugte Wellenfeld B_w zerfällt in zwei Komponenten, in das Gleichfeld $\overline{B}_w$, das von der Gleichstromkomponente herrührt, und in das Wechselfeld $\tilde{B}_w$, das die Wechselstromkomponente erzeugt. Das Gleichfeld ist der Größe nach von der Zeit unabhängig und kann keine induzierende Wirkung ausüben. Die induzierte Spannung, die nur eine Folge des Wechselgliedes sein kann, wird durch das Gleichfeld nicht beeinflußt, solange die Permeabilität des Feldmediums eine Konstante, gewöhnlich 1 ist. In diesem Falle ist die Magnetisierungscharakteristik des Feldträgers eine Gerade und die erzeugte Induktionsdifferenz unabhängig von der Größe des Absolutwertes. Eine MMK von z. B. $\Delta H = 200$ erzeugt immer ein Induktionsgefälle von $\Delta B = 200$, gleichgültig, ob die Induktionsschwankung zwischen — 100 und + 100, zwischen 900 und 1100 oder 19900 und 20100 stattfindet. Bei dem dynamisch untersuchten Eisenring ruft eine konstante Differenz der spez. MMK von ΔH, bei einer mittleren Gleichkomponente von $\overline{H}_w$ und einem zugehörigen mittleren Gleichfeld $\overline{B}_w$ folgende Induktionsgefälle ΔB hervor:

Δ H	$\overline{H}_w$	$\overline{B}_w$	Δ B
10	0	0	17 200
„	5	8 600	10 750
„	10	10 750	3 300
„	20	12 700	1 400
„	40	14 350	500
„	60	15 000	270
„	80	15 500	200
„	100	15 820	140
„	120	16 080	120

Bei einer Transformation kann also durch die Wahl der Gleichstromkomponente, bei konstanter primärer Wechselstromstärke jedes beliebige Induktionsintervall und damit auf der Sekundärseite jede Spannung zwischen einem Maximum und dem Werte von nahezu Null erreicht werden.

Das Maximum wird erreicht bei symmetrischer Magnetisierung ($\overline{H}_w = 0$). Zur richtigen Bestimmung des Induktionsgefälles ist nicht die gewöhnliche Magnetisierungscharakteristik, sondern, wie aus den Betrachtungen über die Wellenstromhystereseschleifen hervorgeht, die absteigende

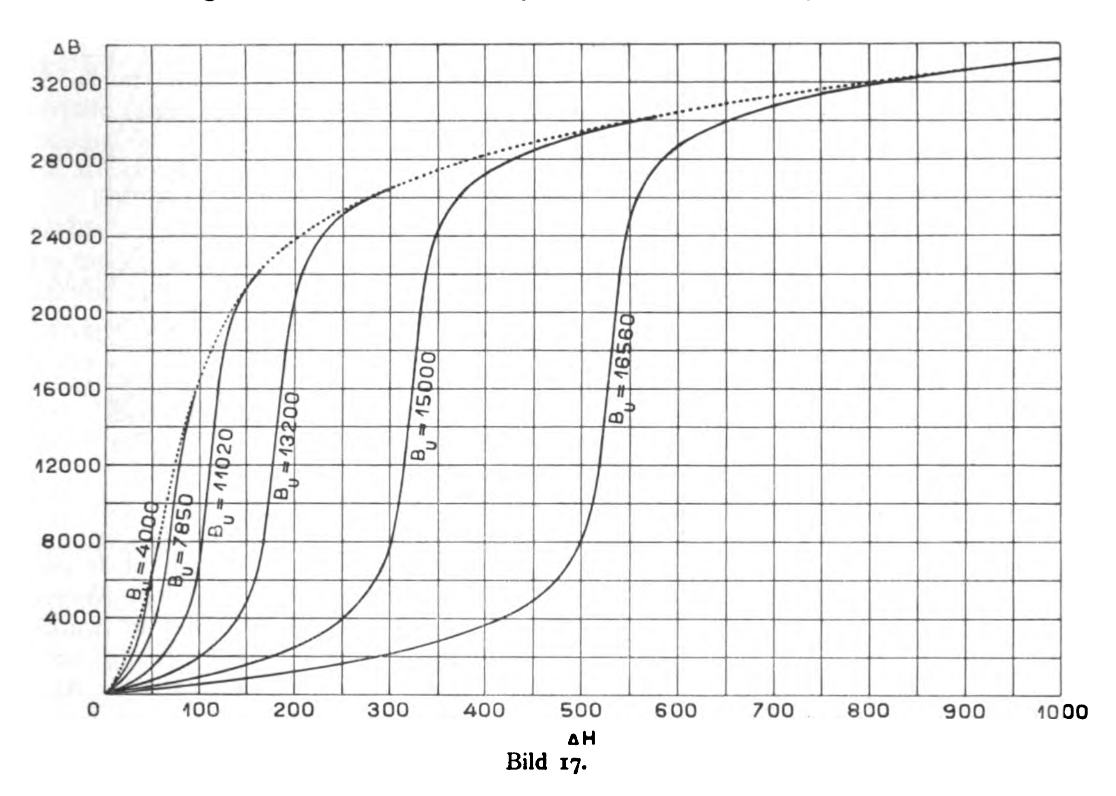


Bild 17.

Hysteresekurve maßgebend. Um das Induktionsintervall zu finden, muß also zur gegebenen Gleichstromkomponente des Wellenstromes der Höchstwert der Wechselkomponente addiert werden. Diese Summe, umgerechnet in die spez. MMK, gibt aus der Magnetisierungscharakteristik die Induktion des Ursprunges. Aus dem absteigenden Hystereseast für diesen Punkt kann erst die Größe des Induktionsgefälles gefunden werden. Betrachtet man den Ursprung als den Koordinaten-Nullpunkt eines neuen Systems (Achsen sind spez. MMK — Δ H und Induktionsdifferenz Δ B), so stellt die absteigende Hysteresekurve eine neue Magnetisierungscharakteristik, die unsymmetrische oder Wellenstromcharakteristik dar. Für jeden Ursprung hat der absteigende Ast einen anderen Verlauf, so daß es unendlich viele solche Charakteristiken gibt (Bild 17). Aus dieser Darstellung geht auch deutlich hervor, daß das Induktionsgefälle bei gegebener Wechselstromkomponente um so größer wird, je

kleiner die Gleichstromkomponente, d. h. je kleiner B_u ist, und daß es für reinen Wechselstrom das Maximum in der Wechselstromcharakteristik erreicht.

Für die Technik von größerer Bedeutung ist eine andere Art charakteristischer Kurven, die direkt den Zusammenhang zwischen den Komponenten des Wellenstromes und der induzierten Spannung $\tilde{E}_i$ zeigt (Bild 18 bis 20). Obwohl die Kurven

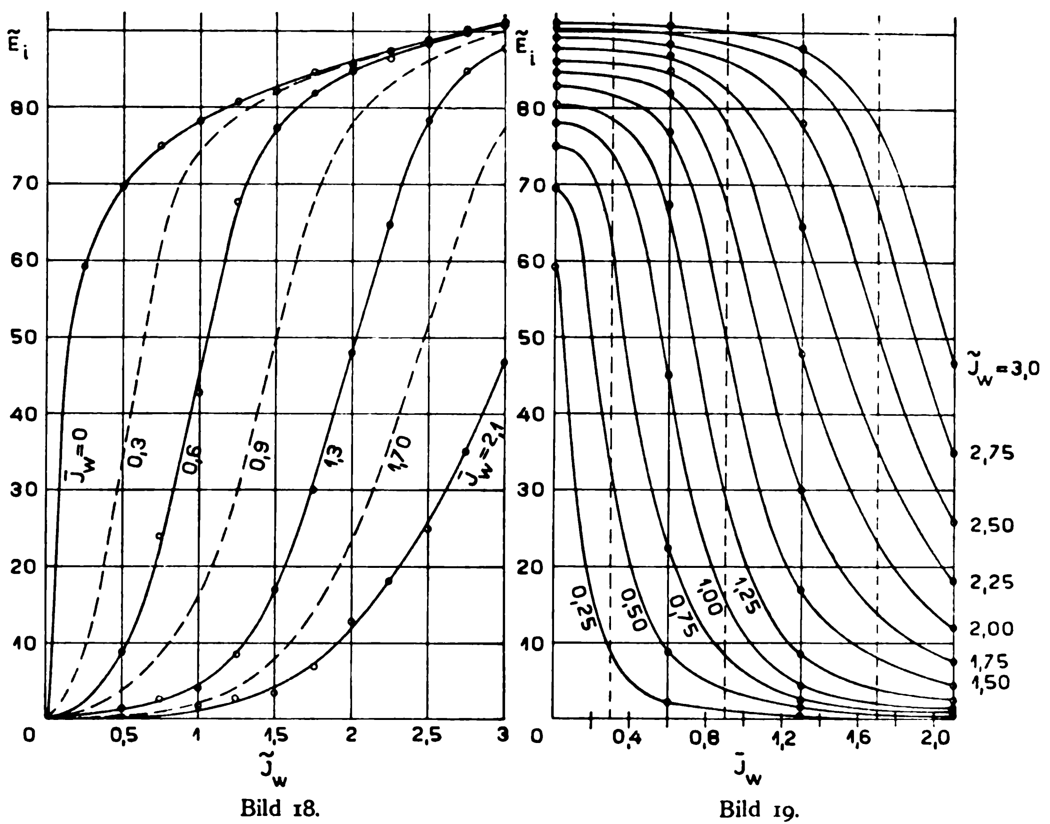


Bild 18. Bild 19.

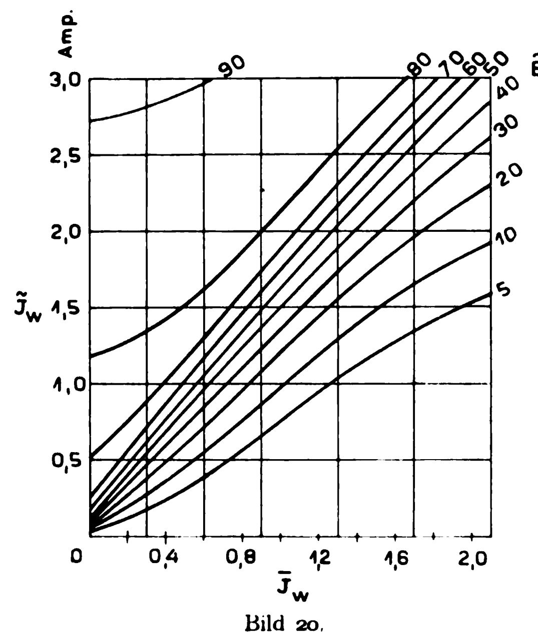


Bild 20.

der Bilder 17 und 18 äußerlich einander ähnlich, sind sie dem Wesen nach verschieden. In Bild 17 wurde für jede Kurve der Ursprung festgehalten und der magnetische Ausgleich erfolgte nur nach einer Seite. In Bild 18 bleibt die Gleichstromkomponente dieselbe, während die Magnetisierung nach beiden Seiten sich ändert. Auch aus diesem Bild geht deutlich hervor, daß, unabhängig von der Konstruktion des Transformators, nur durch die Wahl der Gleichstromkomponente die induzierte Spannung bei konstantem Wechselstrome in sehr weiten Grenzen geändert werden kann. Umgekehrt folgt daraus aber auch die starke Zunahme der Wechselstromkomponente oder des Magnetisierungsstromes mit der Vergrößerung der



Gleichstromkomponente bei konstanter Spannung $\tilde{E}_i$. Nach Bild 20 nimmt J_w zwischen 20 und 70 Volt, also im geradlinigen Teil der Charakteristik nahezu direkt proportional mit $\bar{J}_w$ zu.

Meßtechnisch sind diese Verhältnisse der Wellenstromtransformation besonders zu beachten bei Strom- und Spannungswandlern und bei Meßanordnungen, bei denen bei Wellenstrommessungen die Wechselstromkomponente heraustransformiert und an der Sekundärseite gemessen wird.

(Vergleiche eine Anwendung zur Drehzahlregelung von Kommutatormotoren durch Mendel Osnos ETZ 1918, S. 205).

II. Teil.

Wellenstrommessungen mit eisenhaltigen Meßgeräten.

8. Wellenstrommessung.

Hier handelt es sich weniger um die Messung von Wellenstrom, noch um Sonderfälle (siehe Handb. II, 4, S. 223 u. f.), sondern vielmehr in kurzem um die Feststellung des Einflusses, den die magnetisch einseitige Beanspruchung des Eisens auf die Meßresultate ausüben.

Für die Untersuchung kommen nur jene eisenhaltigen Instrumente in Betracht, welche auf elektromagnetischer Feldwirkung beruhen. Sind die Augenblickswerte der beiden auf das Zeigersystem wirkenden Felder n_I und n_{II}, so ist die momentane Antriebskraft: $f = c \cdot n_I \cdot n_{II}$. Diese Gleichung geht für Wellenfelder mit sinusförmiger Wechselkomponente $n_w = \bar{n}_w + \tilde{n}'_w \sin\alpha$ über in:

$$f = c\, n_{Iw} \cdot n_{IIw} = c\,(\bar{n}_{Iw} + \tilde{n}_I{}'_w \sin\alpha)\,[\bar{n}_{IIw} + \tilde{n}_{II}{}'_w \sin(\alpha - \psi)].$$

Dabei ist:

$\bar{n}_w$ = Gleichfeldkomponente und

$\tilde{n}'_w$ = Höchstwert der Wechselfeldkomponente,

ψ = Winkel zwischen den beiden Wechselfeldkomponenten.

Die Gleichung der resultierenden Wirkung ist:

$$F = c\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{\bar{n}_{Iw}\cdot\bar{n}_{IIw} + \bar{n}_{Iw}\,\tilde{n}'_{IIw}\sin(\alpha-\psi) + \bar{n}_{IIw}\,\tilde{n}'_{Iw}\sin\alpha + \tilde{n}'_{Iw}\cdot\tilde{n}'_{IIw}\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-\psi)\Big\}d\alpha\right]$$

$$F = c\,[F_1 + F_2 + F_3 + F_4].$$

Der resultierende Antrieb kann also in 4 Teile zerlegt werden. In

$$F_1 = \bar{n}_{Iw}\cdot\bar{n}_{IIw} = \bar{N}_{Iw}\cdot\bar{N}_{IIw}$$

kommt die Wirkung der beiden Gleichfelder, in F_4 jene der beiden Wechselfelder zum Ausdruck.

$$F_4 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{n}'_{Iw}\cdot\tilde{n}'_{IIw}\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-\psi)\,d\alpha = \tilde{N}_{Iw}\,\tilde{N}_{IIw}\cos\psi$$

[N = effektiver Mittelwert]. Die beiden mittleren Teile F_3 und F_4 enthalten das Produkt aus einem Gleichfeld mit einem Wechselfeld. Es sind rein pulsierende Felder ohne resultierende Antriebswirkung. Ihr Integral ist Null. Die Gleichung für den Gesamtantrieb lautet also:

$$F = c\,[\bar{N}_{Iw}\cdot\bar{N}_{IIw} + \tilde{N}_{Iw}\,\tilde{N}_{IIw}\cos\psi].$$

9. Drehspuleninstrumente.

Das Feld $N_{II\,w}$ wird von einem Dauermagneten hervorgerufen, ist also ein Gleichfeld. Dieses ruft mit der Gleichfeldkomponente der Meßspule den Antrieb hervor. $\tilde{N}_{II\,w}$ ist Null und damit $F = c\,\overline{N}_{I\,w} \cdot \overline{N}_{II\,w}$. Bei Wellenstrommessungen erzeugt die Wechselfeldkomponente $\tilde{N}_{I\,w}$ des Spulenfeldes mit $\overline{N}_{II\,w}$ ein pulsierendes Feld, das bei größeren Werten ein kräftiges Vibrieren des Zeigers veranlassen kann. Einseitige magnetische Erscheinungen der Sättigung können nicht in Frage kommen, denn die Induktion des Dauermagneten ist sehr gering. Andererseits ist die Stromstärke und die Windungszahl sehr gering, der Eisenquerschnitt sehr groß und der magnetische Widerstand durch den beiderseitigen Luftspalt von 2,2—3,8 mm nicht unbeträchtlich, so daß durch die Feldwirkung der Drehspule eine merkliche Änderung der Induktion des Dauermagneten ausgeschlossen ist. Diese Instrumente zeigen allein die Gleichspannungs- bzw. Gleichstromkomponente an ohne Einfluß durch die Wechselkomponente.

10. Weicheiseninstrumente.

Bei den Weicheiseninstrumenten wird der Weicheisenkern durch die MMK der Spulenwicklung je nach der Stromart zu einem Gleich-, Wechsel- oder Wellenstrom-Elektromagnet. Sie sind also zur Messung all dieser Stromarten verwendbar. Da keine merkbare Phasenverschiebung eintritt ist:

$$F = c\,(\overline{N}_{I\,w} \cdot \overline{N}_{II\,w} + \tilde{N}_{I\,w} \cdot \tilde{N}_{II\,w}).$$

Diese allgemeine Verwendbarkeit wird jedoch durch die ferromagnetischen Eigenschaften des Eisenkernes beeinträchtigt. Für Wellenstrommessungen kommen nur Instrumente in Frage, die eine einheitliche Skala für Gleich- und Wechselstrom haben.

Untersucht wurden zwei Weicheisenamperemeter verschiedener Bauart von der AEG und von S. u. H. Die Unterschiede zwischen den abgelesenen und den tatsächlichen Stromwerten lassen keine direkte Abhängigkeit mit der Gleichstromkomponente erkennen. Sie sind nicht größer als die Ablesefehler. Eine einseitige magnetische Beanspruchung des Weicheisenkernes durch die Gleichstromkomponente ist meßbar nicht wahrzunehmen, so daß diese Instrumente für Gleich-, Wechsel- und Wellenstrom mit der gleichen Genauigkeit zu gebrauchen sind.

Bei diesen wie bei allen Instrumenten, die die drei Stromarten zu messen gestatten, ist eine Eichung mit einer Stromkomponente, die ein Vielfaches des Meßbereiches beträgt, nicht durchführbar. Folglich kann die Gesamtinduktion kaum wesentlich höher werden als bei der Konstruktion angenommen wurde.

11. Dynamometrische Instrumente.

Bei den Voltmetern und Amperemetern dieser Bauart sind die Ströme in den beiden Spulen und daher auch ihre Felder in Phase. Folglich

$$F = c\,(\overline{N}_{I\,w} \cdot \overline{N}_{II\,w} + \tilde{N}_{I\,w} \cdot \tilde{N}_{II\,w}).$$

Für die Wattmeter gilt bei einem Phasenwinkel ψ zwischen den Spulenströmen und Feldern:

$$F = c\,(\overline{N}_{I\,w} \cdot \overline{N}_{II\,w} + \tilde{N}_{I\,w}\,\tilde{N}_{II\,w} \cos \psi).$$

Zusätzliche Phasenverschiebung durch Wirbelströme insbesondere bei Wattmetermessungen mit großem äußerem Phasenwinkel waren dadurch vermieden, daß die Firmen in ihren Instrumenten keine Metallteile eingebaut hatten. Erst die A.E.G. hat mit diesem Prinzip gebrochen und nicht nur bei den technischen, sondern auch bei den Präzisions-Dynamometern größere Eisenkörper verwendet. Bei den Präzisionsinstrumenten, bei denen das Innere eisenfrei und nur der Rückweg der Kraftlinien durch einen kräftigen Eisenkörper führt, können durch die geringe Windungszahl und den großen magnetischen Widerstand des Luftweges nur minimale



Induktionen im Eisen auftreten. Daher treten bei Wellenstrommessungen einseitige magnetische Beanspruchungen nicht auf. Ein Präzisionsamperemeter dieser Type wies denn auch bei der Untersuchung keinerlei meßbare, gesetzmäßige Abweichungen gegenüber den Sollwerten auf.

Bei den ferrodynamischen Instrumenten dieser Firma verlaufen auch die Kraftlinien im Innern durch Eisen. Nur zur Bewegung der Drehspule ist ein Luftspalt von je 5 mm gelassen. Der innere Phasenfehler ist hier wohl theoretisch vorhanden, praktisch jedoch durch die Dimensionierung, so gut wie vermieden. Die Kommutierungskurve, die an einem Wattmeter aufgenommen wurde, zeigte bei dreifacher Überlastung noch nichts von einer Sättigung, so daß auch keine einseitige oder gesättigte Magnetisierung auftreten kann. An dem untersuchten technischen Ampere- und Voltmeter hielten sich die Abweichungen vollkommen innerhalb der Ablesefehler der Versuchs- und Vergleichsinstrumente. Wenn auch die Differenzen den Anschein erweckten, als ob sie mit zunehmender Gleichstromkomponente größer würden, so konnte doch eine eindeutige und sichere Gesetzmäßigkeit nicht festgestellt werden.

12. Induktionsinstrumente.

Von diesen direktzeigenden Instrumenten wurden untersucht Drehfeldzeiger nach Ferraris von Siemens u. Halske und ein Induktionsamperemeter der AEG; von den rotierenden ein Maximal-Zeitrelais von Siemens u. Halske und ein Einphaseninduktionszähler.

Die Gleichung des Gesamtantriebes der stillstehenden Scheibe für diese Instrumente ist $F = c z \tilde{N}_I \cdot \tilde{N}_{II} \sin \psi$ (ψ = Winkel zwischen den beiden Feldern) [vgl. Schmiedel, Wirkungsweise und Entwurf der Motorelektrizitätszähler S. 7 u. f.]. Für Wellenstrom erhält man dieselbe Gleichung, so daß die Gleichstromkomponente keinen Einfluß auf das Anzeigen ausüben sollte. Die Einwirkung des Wellenstromes kann also nur sekundärer Natur sein und in einer Änderung der magnetischen und elektrischen Ausgleichsgrößen seine Ursache haben. Nach den Versuchen des ersten Teiles wäre zu erwarten, daß die Antriebsmomente und Ausschläge mit der Vergrößerung der Gleichstromkomponente, infolge der Eisensättigung und der damit verbundenen Verkleinerung der induzierten sekundären Ströme und Felder abnehmen würden. Mit Ausnahme eines Ferrarisvoltmeters (V_{II}) tritt bei den anderen Ferraris-Instrumenten gerade das Gegenteil ein.

13. Wellenstromeichung der Ferraris-Instrumente.

Untersucht wurden

1. Ein Ferraris-Voltmeter (V_I). Meßbereich 140 Volt.

Die Angaben des Instrumentes $\grave{E}_i$ vergrößern sich bei konstanter Wechselkomponente $\tilde{E}_w = 120$ Volt mit zunehmender Gleichspannungskomponente $\bar{E}_w$ und erreichen bei $E_w = 140$ Volt, das Maximum mit 142 statt 120 Volt. Die Zunahme beträgt also 22 Volt oder 18%. Den Verlauf zeigt Bild 21.

2. Ferraris-Amperemeter. Meßbereich 5 Ampere.

Die Eichung liefert das gleiche Ergebnis. Maximale Zunahme ist 0,35 Ampere oder 7,8%.

3. Ferraris-Wattmeter. Meßbereich 12,5 Ampere, 150 Volt.

Bei der Eichung wurde konstant gehalten die Wechselstromleistung mit

$$\grave{E}_w = 100 \text{ Volt}, \quad \tilde{J}_w = 10 \text{ Ampere}, \quad \tilde{W}_w = 1000 \text{ Watt}.$$

Zunächst blieb $\cos \varphi = 1$. Der Einfluß der Gleichstrom- und besonders der Gleichspannungskomponente ist deutlich aus Bild 24 zu erkennen. Der Charakter der Eichkurve ist innerhalb der Versuchsgrenzen von ausgesprochen quadratischer Art und folgt etwa der Gleichung:

$$W_i = \tilde{E}_w \tilde{J}_w - 1{,}2\,\bar{E}_w + 0{,}06\,\bar{E}_w^2 - 3\,\bar{J}_w + 0{,}375\,\bar{J}_w^2.$$

(W_i = Angaben des Instrumentes). Bei $\bar{J}_w = 10$ Ampere und $\bar{E}_w = 140$ Volt zeigte sich ein Ausschlag von 2000 Watt. Die Zunahme ist folglich 100%.

4. Ferraris-Voltmeter (V_{II}). Meßbereich 10 Volt, mit eingebautem Spannungstransformator 50 Volt.

Für den kleinen Meßbereich nahm der Anschlag für $\tilde{E}_w = 10$, $\bar{E}_w = 20$ von 10 auf 8,7 Volt, das ist um 1,3 Volt oder 13% ab (Bild 22). Für den Meßbereich von 50 Volt zeigte sich die größte Abnahme bei $\tilde{E}_w = \bar{E}_w$ = 50 Volt auf 25,6, das ist um 24,4 Volt oder 48,8%.

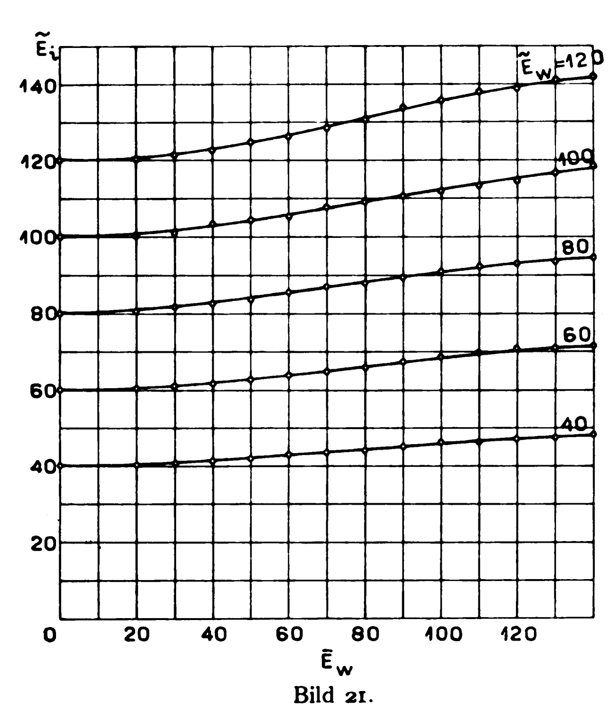


Bild 21.

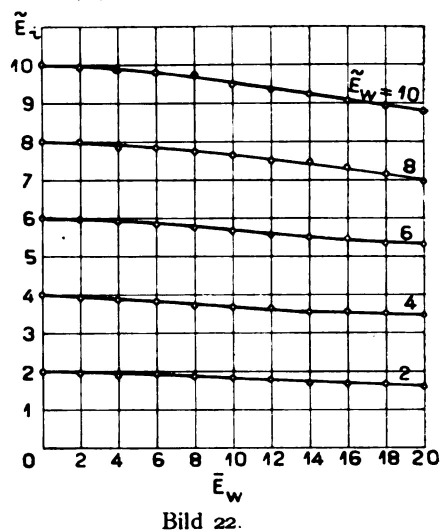


Bild 22.

14. Ferraris-Voltmeter V_I.

Dieses Instrument wurde einer sehr eingehenden Untersuchung unterworfen und dabei die Wechselkomponente mit $\tilde{E}_w = 100$ Volt konstant gehalten, $\bar{E}_w$ von 10 zu 10 bis 130 Volt geändert.

Der eine der beiden parallelen Stromzweige bestand aus dem großen Ohmschen Widerstand ab mit 3362 Ω (bei 18°) und den Instrumentenspulen bd mit 377 Ω; der andere aus dieser Drosselspule ac mit 241 Ω und den Instrumentenspulen cd mit 397 Ω. Im Laufe des Versuches nimmt R_{ab} um 2,6%, R_{bd} um 6,4%, R_{ac} um 13,8% und R_{cd} um 36,5% zu. Diese ungleichmäßige Erhöhung des rein Ohmschen Widerstandes bewirkt nicht nur bei den Gleich- sondern auch bei den Wechselströmen und -Spannungen eine andere Verteilung mit zunehmender Gleichspannung. Aufgenommen wurden die Gleich- und Wellenspannungen und Ströme und daraus die Wechselgrößen berechnet. Bild 23 zeigt die Ergebnisse an der Drosselspule. Mit diesen Größen wurde das Vektordiagramm des Voltmeters gezeichnet. Die Spannungen wurden in die arbeitleistenden Komponente E_{IIp} in Phase mit $\tilde{J}_c$ und in die dazu senkrechte Komponente $\tilde{E}_{IIL}$ zerlegt. Der Winkel φ_{II} ist dem Diagramm entnommen und damit berechnet

$$\tilde{E}_{IIp} = \tilde{E}_{ac} \cos\varphi_{II} \text{ und } \tilde{E}_{IIL} = \tilde{E}_{ac} \sin\varphi_{II} \text{ usw.}$$

Aus der Gleichung $\tilde{E}_{IIL} = \tilde{J}_c\, \omega\, L_{IIw}$ wurde der wirksame Selbstinduktionskoeffizient L_{IIw} und nach weiterer Zerlegung der ideelle Selbstinduktionskoeffizient $L_{II\mu}$ (Handb. II, 4, S. 39, 44) gefunden. Der wirksame hysteretische Phasenwinkel h_{II} zwischen

dem reinen Magnetisierungsstrom $\tilde{J}_{II\mu}$ und J_c wurde dem Diagramm entnommen und damit die Watt- und wattlose Komponente des Stromes berechnet. Der wirksame Widerstand R_w aus $E_{IIp} = \tilde{J} \cdot R_w$ besteht aus dem rein Ohmschen Widerstand der Spule R_r und dem äquivalenten magnetischen Reibungswiderstand R_{IIe}.

Die so gewonnenen Kurvenscharen geben ein deutliches Bild von den starken Veränderungen, welche die $\bar{E}_w$-Komponente und damit der Magnetisierungsbereich oder die Sättigung auf die einzelnen Widerstandsgrößen und damit auf die magnetischen und elektrischen Ausgleichsvorgänge hervorrufen. Die Versuche bei Wellenstrommagnetisierung zeigten diese Abhängigkeit des Selbstinduktionskoeffizienten, des Phasenwinkels, der Kurvenform und induzierten EMK von der Höhe der Eisen-

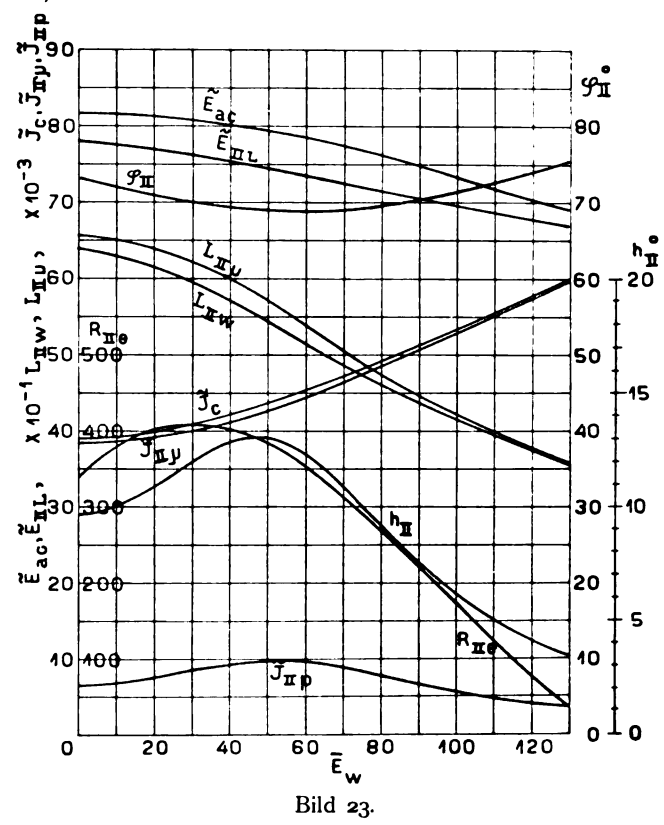


Bild 23.

sättigung in viel eindeutigerer Weise. Denn dort war nur eine Veränderliche vorhanden. Hier wird mit der Vergrößerung von $\bar{E}_w$ der Ursprung immer weiter in das Sättigungsgebiet vorgeschoben, und nur aus dem Verhalten der einzelnen Werte kann ein Schluß über die Lage gezogen werden. Danach dürfte bei ungefähr $\bar{E}_w = 40$ bis 60 Volt das Knie der magnetischen Charakteristik erreicht werden. Andere Faktoren konnten nicht beobachtet, sondern mußten als konstant angenommen werden. Ferner ist noch auf die Streuung hinzuweisen, die ebenfalls mit der Gleichstromkomponente sehr stark zunimmt. Ein Orientierungsversuch z. B. zeigte bei $\bar{J}_w = 0$ eine Streuung von 86,5%; bei $\bar{J}_w = 2$ Ampere 85,7%; bei $\bar{J}_w =$ 4 Ampere 83,5% und $\bar{J}_w = 6$ Ampere 71,4%.

Außerdem treten bei diesem Instrument noch weitere Verwicklungen auf. Jeder der zwei Stromzweige besteht aus zwei Widerständen, von denen je zwei verschiedener Art und Größe in Reihe geschaltet sind. Auf die Änderung der Ohmschen Widerstände ist bereits hingewiesen. Die Instrumentenpole haben verhältnismäßig

großen Eisenquerschnitt mit großem Luftspalt; die Drosselspule dagegen kleineren Querschnitt und Luftspalt. Dadurch ist die Sättigung in jedem der drei induktiven Widerstände anders und durch die elektrische Verkettung von je zwei Widerständen eine starke gegenseitige Abhängigkeit und Beeinflußung vorhanden. Da folglich eine einfache Formulierung nicht möglich ist, sei noch kurz auf einige Schlußfolgerungen hingewiesen, die auf die Größe des Antriebes gezogen werden können.

Der gesamte Wechselstromwiderstand in a c d

$$Z = \sqrt{(R_{Iw} + R_{IIw})^2 + \omega^2 (L_{Iw} + L_{IIw})^2}$$

zeigt die Tendenz abzunehmen, wie aus dem Verlauf der einzelnen Glieder zu sehen ist, und zwar verkleinert er sich von 2568 Ω_s auf 1720 Ω_s (R_{Iw} und L_{Iw} sind die Widerstände des Instrumentenspulenpaares, das mit der Drosselspule in Reihe geschaltet ist). Damit ist auch die wesentliche Vergrößerung des Stromes $\tilde{J}_c$ von 0,039 auf 0,060 Ampere erklärt. Ganz entsprechend ändern sich Widerstände und Ströme in a b d und die reinen Magnetisierungsströme

$$\tilde{J}_{I\mu} = \tilde{J}_b \cos h_I \quad \text{und} \quad \tilde{J}_{III\mu} = \tilde{J}_c \cos h_{III}.$$

Nimmt man in erster Annäherung die Wechselfelder proportional und in Phase mit J_μ an, so lautet die angegebene Antriebsgleichung:

$$F = c \cdot z \tilde{N}_I \tilde{N}_{III} \sin\psi = c' \cdot z \cdot \tilde{J}_{I\mu} \cdot \tilde{J}_{III\mu} \sin\psi.$$
$$= c' \cdot z (0{,}0253 + 1{,}03 \bar{E}_w^{2,9} \cdot 10^{-8} - 3{,}98 \bar{E}_w^{1,61} \cdot 10^{-6}) \cdot$$
$$(0{,}0369 + 7{,}84 \bar{E}_w^{2,12} \cdot 10^{-7}) \cdot (0{,}8988 - 2{,}41 \cdot \bar{E}^{1,65} \cdot 10^{-5}).$$

Die Gleichungen für $\tilde{J}_{I\mu} \cdot \tilde{J}_{III\mu}$ und $\sin\psi$ sind aus den Kurven gefunden. Werden die Glieder mit einem Faktor kleiner als 10^{-10} vernachlässigt, so wird:

$$F = c' z [0{,}00084 + \bar{E}_w^{1,61} \cdot 10^{-7} (0{,}00342 \bar{E}_w^{1,29} + 0{,}1782 \bar{E}_w^{0,51} - 1{,}320 - 0{,}225 \bar{E}_w^{0,04})].$$

Nach dieser empirischen Gleichung, der nur orientierender Charakter beizumessen ist, wird das Drehmoment größer, da die positiven Glieder mit $\bar{E}_w$ rascher zunehmen als die negativen, was auch die Wellenstromeichung bestätigt.

15. Ferraris-Amperemeter.

Die experimentelle und vektorielle Untersuchung lieferte hier ganz ähnliche Ergebnisse. Trotzdem die gesamte Wechselstromkomponente konstant gehalten wurde, änderten sich die beiden Teilströme durch die verschiedene Änderung der Wechselstromwiderstände in den beiden Stromzweigen. Der Selbstinduktionskoeffizient verringerte sich in dem einen Teilkreis um 7,7 %, in dem anderen um 30 %. Der eine Zweigstrom wird ständig kleiner, insgesamt um 5,2 %. Der andere vergrößert sich um 18,5 %. Der Winkel zwischen beiden nimmt zunächst etwas zu und fällt dann stark ab. Die Untersuchung wurde für eine Gleichstromkomponente von 0 ÷ 8 Ampere durchgeführt ($\tilde{J}_w = 5$ Amper = konstant). Der Verlauf der Kurven deutet das Knie der Charakteristik bei etwa $\bar{J}_w = 4$ Ampere an. Für $J_w < 4$ Ampere nehmen die sämtlichen Faktoren, welche das Antriebsmoment ausmachen, zu. Für $\bar{J}_w > 4$ Ampere steht dem geringen Abfall des einen Teilstromes eine starke Zunahme des anderen gegenüber. Die Zunahme des Antriebes wird hier durch ein starkes Sinken des Winkels verzögert.

16. Ferraris-Wattmeter.

Da die Vergrößerung des Drehmomentes in erster Linie in der Vergrößerung der Wechselfelder ihre Ursache hat, wurden hier zunächst jene oszillographisch untersucht, die auf die Instrumententrommel wirken. Die Eichkurven zeigen den überwiegenden Einfluß der Spannungsfelder. Daher wurde die Untersuchung unter den Polen der Spannungsspulen vorgenommen und dabei $\tilde{E}_w = 100$, $\tilde{J}_w = 8$, $\bar{J}_w = 10$ konstant gehalten und nur die Gleichspannungskomponente von 20 zu 20 bis 160 Volt



geändert. Diese Oszillogramme wurden dann nach Fourierschen Reihen zerlegt. Außer der Änderung der Kurvenform, die sich in der Ausbildung höherer Harmonischer, sowohl der Sinus- als der Cosinusglieder ausdrückt, zeigt sich der Einfluß der zunehmenden Gleichspannungskomponente besonders in der Vergrößerung der Sinusfaktoren a_1, a_2 und a_3. Am deutlichsten kommt dies zum Ausdruck bei a_1, dessen Verlauf ungefähr durch die Gleichung gekennzeichnet ist:

$$a_1 = c\,(1{,}0 + 5{,}4 \cdot \bar{E}_w^2 \cdot 10^{-5}).$$

Folglich nimmt die erste Harmonische der in der Trommel induzierten Spannung und damit auch der Ströme und Felder mit dem Quadrate von $\bar{E}_w$ zu.

Weiterhin wurden auch hier die elektrischen Ausgleichsvorgänge durch Aufstellung der Vektordiagramme des Spannungskreises bei offenem Stromkreis untersucht. Die Wechselspannung an den Enden der Görgesschen Brücke, in deren Zweige die Spannungsspulen eingeschaltet sind, nimmt ständig zu. Damit steigen auch sämtliche Teilspannungen, ausgenommen jene an der vorgeschalteten Drosselspule mit wachsendem $\bar{E}_w$. In allen Teilen haben die Wechselstromkomponenten steigende Tendenz. Die Zunahme schwankt zwischen 40 und 60%. Die natürliche Folge aus der Zunahme der primären und sekundären Ströme und Felder ist das wachsende Antriebsmoment auf die Trommel.

Beim Wattmeter wurde weiterhin eine Wellenstromeichung bei $\cos\varphi = 0{,}8$; $0{,}6$; $0{,}4$ und $0{,}2$ zwischen zugeführter Wechselspannungs- und Wechselstromkomponente durchgeführt. Aus der graphischen Darstellung Bild 24 läßt sich folgendes entnehmen. Je kleiner $\cos\varphi$ wird, desto mehr verschwindet das starke Ansteigen. Für $\cos\varphi = 0{,}6$ ist bereits bei $\bar{E}_w = 120$ Volt der Höchstwert erreicht, bei $\cos\varphi = 0{,}4$ wird fast nur

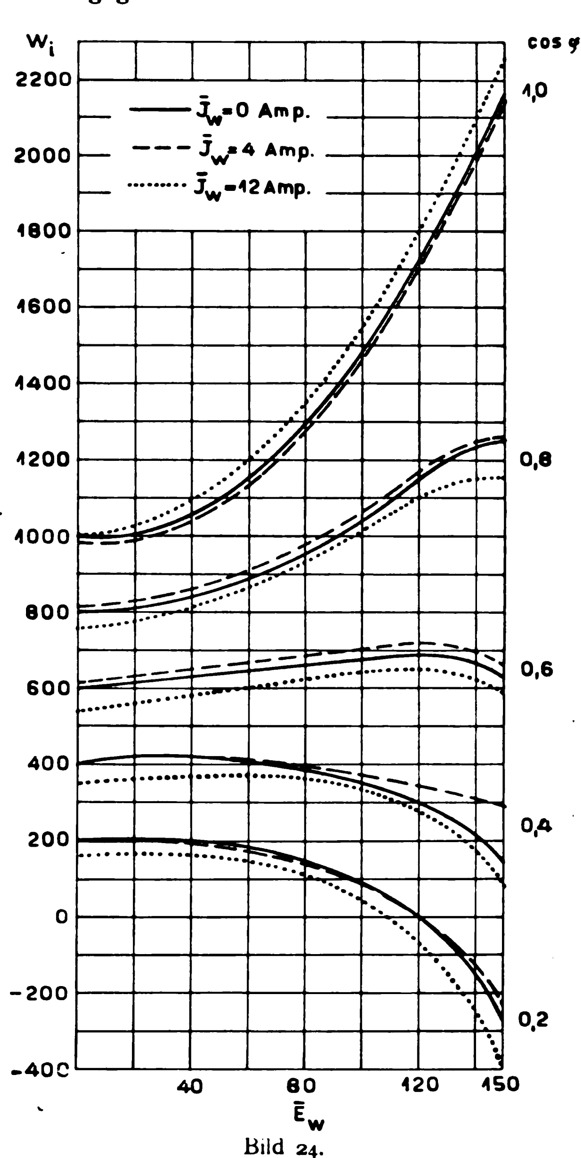


Bild 24.

mehr eine fallende Kurve wahrgenommen und für $\cos\varphi = 0{,}2$ werden die Werte nach kurzem horizontalem Verlauf immer kleiner und treten bei $\bar{E}_w = 100$ ins negative Gebiet über. Trotzdem noch positive Wechselstromleistung von 200 Watt aufgewendet wird, wie sie auch ein eingeschaltetes dynamometrisches Wattmeter angibt, zeigt das Ferraris-Wattmeter — 400 Watt an. Bemerkenswert ist ferner die Umlagerung der Kurven unter dem Einfluß der Gleichstromkomponente. Je größer der Winkel φ gewählt wird, um so kleiner wird der Winkel zwischen den Feldern, die vom Hauptstrom bzw. Spannungsstrom erzeugt werden. Damit

gewinnen kleine innere Winkeländerungen durch hysteretische Phasenverschiebung und Wirbelströme, wie sie von der Wellenstrommagnetisierung her bekannt sind, größeren Einfluß auf die Lagenbeziehungen der Vektoren zueinander. Bei sehr kleinem $\cos\varphi$ kann schließlich der Gesamtantrieb der Felder nicht nur Null, sondern sogar negativ werden und eine Änderung der Anzeigerichtung bewirken.

17. Ferraris-Voltmeter V_{II}.

Gegenüber dem Instrument V_I ist die Schaltung im eigentlichen Instrument mit 10 Volt Meßbereich insofern einfacher, als der eine Stromzweig nur aus dem horizontalen Spulenpaar besteht und bei der niederen Spannung keine Drosselspule erforderlich war. Der Eigenverbrauch mit nahezu $^1/_2$ Ampere ist auffallend hoch. Konstant gehalten wurde $\tilde{E}_w = 10$ und geändert $\bar{E}_w$ von 2 zu 2 bis 20 Volt. Im Stromzweig, der nur die Instrumentenspulen enthält, wächst sowohl der wirksame Ohmsche Widerstand, wie auch die wirksame Selbstinduktion ständig, so daß die Wechselstromkomponente abnehmen muß. Die Verminderung beträgt 21 % (von 0,261 bis 0,207 Ampere). Demgegenüber nimmt der Wechselstrom in dem zweiten Stromzweig, in dem mit den Spulen noch ein Ohmscher Widerstand von 42 Ω in Reihe liegt, nur sehr wenig, maximal 10 Milliampere zu. Der große Wechsel- und insbesondere der Gleichstromverbrauch mit maximal 1,35 Amp. verursacht eine starke Temperatur- und Widerstandserhöhung in den Primärteilen und in der Trommel und schiebt den magnetischen Ausgleich sehr bald in das Sättigungsgebiet. Die daraus folgende Verminderung der Primär- und Sekundärfelder macht eine Verkleinerung des Zeigerantriebes unvermeidlich.

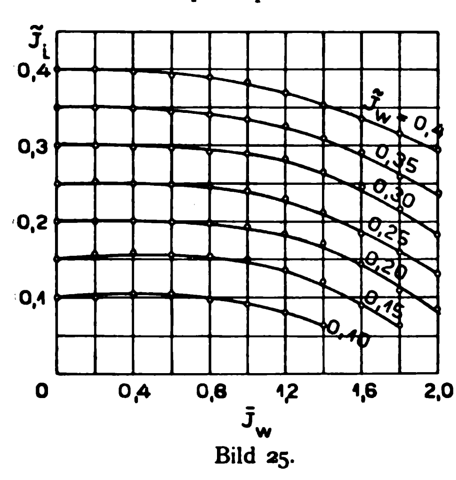


Bild 25.

Der Meßbereich von 50 Volt hat mit der bisherigen Untersuchung nichts mehr gemein, da hier ein kleiner Spannungstransformator vorgeschaltet ist. Im eigentlichen Instrument wird nur die Wechselspannung gemessen, die durch Wellenstromtransformation in der Sekundärwicklung induziert wird.

18. Induktionsamperemeter der AEG.

Dieses Instrument beruht auf der elektromagnetischen Schirmwirkung. Wird der Magnet mit Wellenstrom erregt, so haben wir Wellenstromtransformation. Durch die Verschiebung der Magnetisierung ins Sättigungsgebiet wird die induzierte EMK in Schirm und Scheibe kleiner. Daher nehmen die sekundären Ströme und Felder ab. Zu dieser Herabminderung des Antriebes tragen ferner noch die Vergrößerung der Streuung und des Ohmschen Widerstandes durch Erwärmung bei. In Bild 25 sind mit J_i die Angaben des Instrumentes bezeichnet.

19. Rotierende Induktionsinstrumente.

Bei den rotierenden Induktionsinstrumenten wirken auf die Trommel oder Scheibe außer den Antriebsmomenten noch die Bremsmomente. Letztere entstehen durch die Drehung der Scheibe im Gleichfeld $\bar{N}_M$ des Bremsmagneten und in den Primärfeldern N_I und N_{II}. Ist die resultierende Geschwindigkeit u, so ergibt sich aus der Entwicklung der Gleichungen für Wellenstrom der zeitliche Mittelwert der Bremsmomente für die Dämpfung zu:



$$B_1 = c_1\, u\,[\bar{N}_{I\,w}^2 + \bar{N}_{I\,w} \cdot \bar{N}_{II\,w} + \tilde{N}_{I\,w}^2 + \tilde{N}_{I\,w}\, \tilde{N}_{II\,w} \cos\psi]$$

$$B_2 = c_2\, u\,[\bar{N}_{I\,w} \cdot \bar{N}_{II\,w} + \bar{N}_{II\,w}^2 + \tilde{N}_{I\,w} \cdot \tilde{N}_{II\,w} \cos\psi + \tilde{N}_{II\,w}^2].$$

(Vergleiche: Schmiedel: S. 9 und Möllinger, Wirkungsweise der Motorzähler S. 14 und 29).

Das Bremsmoment der Bremsmagneten steht außerhalb des Einflusses der Wellenfelder und ist:

$$B_3 = c_4 \cdot u \cdot \bar{N}_M^2.$$

Damit wird das gesamte Bremsmoment:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = u\,[C_1\, \bar{N}_{I\,w}^2 + C_2\, \bar{N}_{II\,w}^2 + C_3\, \bar{N}_{I\,w}\, \bar{N}_{II\,w}$$
$$+ C_1\, \tilde{N}_{I\,w}^2 + C_2\, \tilde{N}_{II\,w}^2 + C_3\, \tilde{N}_{I\,w} \cdot \tilde{N}_{II\,w} \cos\psi + C_4\, \bar{N}_M^2].$$

Nach dieser Gleichung verursachen die Gleichfeldkomponenten eine quadratische Zunahme der Bremswirkung. Bleibt die Gleichfeldinduktion unterhalb des Sättigungsknies, so daß sie proportional mit den Gleichströmen zunimmt, so wächst auch das Bremsmoment quadratisch mit den Gleichstromkomponenten im Strom- und Spannungskreis.

20. Maximal-Zeitrelais.

Das Maximal-Zeitrelais von Seimens u. Halske wurde wegen der einfachen Bauart als Vertreter der Induktionsinstrumente mit Schirmwirkung gewählt. Dabei wurde nur der lamellierte Erregermagnet mit Schirmplatte, die Scheibe und der Bremsmagnet dem Versuche unterstellt. Alles andere war abmontiert. Die Wirkungsweise ist die gleiche wie beim Induktionsamperemeter der AEG. Zur Bestimmung des Einflusses des Wellenstromes auf die Antriebskraft wurde diese mit einem Torsionsfederdynamometer gemessen. Der Verlauf der Kurven ist vollkommen ähnlich jenen in Bild 25. Die Einwirkung der Bremsmomente wurde aus einer größeren Anzahl von Umdrehungen n bestimmt und daraus die Drehzahl $u = n/\text{sec}$ berechnet. Diese nimmt durch die Gleichfeldkomponente sehr rasch, maximal um 76% ab. Nach dem Bild 26 vollzieht sich der Induktionsausgleich bis zu $\bar{J}_w = 3{,}5$ unterhalb, über 7 Ampere vollkommen im Sättigungsgebiet.

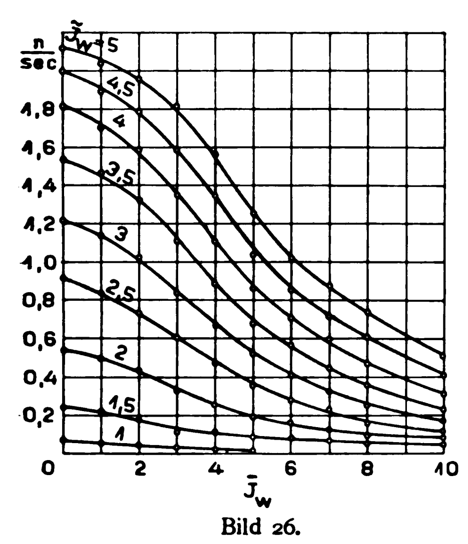


Bild 26.

21. Zähler.

Beim Einphasen-Induktionszähler der Isaria-Zählerwerke wurden bestimmt die Antriebskraft auf die Scheibe mit einem Torsionsfeder-Dynamometer und die Drehzahl n pro sec. Für $\cos\varphi = 1$ ändert sich der Scheibenantrieb nahezu linear, und zwar nimmt er bei konstanter $\bar{E}_w$ bei Vergrößerung des Gleichstromes um wenige % ab. Bei konstantem $\bar{J}_w$ sind die Kurven für zunehmendes $\tilde{J}_w$ nahezu horizontal, also fast unabhängig von E_w. Nur für kleines $\bar{J}_w$ und größeres $\tilde{J}_w$ steigen sie leicht an.

Für die Änderung des äußeren Phasenwinkels sind die Werte des Scheibenantriebes δ in Bild 27, die der spez. Drehzahl in Bild 28 eingetragen. Wird die äußere Phasenverschiebung sehr klein, so wiederholt sich für hohes $\bar{E}_w$ das gleiche wie beim Ferraris-Wattmeter. Trotz zugeführter positiver Arbeit wird der Antrieb negativ, der Zähler läuft rückwärts. Nach dem Verlauf der Kurven ist

das starke Abfallen und der negative Antrieb nur der Einwirkung des Spannungsknies zuzuschreiben. Die spezifische Drehzahl nimmt mit größer werdendem $\bar{J}_w$ etwa nach einer quadratischen Linie, mit zunehmendem $\bar{E}_w$ zunächst rascher und dann langsamer ab. Aus den Schaulinien können Schlüsse auf die Lage des magnetischen Ausgleiches gezogen werden. Die erzeugten primären und sekundären Wechselfelder im Stromkreis sind proportional $\tilde{J}_w$ und fast unabhängig von $\bar{J}_w$. Das Gesamtbremsmoment nimmt nach obiger Gleichung mit dem Quadrat der Gleichfelder, also

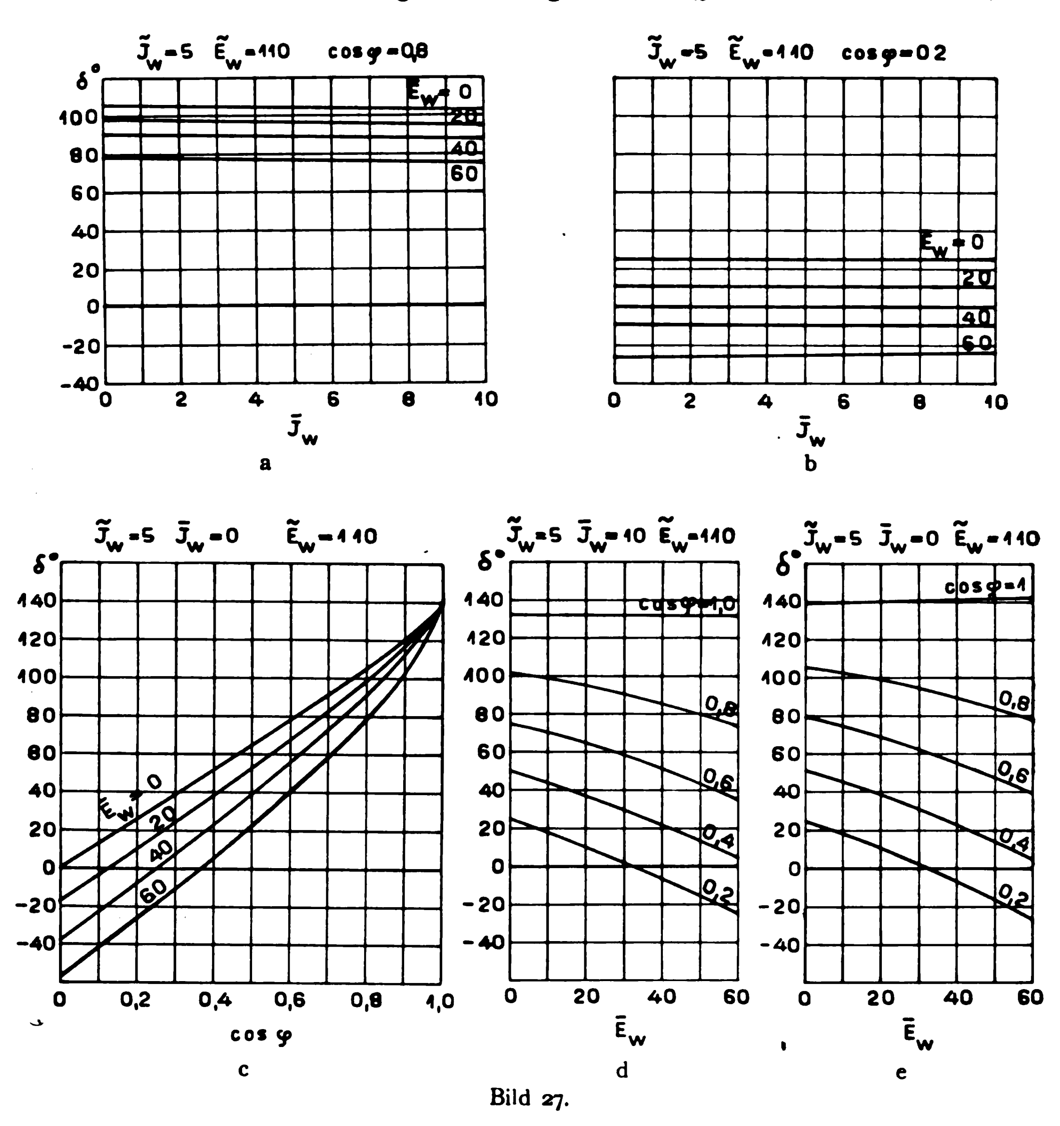


Bild 27.

auch der Gleichströme zu, oder die Drehzahl nimmt mit dem Quadrat von $\bar{J}_w$ ab. Im Spannungseisen reichen die Amplituden der Wechselinduktion bei normaler Betriebsspannung bis in die Nähe des Knies. Durch die hinzutretende Gleichkomponente tritt hier die Induktionsspitze sehr bald in das Sättigungsgebiet über und hat bei konstantem $\tilde{J}_w$ ein immer kleiner werdendes Induktionsgefälle zur Folge. Es ergibt sich eine rasche Abnahme der induzierten Felder, des Antriebes und noch vielmehr der Drehzahl. Die Verkleinerung, die maximal bis zu 40% beträgt, verzögert sich, wenn der magnetische Ausgleich ganz in den Sättigungsast vorgerückt ist.

22. Mechanische Erscheinungen.

Zum Schluß sei noch auf folgende Beobachtungen hingewiesen. Bei Wellenstrommessungen trat bei Zeigerinstrumenten mit sehr leichten drehbaren Systemen unter gewissen Verhältnissen der Gleich- und Wechselkomponenten ein sehr starkes Zittern und Vibrieren des Zeigers auf. Diese Schwingungen können mitunter Amplituden von einigen Skalenteilen haben, so daß die Zeigerenden nur mehr als dünner zitternder Schleier erkennbar sind. Diese Eigenart, die nicht nur bei eisenhaltigen, sondern auch bei eisenfreien Instrumenten auftrat, kann nur durch mechanische Resonanz zwischen der mechanischen Eigenschwingungsdauer des Systems und den magnetischen Antriebsimpulsen (vergleiche Teilantrieb $F_2 F_3$ und Drehspuleninstrumente) erklärt werden. Ganz analog war bei der massiven Zählerscheibe ein hartes metallisches Geräusch hörbar, als ob diese sich nur mit unterdrücktem Ächzen und Stöhnen hätte drehen können. Ein mechanisches Anstoßen oder Reiben konnte nicht festgestellt werden.

Bild 28.

Über Magnetfelder mit veränderlicher Bewegungsgeschwindigkeit.

Von

Dipl.-Ing. **N. Japolsky.**

§ 1. Der Wirkungsgrad elektrischer Maschinen, die durch mehrphasige Ströme angetrieben, Schwingungsbewegungen vollführen, läßt sich in der Weise erhöhen, daß die Geschwindigkeit des antreibenden Magnetfeldes nicht konstant bleibt, sondern sich stetig entsprechend den Geschwindigkeitsänderungen der beweglichen Teile des angetriebenen Mechanismus verändert.

Um dieses Ziel zu erreichen, muß man die Periodenzahl und die Amplitude der elektrischen Wechselspannung, welche die Wicklungen der Maschine speist, stetig verändern, während ihre beweglichen Teile beschleunigt werden.

Die Beschreibung solcher Maschinen kann man in entsprechenden Patentschriften finden[1]).

Die vorliegende Arbeit stellt eine theoretische Untersuchung solcher Magnetfelder dar.

§ 2. Es muß zunächst eine entsprechende technische Terminologie aufgestellt werden:

Ein durch mehrphasigen Wechselstrom hervorgerufenes bewegliches magnetisches Feld kann bei beliebiger Bewegungsrichtung und Form als „Magnetofugalfeld" bezeichnet werden[2]).

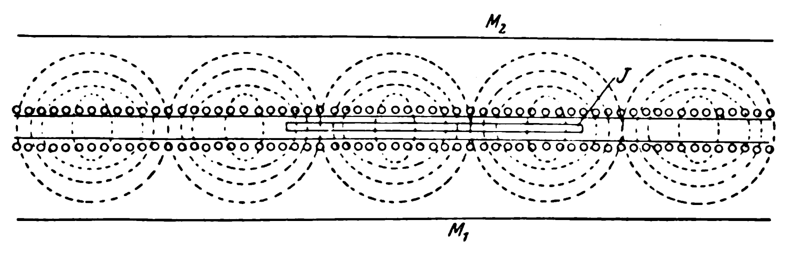


Bild 1.

Das elektromagnetische System, welches ein Magnetofugalfeld hervorruft, kann analog als „Magnetofugalständer" bezeichnet werden.

Wir verstehen darunter nicht nur den Ständer eines Induktionsmotors, sondern auch jede andere Vorrichtung, die ein Magnetofugalfeld hervorrufen kann, wie etwa die zwei abgewickelten Statoren M_1 und M_2 (siehe Bild 1), die im Luftspalt zwischen ihren Arbeitsflächen ein geradlinig fortschreitendes Magnetofugalfeld schaffen, dessen Augenblickslage durch punktierte Linien dargestellt ist.

Die Anwendung des in Bild 1 dargestellten Systems ist von mehreren Erfindern für verschiedene Zwecke vorgeschlagen worden[3]).

Das System von Stromleitern, die sich im Magnetofugalfeld bewegen oder sich zu bewegen streben[4]), kann als „Magnetofugalläufer" benannt werden. Dieser

[1]) Siehe Schweizerisches Patent Nr. 100250 und Englisches Patent Nr. 214393.

[2]) Vom lateinischen: Fugo.

[3]) Siehe Englische Patente Nr. 12581, A. D. 1902 und Nr. 9964, A. D. 1904. Siehe auch: Trombetta „The electric Hammer". Journ. of Amer. Institute of Electric. Engineers, April 1922.

[4]) Als solches kann jedes System betrachtet werden, in welchem das Magnetofugalfeld Sekundärströme hervorruft; diese stellen also das eigentliche Charakteristikum des Magnetofugalläufers dar.



Bezeichnung entspricht ebensogut der Rotor eines gewöhnlichen Induktionsmotors wie auch die Armatur J (siehe Bild 1), welche durch das Magnetofugalfeld im Luftspalt zwischen den beiden Arbeitsflächen der Magnetofugalständer M_1 und M_2, bzw. in einem anderen System angetrieben wird.

§ 3. Wir betrachten zunächst der Einfachheit halber ein Magnetofugalfeld zwischen den ebenen Arbeitsflächen zweier Magnetofugalständer entsprechend Bild 1; die Mehrzahl der abgeleiteten Schlußfolgerungen ist aber auch für ein Magnetofugalfeld von beliebiger Form gültig.

Wir bezeichnen mit B die Induktion an der Arbeitsfläche des Magnetofugalständers und setzen voraus, daß B in jedem Augenblick längs der X-Achse sinusförmig verteilt ist. Es sei zum Beispiel die Induktion B durch die Sinuslinie F in dem Bilde 2 dargestellt. Wir nehmen an, daß die Periode dieser Sinuslinie, die wir als „Wellenlänge des Magnetofugalfeldes" bezeichnen, konstant ist, daß sich aber das Magnetofugalfeld längs der X-Achse mit einer Geschwindigkeit v_{II} verschiebt, die im allgemeinen Falle eine veränderliche Größe ist, die Amplitude B_0 der Induktion B soll ebenfalls eine veränderliche sein.

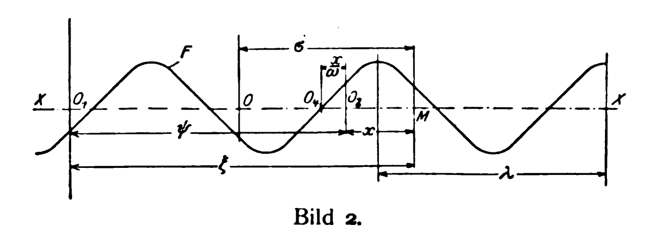


Bild 2.

Wenn der Punkt O_2 mit dem Magnetofugalfelde, also auch mit der Sinuslinie F als fest verbunden gedacht wird, ist in einem Punkt M der Augenblickswert der Induktion B, entsprechend dem Zeitpunkt t:

$$B = B_0 \sin (\omega x + \varkappa) \qquad (1)$$

Hierin bedeutet x den Abstand O_2M vom gegebenen M bis zum Punkt O_2. Die Größe $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ bezeichnen wir als „räumliche Pulsation" des Magnetofugalfeldes.

Die „positive" Richtung von x sei von links nach rechts, die positiven B seien von unten nach oben abgetragen.

$\varkappa$ sei die Anfangsphase, d. h. die Phase der Induktion im Punkte O_2, in dem $x = O$.

Es sei ferner: O_1 = der Anfangspunkt der festen Koordinaten,
ξ = der Abstand zwischen den Punkten M und O_1 (von links nach rechts),
ψ = der Abstand O_1O_2.

Es folgt aus Bild 2, daß:

$$x = \xi - \psi. \qquad (2)$$

Wenn das System, mit dem der Punkt M verbunden ist, sich mit einer absoluten Geschwindigkeit v_I und das Magnetofugalfeld (samt Kurve F) sich mit einer Geschwindigkeit v_{II} bewegt, so ist offenbar:

$$v_I = \frac{d\xi}{dt} \qquad (3)$$

$$v_{II} = \frac{d\psi}{dt}. \qquad (4)$$

wo t die Zeit, die vom Anfangsmoment verflossen ist.



Aus (2), (3) und (4) folgt:

$$\frac{dx}{dt} = v_I - v_{II} \tag{5}$$

$$\text{oder: } x = c + \int_0^t (v_I - v_{II})\, dt, \tag{6}$$

wo c den Wert von x im Punkte M bedeutet, bei $t = 0$.

Es sei v die relative Geschwindigkeit des Feldes in bezug auf das System des Punktes M. Wir haben also:

$$v = v_{II} - v_I \tag{7}$$

und aus (6) und (7)

$$v = -\frac{dx}{dt} \tag{7 a}$$

Der Punkt O sei mit dem System des Punktes M fest verbunden und wir bezeichnen als σ den Abstand OM.

Die Größe c für den Punkt O sei bezeichnet als c_0. Dann ist:

$$c = c_0 + \sigma \tag{8}$$

Aus (6), (7) und (8) folgt dann:

$$x = c_0 - \int_0^t v \cdot dt + \sigma. \tag{9}$$

Bezeichnet man die Größe x im Punkte O ($\sigma = O$) als x_0, so ist:

$$x_0 = c_0 - \int_0^t v\, dt \tag{10}$$

$$x = x_0 + \sigma. \tag{11}$$

Aus (1) und (11) folgt:

$$B = B_0 \sin [\omega (x_0 + \sigma) + \varkappa]. \tag{12}$$

Der Punkt O_2 kann natürlich so gewählt werden, daß $\varkappa = O$. Dann ist:

$$B = B_0 \sin \omega (x_0 + \sigma). \tag{12 a}$$

Durch Substitution von (10)

$$B = B_0 \sin \omega (c_0 - \int_0^t v\, dt + \sigma) = B_0 \sin \gamma, \tag{12 b}$$

worin

$$\gamma = \omega (c_0 - \int_0^t v\, dt + \sigma) = \omega (x_0 + \sigma). \tag{12 c}$$

Den Winkel γ bezeichnen wir als „Augenblickswert der Phase" von B. Aus dem Obigen folgt natürlich, daß v und B_0 im allgemeinen veränderliche Größen sind.

Im Spezialfalle, wenn $v_{II} = \text{const.}$, $v_I = \text{const.}$ (also auch $v = \text{const.}$) und $B_0 = \text{const.}$, d. h. zum Beispiel im Falle eines Induktionsmotors, der unter unveränderlichen Bedingungen arbeitet:

$$B = B_0 \sin \omega (c_0 - vt + \sigma). \tag{13}$$

Und da $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$, so haben wir

$$B = B_0 \sin \left[\omega c_0 - 2\pi \left(\frac{v}{\lambda} t - \frac{\sigma}{\lambda}\right)\right]. \tag{14}$$

Es ist leicht einzusehen, daß hier $\frac{v}{\lambda} = \nu$, d. h. die Periodenzahl der zeitlichen Änderung von B in dem System ist, zu welchem der Punkt M angehört. Wählt man den Anfangsmoment so, daß $\omega c_0 = \pi$, so ist

$$B = B_0 \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{\sigma}{\lambda}\right). \tag{15}$$

Das ist die bekannte Gleichung für fortschreitende Wellen, die auch für die Induktion in gewöhnlichen Asynchronmotoren angewendet werden kann.

Aus (12b) ist es offenkundig, daß der Momentanwert von B durch die Projektion des Vektors $\overline{B}$ auf die YY-Achse (Bild 3) gemessen werden kann. Dieser Vektor, dessen Länge in einem gewissen Maßstabe der Amplitude B_o entspricht, bildet mit der XX-Achse den Winkel γ. Die obige Darstellungsweise ist für beliebige Variationen von B_o und γ gültig.

Wir wählen nun q Punkte $M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots M_i \ldots\ldots M_g \ldots\ldots M_q$ auf der XX-Achse (Bild 2), die zum Koordinatensystem gehören, mit welchem der Punkt M verbunden ist. Es sei $\Delta_{ig}\,\sigma$ der Abstand zwischen den Punkten M_i und M_g. Wenn die Größe γ in allen diesen Punkten im Zeitpunkte t gleich $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots\ldots \gamma_i \ldots\ldots \gamma_g \ldots\ldots \gamma_q$ ist, so bestimmt man aus (12c) den Winkel χ_{ig} zwischen den Vektoren, die den Punkten M_i und M_g entsprechen:

$$\chi_{ig} = \gamma_i - \gamma_g = \omega\,\Delta_{ig}\,\sigma.$$

Das heißt, daß die den verschiedenen Punkten desselben Systems entsprechenden Vektoren ihre relative Lage unverändert beibehalten, unabhängig von dem Variationsgesetz der Geschwindigkeit v und der Amplitude B_o der Induktion.

Die Größe

$$\Omega = -\frac{d\gamma}{dt} = \omega\,v = \frac{2\pi}{\lambda}\,v \tag{16}$$

bezeichnen wir als „Momentanwert der zeitlichen Pulsation".

Es leicht einzusehen, daß Ω den Momentanwert der Winkelgeschwindigkeit des Vektorensystems darstellt. Im gegebenen Zeitpunkte ist diese Geschwindigkeit für alle Werte von σ die gleiche. Sie ändert sich nur zeitlich.

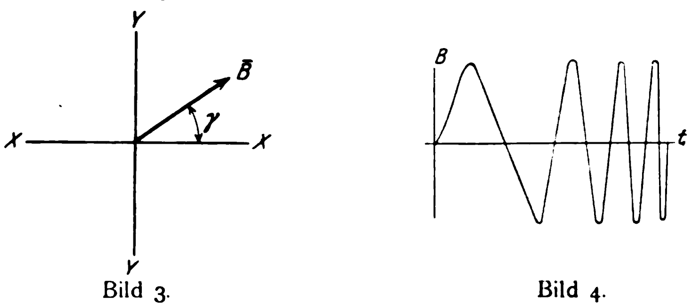


Bild 3. Bild 4.

Die Größe

$$\nu = \frac{\Omega}{2\pi} \tag{17}$$

sei als „Momentanwert der Periodenzahl" bezeichnet.

Aus (16) und (17) folgt, daß

$$v = \nu\,\lambda. \tag{18}$$

Es ergibt sich, daß bei veränderlicher Periodenzahl die augenblickliche Geschwindigkeit des Feldes in bezug auf ein gegebenes System dem Momentanwert der Periodenzahl in diesem System, multipliziert mit der Wellenlänge, gleich ist.

Unter den unendlich vielen Variationsformen der Geschwindigkeit des Magnetofugalfeldes hat das „gleichförmig beschleunigte" Feld ein besonderes Interesse.

Betrachten wir irgendeinen Punkt auf der Arbeitsfläche des Magnetofugalständers, der ein gleichförmig beschleunigtes Feld hervorruft, so haben wir (wenn $v_I = 0$ vorausgesetzt wird)

$$\frac{dv_{II}}{dt} = \frac{dv}{dt} = a = \text{const.}$$

$$v = at + v_o \qquad \nu = \frac{a}{\lambda}\,t + \frac{v_o}{\lambda}, \tag{18a}$$

wo v_o der Anfangswert von v bei $t = 0$ ist.

Die zeitliche Änderung der Induktion B eines solchen Feldes mit konstanter Amplitude B_o für einen festen Punkt M ist in Bild 4 dargestellt.

Da der Momentanwert einer Größe, die in Form einer Sinusfunktion mit veränderlicher Frequenz und Amplitude ausgedrückt wird, als Projektion eines Vektors auf eine feste Achse dargestellt werden kann, ist es aus der allgemeinen Vektorentheorie augenscheinlich, daß das Prinzip der Addition so wie alle übrigen Operationen der Vektorenrechnung im allgemeinen Falle ebenso gültig sind, wie im Falle konstanter Frequenz und Amplitude. Man kann also die symbolische Methode anwenden, wenn B_o und v variable Größen sind, und es gilt

$$\bar{B} = B_o e^{j\gamma}, \tag{19}$$

wo γ der Phasenwinkel aus der Formel (12b), $j = \sqrt{-1}$ und $e = 2{,}718282$ — die Basis des natürlichen Logarythmensystems ist.

§ 4. Auf Grund des Lehrsatzes für die Vektorenaddition kann das Magnetofugalfeld mit veränderlicher Amplitude B_o in zwei Magnetofugalfelder mit konstanten Amplituden zerlegt werden. Wir können einen Vektor B_m mit der Amplitude B_{mo} denken, welche größer ist als sämtliche Werte von B_o, die im gegebenen Falle auftreten können. Diese Bedingung kann leicht erfüllt werden, da B_o nie unendlich groß sein kann, so daß B_{mo} immer einen endlichen Wert beibehält.

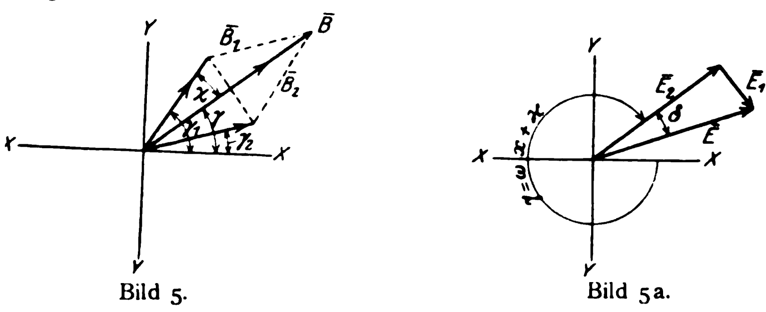


Bild 5. Bild 5a.

Es sei also

$$B_o = B_{mo} \cos \chi = 2 \frac{B_{mo}}{2} \cos \chi. \tag{20}$$

Das heißt, daß $\bar{B}$ die geometrische Summe von zwei Vektoren $\bar{B}_1$ und $\bar{B}_2$ darstellt, die eine konstante Amplitude $\frac{B_{mo}}{2}$ haben und mit dem Vektor $\bar{B}$ symmetrisch von beiden Seiten den Winkel χ bilden (siehe Bild 5). Die Komponente mit dem Phasenwinkel γ_1 eilt dem Hauptvektor $\bar{B}$ vor, die andere die den Phasenwinkel γ_2 hat, eilt ihm um den Winkel χ nach. Es gelten hiernach die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = \gamma + \chi \\ \gamma_2 = \gamma - \chi \end{array}\right\} \tag{21}$$

und aus (20) folgt:

$$\chi = \arccos \frac{B_o}{B_{mo}}. \tag{22}$$

Symbolisch kann diese Umformung so dargestellt werden:

$$\bar{B} = \frac{B_{mo}}{2} (e^{j\chi} + e^{-j\chi}) e^{j\gamma} = B_{mo} e^{j\gamma} \cos \operatorname{hyp} j\chi. \tag{23}$$

§ 5. Es soll jetzt die EM.-Kraft E ermittelt werden, die in einem 1 cm langen Leiter durch das Magnetofugalfeld induziert wird.

Die Grundformel ist:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{24}$$

wo Φ der Induktionsfluß ist, der im gegebenen Augenblick den 1 cm langen Leiter umgibt. Aus den Bildern 1 und 2 geht hervor, daß die Beziehung zwischen B und Φ in jedem gegebenen Zeitpunkte eine rein räumliche ist: sie hängt weder von der Geschwindigkeit des Magnetofugalfeldes, noch von dem Gesetz der zeitlichen Änderung der Amplitude B_0 ab. Infolgedessen darf man sich, um Φ im Falle von variablen v und B auszurechnen, der gewöhnlichen Methoden bedienen, die für Mehrphasenströme angewendet werden.

Aus Bild 1 und 2 ist es klar, daß wenn man im oberen Magnetofugalständer den von links nach rechts gerichteten Kraftfluß als positiv annimmt, so gilt:

$$B = \frac{d\Phi}{dx}. \tag{25}$$

Wir berücksichtigen hier die am Anfang dieses Aufsatzes gemachte Annahme, daß die positive Richtung von B von unten nach oben sein soll.

Es ist also nach (12a) und (25)

$$\Phi = \int B\,dx = -\frac{B_0}{\omega}\cos\omega(x_0 + \sigma) + c, \tag{25a}$$

wo c eine willkürliche Konstante ist.

Aus (24) und (25a) folgt:

$$E = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) =$$

$$= v B_0 \sin\omega(x_0 + \sigma) + \frac{1}{\omega}\frac{dB_0}{dt}\cos\omega(x_0 + \sigma) \tag{26}$$

oder:

$$E = E_{01}\cdot\sin\omega(x_0 + \sigma) + E_{02}\cos\omega(x_0 + \sigma). \tag{27}$$

wo

$$E_{01} = v B_0 \qquad E_{02} = \frac{1}{\omega}\frac{dB_0}{dt} = \frac{B_0}{\omega}\frac{1}{B_0}\frac{dB_0}{dt} = \frac{B_0}{\omega}\frac{d\log B_0}{dt}. \tag{27a}$$

Aus Gleichung (27) folgt, daß E als die Resultierende zweier gegeneinander senkrechten Vektoren dargestellt werden kann (siehe Bild 5a)

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2. \tag{28}$$

Wenn wir die Richtung $+\omega x$ als positiv annehmen, d. h. wenn die negative zeitliche Pulsation [siehe Formel (16) und (7a)]

$$-\Omega = -\omega v = +\omega\frac{dx}{dt}$$

und wenn die negativen Frequenzen

$$-\nu = -\frac{\Omega}{2\pi}$$

auch als positiv angenommen werden, so wird bei $\frac{dB_0}{dt} > 0$ der Vektor $\bar{E}_2$ dem Vektor $\bar{E}_1$ räumlich voreilen.

Wenn wir also das Vektordiagramm für die zeitlichen Änderungen von E konstruieren, so ergibt sich, wie gewöhnlich, daß bei $\Omega > 0$ der Vektor $\bar{E}$ in positiver Richtung, d. h. gegen den Uhrzeigersinn rotiert. Wir müssen dann, entsprechend (12c) die Winkel γ in der negativen Richtung, d. h. im Uhrzeigersinn messen. Die Differenz zwischen den Phasen γ'' und γ' der Vektoren $\bar{E}_2$ und $\bar{E}_1$ ist also positiv, und es ergibt sich dementsprechend, daß bei $\frac{dB_0}{dt} > 0$ der Vektor $\bar{E}_2$ dem $\bar{E}_1$ zeitlich nacheilt, daß der Winkel zwischen $\bar{E}_1$ und $\bar{E}_2$ negativ ist und daß dieser Winkel:



$$\delta = - \operatorname{arc\,tang} \frac{E_{o_1}}{E_{o_2}} \tag{29}$$

oder, entsprechend (27a)

$$\delta = - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\omega v} \cdot \frac{d \log B_o}{dt} = - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\Omega} \frac{d \log B_o}{dt}. \tag{29a}$$

Die Amplitude der resultierenden EM.-Kraft:

$$E_o = + \sqrt{E_{o_1}^2 + E_{o_2}^2} = + E_{o_1} \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \delta} = + E_{o_1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\Omega} \frac{d \log B_o}{dt} \right)^2}. \tag{30}$$

Die Phase ε der EMK. E bestimmt sich aus:

$$\varepsilon = - \omega x + \delta = - \omega x - \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\Omega} \frac{d \log B_o}{dt}. \tag{31}$$

Es ist somit:

$$\left. \begin{aligned} E &= E_o \sin \varepsilon \\ \bar{E} &= E_o e^{j\varepsilon} \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

wo E_o und ε durch (30) und (31) gegeben sind.

Wir sehen also, daß wenn wir nur die zeitliche Änderung der relativen Geschwindigkeit v eines Magnetofugalfeldes haben, so wird die durch dieses Feld hervorgerufene EM.-Kraft E in derselben Weise wie bei konstantem v ausgedrückt.

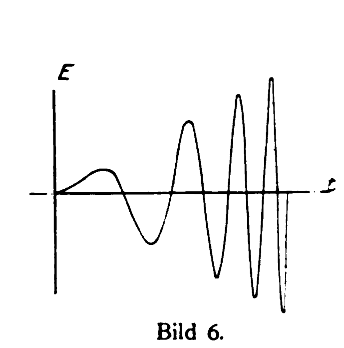


Bild 6.

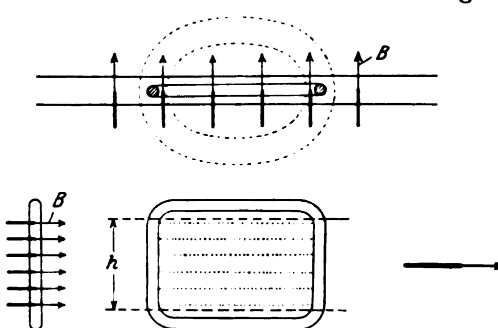


Bild 7. h bezeichnet die Breite des aktiven Teiles, B bezeichnet die Richtung des Magnetofugalfeldes, der große Pfeil bezeichnet die Bewegungsrichtung des Magnetofugalfeldes.

Diese Formeln gelten aber nicht mehr, wenn die Amplitude B_o der Induktion des Magnetofugalfeldes veränderlich ist. Im letzteren Falle wird, abgesehen von der EM.-Kraft, die durch die Bewegung des Feldes geschafft wird, eine zweite EM.-Kraft hervorgerufen, die zur ersteren senkrecht ist. Die Resultierende dieser beiden EM.-Kräfte unterscheidet sich von der durch die Bewegung des Feldes hervorgerufenen EM.-Kraft, durch eine Phasenverschiebung δ, die sich aus Formel (29a) ergibt, und durch eine vergrößerte Amplitude, die der Formel (30) entspricht.

Bild 6 stellt die E-Kurve dar, welche der Variation von v entspricht, die proportional mit t ist. Diese Variation vollzieht sich nach Gleichung (18a), während die zeitliche Änderung von B durch das Bild 4 dargestellt ist (B_o = const, $v = at$).

§ 6. Als einen Magnetofugalläufer bezeichnen wir, wie erwähnt, ein System von Stromleitern, in welchem das Magnetofugalfeld Sekundärströme hervorruft. Diese Ströme ergeben durch gegenseitige Wirkung mit dem Felde eine „ponderomotorische Kraft", die den Läufer angreift.

Die gegenseitige Wirkung des Magnetofugalläufers und des Magnetofugalfeldes kann sehr verwickelt sein. Es können sehr verschiedene Kräfte die verschiedenen

Teile des Magnetofugalläufers angreifen, die manchmal auch entgegengesetzt gerichtet sind und dabei parallel oder auch senkrecht zur Richtung der Feldbewegung wirken.

Die zur Bewegungsrichtung parallelen Kräfte sollen als „longitudinale ponderomotorische Kräfte“ bezeichnet werden. In gewissen Teilen des Magnetofugalläufers können die longitudinalen Kräfte nicht nur im Sinne der Bewegung, sondern auch im entgegengesetzten Sinne gerichtet sein. Die Resultierende der sämtlichen longitudinalen ponderomotorischen Kräfte, welche die im Magnetofugalfelde befindlichen (aktiven) Teile des Läufers beeinflussen, ist aber stets mit der Bewegung des Magnetofugalfeldes gleichsinnig. Das folgt aus dem Lenzschen Gesetz, welches besagt, daß wenn ein im Magnetfelde liegendes Leitersystem sich relativ zu diesem Felde bewegt, die vom Felde in diesem System induzierten Ströme sich derart verteilen, daß ihre gemeinsame Wirkung die obige relative Bewegung zu verhindern sucht.

Betrachten wir also die im Läufer induzierten Ströme, so können wir sie in geschlossene Elementarstromkreise einteilen. Jeder von diesen Kreisen besitzt einen „aktiven Teil“, d. h. einen Teil, in welchem die durch das Feld induzierte EMK. zur Geltung kommt (Bild 7).

Wir unterscheiden zwei Kategorien von Magnetofugalläufern.

1. Homogene Läufer, in denen:
   a) die Phasenwinkel zwischen den Induktionen B der verschiedenen Elemente eines aktiven Teiles zeitlich konstant und in allen Stromkreisen immer gleichartig verteilt sind,
   b) die Elementarstromkreise ihre Form nicht ändern,

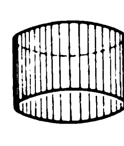


Bild 8.

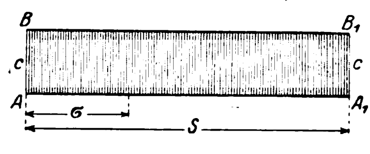


Bild 9.

   c) das Verhältnis $\frac{R_2}{R}$ zwischen dem Widerstand des aktiven Teiles R_2 und dem totalen Widerstand des ganzen Stromkreises R zeitlich konstant und für alle Stromkreise gleich ist,
   d) das Verhältnis $\frac{E_0}{R}$ zwischen dem totalen Maximalwerte der EM.-Kraft E_0 des Stromkreises und seinem Totalwiderstand R für alle Stromkreise gleich ist,
   e) das Verhältnis $\frac{R}{L}$ zwischen dem Widerstand R und dem Selbstinduktionskoeffizient L für alle Stromkreise gleich ist.

Um einen homogenen Läufer zu erhalten, muß man die Ströme längs bestimmten Stromwegen laufen lassen. Zu diesem Zwecke pflegt man den elektrisch leitenden Teil des Läufers aus Stäben verhältnismäßig schwachen Querschnitts herzustellen, die entsprechend verteilt und geschaltet sind. Ein System von Stromleitern bezeichnen wir gewöhnlich als „Wicklung“.

2. Nichthomogene Läufer.

Ihre Formen können sehr verschieden sein; die folgenden sind von besonderem Interesse:
   a) Käfiganker des Induktionsmotors (Bild 8),
   b) allgemeine Form des Käfigankers, die wir als „Gitteranker“[1]) bezeichnen (Bild 9). Sein aktiver Teil besteht aus einer Reihe von Stableitern C, die

[1]) Eine Theorie des Gitterankers hoffe ich in einer anderen Arbeit zu betrachten.

senkrecht zur $\bar{v}$-Richtung stehen (Querleiter). Sie sind untereinander durch zwei Längsbrücken AA_1 und BB, die parallel zu $\bar{v}$ verlaufen, verbunden.

§ 7. Es soll nun die longitudinale ponderomotorische Kraft für einen homogenen Läufer bestimmt werden.

Wir begrenzen die betrachteten Fälle insofern, als wir aktive Leiter von zylindrischer oder prismatischer Form annehmen, deren Achsen zu $\bar{v}$ und $\bar{B}$ senkrecht sind. Unserer Betrachtung liegen die Elemente $d\sigma$ des aktiven Teils des Läufers zugrunde; diese unendlich kleinen Elemente sollen aber in unserer Analyse groß genug vorausgesetzt werden, um eine genügende Anzahl von Stromleitern zu enthalten, so daß ihr Gesamtquerschnitt mit der Änderung von $d\sigma$ sich stetig ändert.

Es sei $\frac{r_1}{d\sigma}$ der mittlere Widerstand des ganzen Stromkreises und $\frac{r_2}{d\sigma}$ der mittlere Widerstand seines aktiven Teils, beide auf eine Längeneinheit des aktiven Teiles des Stromkreises bezogen. Es sei ferner E_m die mittlere EM.-Kraft, die in einer Längeneinheit des aktiven Teils des Stromkreises induziert wird. Wir haben dann, entsprechend dem Ausdruck für den Strom in einem Elementarstromkreis:

$$dJ = \frac{E_m \cos\varphi}{r_1} \cdot d\sigma = \frac{E_m \cos\varphi}{\frac{r_1}{r_2} r_2} d\sigma = \frac{E_m \cos\varphi}{\Theta r_2} d\sigma, \tag{33}$$

worin

$$\Theta = \frac{r_1}{r_2} = \frac{R}{R_2} \tag{33a}$$

und φ der Nacheilungswinkel des Stromes in bezug auf die EMK. ist, der sich aus dem Verhältnis zwischen dem Widerstand und der Reaktanz ermittelt.

Wenn ϱ den spezifischen Widerstand des aktiven Stromleiters darstellt, haben wir:

$$\frac{r_2}{d\sigma} = \frac{\varrho}{dF} = \frac{\varrho}{\frac{dF}{d\sigma} d\sigma}, \qquad r_2 = \frac{\varrho}{\frac{dF}{d\sigma}}. \tag{34}$$

Aus (33) und (34) ergibt sich:

$$dJ = \frac{E_m}{\Theta\varrho} \cos\varphi \frac{dF}{d\sigma} d\sigma = \frac{h_m}{\Theta\varrho} E_m \cos\varphi \, d\sigma, \tag{35}$$

h_m bezeichnen wir als mittlere Stärke des aktiven Teils.

Der Elementarstromkreis eines homogenen Magnetofugalläufers besteht gewöhnlich aus mehreren aktiven Stromleitern, welche sich entsprechend verschiedenen Werten von σ verteilen (siehe z. B. Bild 7) und deren EM.-Kraft Phasenunterschiede aufweisen kann. In allgemeinem Falle kann sich also die EM.-Kraft eines gegebenen aktiven Stromleiters in Phase und Amplitude von der mittleren EM.-Kraft des ganzen Elementarstromkreises, der diesen Stromleiter enthält, unterscheiden. Die Größen E_m und $\bar{E}$ können somit im allgemeinen Falle verschiedene Amplituden und verschiedene Phasen haben. Das Verhältnis der Amplituden $\frac{E_{mo}}{E_o}$ wird gewöhnlich als „Wicklungsfaktor" bezeichnet. Der Einfluß dieses Faktors bei konstanter Periodenzahl ist gut bekannt; er besteht auch in unserem allgemeinen Falle variabler Frequenz und Amplitude des Feldes.

Wir können infolgedessen uns mit dem Fall begnügen, in dem alle EM.-Kräfte eines Elementarstromkreises dieselbe Phase haben, d. h.

$$E_m = E. \tag{35a}$$

Außerdem setzen wir voraus, daß $h_m = \text{const.}$ Die elementare longitudinal gerichtete ponderomotische Kraft, welche ein Flächenelement der Arbeitsfläche des

Magnetofugalfeldes angreift, dessen Länge gleich $d\sigma$ ist, bezeichnen wir durch dP, indem:

$$dP = h B dJ = h B \frac{dJ}{d\sigma} \sigma, \tag{36}$$

wo h die Breite des aktiven Teils des Läufers ist, senkrecht gemessen zu $\bar{v}$ und $\bar{B}$.

Mit Rücksicht auf die Phasendifferenz φ zwischen der Stromstärke und der EMK. erhalten wir aus (36) auf Grund von (12a), (26) und (35)

$$\frac{dP}{d\sigma} = f_1 v \Big\{ \sin\omega(x_0+\sigma) \,\mathrm{Sin}[\omega(x_0+\sigma)-\varphi] + \\ + \frac{1}{\Omega}\frac{d\log B_0}{dt}\sin\omega(x_0+\sigma)\,\mathrm{Cos}[\omega(x_0+\sigma)-\varphi]\Big\}, \tag{37}$$

worin

$$f_1 = \frac{B_0^2 h h_m \cos\varphi}{\Theta\varrho}. \tag{38}$$

Es sei $h = \mathrm{const.}$

Wir betrachten als Nullpunkt der Koordinate σ (Punkt O in Bild 2) denjenigen Punkt, welchem der kleinste Wert von σ entspricht, d. h. den Anfangspunkt des aktiven Teils des Magnetofugalläufers, und wir bezeichnen mit s die Totallänge des aktiven Teiles.

Die totale longitudinal gerichtete ponderomotorische Kraft, die am Läufer angreift, ist dann:

$$P = \int_0^s \frac{dP}{d\sigma} d\sigma = f_1 v \Big[\mathrm{Cos}\,\varphi \int_0^s \sin^2\omega(x_0+\sigma)\,d\sigma - \sin\varphi \int_0^s \sin\omega(x_0+\sigma)\,\mathrm{Cos}\,\omega(x_0+\sigma)\,d\sigma + \\ + \frac{1}{\Omega}\frac{d\log B_0}{dt}\cos\varphi \int_0^s \sin\omega(x_0+\sigma)\,\mathrm{Cos}\,\omega(x_0+\sigma)\,d\sigma + \\ + \frac{1}{\Omega}\frac{d\log B_0}{dt}\sin\varphi \int_0^s \sin^2\omega(x_0+\sigma)\,d\sigma\Big], \tag{39}$$

wo sin und cos $\omega[(x_0+\sigma)-\varphi]$ in entwickelter Form dargestellt sind.

Da

$$\int_0^s \sin^2\omega y\,dy = -\frac{1}{4\omega}\sin 2\omega y \Big|_0^s + \frac{s}{2},$$

$$\int_0^s \sin\omega y\,\mathrm{Cos}\,\omega y\,dy = -\frac{1}{4\omega}\mathrm{Cos}\,2\omega y \Big|_0^s$$

haben wir aus (39)

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \tag{40}$$

wo

$$P_1 = \frac{f_1 s}{2} v \left(\cos\varphi + \frac{1}{\Omega}\frac{d\log B_0}{dt}\sin\varphi\right)$$

$$P_2 = -\frac{f_1}{4\omega} v \left(\cos\varphi + \frac{1}{\Omega}\frac{d\log B_0}{dt}\sin\varphi\right)\ (\sin 2\omega(x_0+s) - \sin 2\omega x_0)$$

$$P_3 = \frac{f_1}{4\omega} v \left(\sin\varphi - \frac{1}{\Omega}\frac{d\log B_0}{dt}\cos\varphi\right)\ (\cos 2\omega(x_0+s) - \mathrm{Cos}\,2\omega x_0).$$

P_1 ist die konstante ponderomotorische Kraft, welche keinen periodischen Änderungen unterliegt.

P_2 ist die Kraft, die sich periodisch ändert, und zwar mit einer Frequenz, die gleich der doppelten Periodenzahl der EMK. im Magnetofugalläufer ist. Es ist leicht einzusehen, daß $P_2 = 0$, wenn ωs ein Vielfaches von π ist (d. h. wenn s ein Vielfaches von $\lambda/2$ ist) oder wenn $B_0 = \text{const}$ und $\cos\varphi = 0$.

P_3 ändert sich auch periodisch und mit derselben Frequenz wie P_2. $P_3 = 0$, wenn s ein Vielfaches von π oder wenn $\sin\varphi = 0$ und $Bo = \text{const}$.

Wir haben oft mit dem praktischen Fall zu tun, in dem ωs ein Vielfaches von 2π ist.

Es ist also

$$P = P_1 = \frac{f_1 s}{2} v \left(\cos\varphi + \frac{1}{\Omega} \frac{d \log Bo}{dt} \sin\varphi \right). \tag{42}$$

In weiteren Betrachtungen soll nur dieser Fall erörtert werden.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Masse des Magnetofugalläufers und durch $\mathfrak{M}_a$ die Masse seines aktiven Teils, durch Δ das spezifische Gewicht des aktiven Teils und durch δ_a das Verhältnis $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_a}$. Es ist also:

$$\mathfrak{M} = \delta_a \mathfrak{M}_a = \delta_a s h h_m \Delta. \tag{43}$$

Die Beschleunigung des Läufers durch die longitudinale ponderomotorische Kraft:

$$\frac{d v_I}{dt} = \frac{P}{\mathfrak{M}} - \frac{P_k}{\mathfrak{M}} = \frac{P}{\mathfrak{M}} - a_k, \tag{44}$$

wo

$$a_k = \frac{P_k}{\mathfrak{M}}. \tag{44 a}$$

In dieser Gleichung ist P_k eine konstante Widerstandskraft, welche durch den Magnetofugalläufer überwunden werden soll, z. B. die Schwerkraft, Reibungswiderstand usw. Die Größe a_k können wir als „Beschleunigung der Widerstandskraft" bezeichnen.

Es sei

$$\frac{f_1 s}{2 \mathfrak{M} \cos\varphi} = f. \tag{45}$$

Aus (42), (44) und (45) ergibt sich:

$$\frac{dv_I}{dt} = fv \left(\cos^2\varphi + \frac{1}{2\Omega} \frac{d \log B_0}{dt} \right) - a_k. \tag{46}$$

Aus (38), (43), (45) folgt:

$$f = \frac{B_0^2}{2 \delta_a \Delta \Theta \varrho}. \tag{47}$$

Es sei $\frac{L_1}{d\sigma}$ der Selbstinduktionskoeffizient, der dem Streufluß eines Elementarstromkreises entspricht, welcher sich zwischen den Koordinaten σ und $\sigma + d\sigma$ befindet, $\frac{R_1}{d\sigma}$ sei der Ohmsche Widerstand dieses Stromkreises. Es ist dann, wie wir wissen [vergl. Formel (16)]:

$$\operatorname{Tang}\varphi = \frac{2\pi\nu \frac{L_1}{d\sigma}}{\frac{R_1}{d\sigma}} = \frac{\omega L_1}{R_1} v = q v, \tag{48}$$

wo

$$q = \frac{\omega L_1}{R_1}. \tag{48 a}$$

Infolge der homogenen Konstruktion des Magnetofugalläufers ist $\frac{L_1}{R_1} = \text{const}$ und die Größe q ist auch für sämtliche Elementarstromkreise die gleiche.

Aus (48) haben wir:

$$\sin \varphi = \frac{q\,v}{\sqrt{1 + q^2 v^2}}, \tag{49}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + q^2 v^2}}. \tag{50}$$

Wenn $B_0 = \text{const.}$, so folgt aus (46) und (50):

$$\frac{d\,v_I}{dt} = \frac{f\,v}{1 + q^2 v^2} - a_k \tag{51}$$

und aus (51) und (7)

$$\frac{d\,v}{dt} = -\frac{f\,v}{1 + q^2 v^2} + \frac{d\,v_{II}}{dt} + a_k. \tag{51a}$$

Durch Umformung der Gleichung (51) haben wir zunächst:

$$\frac{d\,v_I}{dt} = -\frac{a_k q^2 v^2 - f\,v + a_k}{1 + q^2 v^2}.$$

Setzen wir $a_k q^2 v^2 - f\,v + a_k = 0$, so hat die Gleichung von dieser Form zwei Lösungen für v_I:

$$\left.\begin{aligned} v^I &= \frac{f + \sqrt{f^2 - 4\,a_k^2 q^2}}{2\,a_k q^2} \\ v^{II} &= \frac{f - \sqrt{f^2 - 4\,a_k^2 q^2}}{2\,a_k q^2} \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

und hieraus:

$$\frac{d\,v_I}{dt} = -\frac{a_k q^2}{1 + q^3 v^2}(v - v^I)(v - v^{II}), \tag{53}$$

worin v^I und v^{II} Geschwindigkeiten darstellen, die durch Gleichungen (52) bestimmt sind. Aus (52) ist es leicht einzusehen, daß wenn die Wurzeln v^I und v^{II} reell sind, d. h. wenn $f^2 > 4\,a_k q^2$ und wenn $a_k > 0$ und $q \neq 0$, so ist:

$$v^I > v^{II} > 0,$$

so haben wir aus (53) folgende Beziehungen:

Ist $v < v^{II}$ so haben wir $\frac{d\,v_I}{dt} < 0$

„ $v^{II} < v < v_I$ „ „ „ $\frac{d\,v_I}{dt} > 0$

„ $v > v^I$ „ „ „ $\frac{d\,v_I}{dt} < 0.$

Der Fall, in dem v^I und v^{II} imaginär sind, soll weiter besonders behandelt werden.

Es folgt aus dem Obigen, daß wenn v^I und v^{II} reelle Größen sind, der Läufer in der Bewegungsrichtung des Magnetofugalfeldes beschleunigt werden kann. Er überwindet die Widerstände nur in dem Falle, wenn die Geschwindigkeit v positiv ist und dabei innerhab der beiden kritischen Geschwindigkeiten v^I und v^{II} bleibt, welche aus den Gleichungen (52) bestimmt werden können.

Wenn $v < v^{II}$, ist die relative Geschwindigkeit (oder die Schlüpfung) v zu klein und der Strom zu schwach, wenn $v > v^I$ ist, ist $\cos \varphi$ zu klein [siehe Gleichung (50)], und obgleich der Strom stark ist, ist die Kraft P dennoch unbedeutend.



Hier finden wir die allgemeinen charakteristischen Eigenschaften des Induktionsmotors mit konstanter Periodenzahl wieder. Es war aber für unsere Zwecke von Bedeutung, nachweisen zu können, daß diese Eigenschaften sich auch dann feststellen lassen, wenn die Periodenzahl während der Beschleunigung des Motors variabel ist.

Aus der Betrachtung der Gleichung (51) in der Form (51a) lassen sich weitere interessante Schlußfolgerungen ziehen. In derselben Weise, wie (51) in (53) umgeformt worden ist, können wir auf Grund der Wurzeln:

$$\left.\begin{aligned} v' &= \frac{f + \sqrt{f^2 - 4\left(a_k + \frac{d\,v_{II}}{dt}\right)^2 q^2}}{2\left(a_k + \frac{d\,v_{II}}{dt}\right) q^2} \\ v'' &= \frac{f - \sqrt{f^2 - 4\left(a_k + \frac{d\,v_{II}}{dt}\right)^2 q^2}}{2\left(a_k + \frac{d\,v_{II}}{dt}\right) q^2} \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

die Gleichung (51a) in folgende Form umsetzen:

$$\frac{d\,v}{dt} = \frac{\left(a_k + \frac{d\,v_{II}}{dt}\right) q^2 (v - v')(v - v'')}{1 + q^2 v^2}. \quad (55)$$

Es ist aus (54) offenbar, daß wenn $a_k + \frac{d\,v_{II}}{dt} > 0$ und $q \neq 0$ und wenn außerdem v' und v'' reelle Größen sind, d. h. $f^2 > 4\left(a_k + \frac{d\,v_{II}}{dt}\right)^2 q^2$, so hat man aus (54):

$$v'' < v < v'$$

und aus (55) ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Größen v und $\frac{dv}{dt}$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Ist } v < v'' && \text{so hat man } \frac{d\,v}{dt} > 0 \\ &\;\;,,\;\; v'' < v < v' && \;\;,,\;\;\;,,\;\;\;,,\;\; \frac{d\,v}{dt} < 0 \\ &\;\;,,\;\; v > v' && \;\;,,\;\;\;,,\;\;\;,,\;\; \frac{d\,v}{dt} > 0 \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Die Fälle, in denen v' und v'' imaginär sind, sollen weiters erörtert werden.

Wir nehmen an, daß der Läufer von Ruhezustand aus beschleunigt wird, d. h. bei $t = 0$ $v_I = v_{II} = 0$. Es sollen nun zwei verschiedene Antriebsmethoden betrachtet werden.

1. Die Geschwindigkeit des Magnetofugalfeldes ist konstant. $v_{II} = v_{II0} = \text{const.}$

Nach Formel (7) ist der Schlupf $v = v_0$ im Zeitpunkte $t = 0$ gleich der absoluten Geschwindigkeit des Feldes v_{II0}.

Entsprechend den Beziehungen (56) ist es also augenscheinlich, daß der Läufer nur dann in Bewegung kommt, wenn

$$v'' < v_{II0} < v'. \quad (57)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so findet die Beschleunigung des Läufers statt, die so lange dauert, bis v den Wert v'' erreicht, so daß der Läufer sich mit der Maximalgeschwindigkeit

$$v_{I\max} = v_{II0} - v'' \quad (58)$$

bewegt. Da der Maximalwert von v_{II0}, bei dem der Läufer seine Bewegung beginnen kann, gleich v' ist, ergibt sich die größte Geschwindigkeit $v_{I\max\max}$, die der gegebene Läufer überhaupt bei $v_{II} = \text{const.}$ erreichen kann, als:

$$v_{I\max\max} = v' - v''. \tag{59}$$

2. Das Magnetofugalfeld vollführt eine stetig beschleunigte Bewegung.

Der obere Grenzwert von $\frac{d v_{II}}{dt}$ für den betrachteten Fall ist durch die Bedingung gegeben, daß die beiden Wurzeln v' und v'' reell sein sollen, d. h.

$$\frac{d v_{II}}{dt} < \frac{f}{2|q|} - a_k, \tag{60}$$

worin $|q|$ der Absolutwert von q, abgesehen vom Vorzeichen ist.

Ist diese Bedingung erfüllt, so muß, damit der Läufer in Bewegung gerät, im Zeitpunkt $t = 0$ und $v_{II} = v_{II0}$

$$v_{II0} = v_0 < v' \text{ sein.}$$

Wenn $v_0 < v''$, so folgt aus den Ungleichungen (56), daß der Schlupf so lange wachsen wird, bis v den Wert v'' erreicht; dann wird er um den Wert v'' schwingen, welcher der gegebenen Beschleunigung entspricht.

§ 8. Um das Gesetz dieser Variationen festzustellen, müssen wir die Gleichung (51 a) integrieren. Die Integration soll für den Fall durchgeführt werden, in dem v_{II} eine lineare Funktion der Zeit t ist, d. h.

$$v_{II} = v_{II0} + at, \tag{62}$$

wo $a = \text{const.}$

Wenn dabei $v_0 = v''$, so hat offenbar das Integral der Gleichung (51 a) die einfache Form:

$$v = v_0 = v'' \text{ const.} \tag{63}$$

Aus (62), (63) und (7) folgt:

$$v_I = v_{II0} - v'' + at, \tag{64}$$

d. h. der Läufer ist gleichmäßig beschleunigt; seine konstante Beschleunigung ist gleich derjenigen des Magnetofugalfeldes.

Bei $t = 0$

$$v_I = v_{I0} = v_{II0} - v''. \tag{65}$$

Wenn der Läufer sich in Bewegung versetzt, so ist:

$$v_{I0} = 0 \text{ und } v_I = at. \tag{65 a}$$

Die Bewegung des Magnetofugalfeldes ist also gleichförmig beschleunigt, wenn $v_{I0} = 0$; desgleichen im Falle, wenn $v_0 < v''$, und die Kraft P_k, welche die Beschleunigung a_k verursacht, ist die Reibungskraft.

Die Reibungskraft kann nicht größer sein als die Antriebskraft. In unseren Betrachtungen bezüglich der Reibungskraft handelt es sich in Wirklichkeit um eine Größe von demselben Absolutwert und entgegengerichteten Zeichen wie der Höchstwert der Antriebskraft, der die Reibungskraft im Gleichgewicht halten kann. Es ist dabei als selbstverständlich vorausgesetzt, daß, wenn die Antriebskraft kleiner als dieser Höchstwert wird, die Reibungskraft der Antriebskraft gleich und entgegengesetzt gerichtet ist.

Infolgedessen sehen wir, daß, wenn a_k durch die Reibungskraft hervorgerufen ist, sich der Läufer bei $v_{I0} = 0$ und $v_0 < v''$ so lange im Ruhezustand befinden wird, bis v den Wert v'' erreicht. Der rechte Teil der Gleichung (51) wird gleich 0. a_k ist variabel und gleich der Beschleunigung $\frac{f v}{1 + q^2 v^2}$, die durch das Magnetofugalfeld hervorgerufen wird.



Die Bewegung beginnt nur dann, wenn v gleich v'' wird. Nehmen wir den entsprechenden Zeitpunkt als Anfangspunkt an, so kann man leicht feststellen, daß die sich einstellende Bewegung der Gleichung (53) entspricht.

Bei $v = v''$ ist die Bewegung stabil, was folgenderweise nachgewiesen werden kann. Aus den Ungleichungen (56) folgt, daß wenn zufälligerweise eine Abweichung von $v = v''$ gegen die kleineren Werte stattfindet, d. h. wenn $v = v'' - dv$, so haben wir $\frac{dv}{dt} > 0$; bei Vergrößerung von v, d. h. wenn $v = v'' + dv$ ist, $\frac{dv}{dt} < 0$. In beiden Fällen sucht v den Zustand $v = v''$ beizubehalten.

Bei $v = v'$ ist die Gleichung (51a) ebenfalls erfüllt, der Bewegungszustand ist aber nicht stabil, denn entsprechend den Ungleichungen (56) ist $\frac{dv}{dt} < 0$, wenn $v = v' - dv$, und $\frac{dv}{dt} > 0$, wenn $v = v' + dv$. In beiden Fällen strebt die Geschwindigkeit dazu, von v' abzuweichen.

Im ersten Falle weicht sie gegen v'' ab, bei welchem Werte die Bewegung stabil wird; im zweiten Falle – gegen $v > v'$, wobei der Geschwindigkeitsunterschied (Schlüpf) zwischen dem Läufer und dem Felde sich ständig vergrößert.

Um die Bewegung des Läufers in einem gleichförmig beschleunigten Felde zu untersuchen, wobei $v'' \neq v_0 \neq v'$, müssen wir die Gleichung (51a) in ihren allgemeinen Formen integrieren. Wir werden uns zu diesem Zwecke ihrer ungeänderten Form der Gleichung (55) bedienen. Diese Gleichung kann natürlich durch einfache Trennung der Variablen integriert werden:

$$dt = \frac{1 + q^2 v^2}{(a_k + a)\, q^2 (v - v')(v - v'')}\, dv \tag{66}$$

und

$$t = \frac{1}{(a_k + a)\, q^2} \int \frac{1 + q^2 v^2}{(v - v')(v - v'')}\, dv. \tag{67}$$

Wir können die zu integrierende Formel folgendermaßen umformen

$$\frac{1 + q^2 v^2}{(v - v')(v - v'')} = \frac{q^2 [v^2 - (v' + v'')v + v' v''] + q^2 (v' + v'')v - q^2 v' v'' + 1}{v^2 - (v' + v'')v + v' v''} =$$

$$= q^2 + \frac{q^2 (v' + v'')v - q^2 v' v'' + 1}{(v - v')(v - v'')}. \tag{68}$$

Aus (54) gilt:

$$q^2 v' v'' = 1. \tag{69}$$

Aus (68) und (69) ergibt sich:

$$\frac{1 + q^2 v^2}{(v - v')(v - v'')} = q^2 \left(1 + \frac{v' + v''}{(v - v')(v - v'')}\right). \tag{70}$$

Und aus (68) und (70) folgt;

$$t = \frac{1}{a_k + a}\left[\int dv + (v' + v'') \int \frac{v\,dv}{(v - v')(v - v'')}\right]. \tag{71}$$

Das zweite Integral kann in Form eines Binoms dargestellt werden:

$$\frac{v}{(v - v')(v - v'')} \equiv \frac{A_1}{(v - v')} + \frac{A_2}{v - v''},$$

wo A_1 und A_2 konstante Koeffizienten sind, deren Wert bestimmt werden kann. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir beide Seiten mit $(v - v')(v - v'')$. Dann ist:

$$v \equiv A_1 (v - v'') + A_2 (v - v').$$

Ist $v = v'$ und $v = v''$, so hat man:

$$A_1 = \frac{v'}{v' - v''}; \quad A_2 = \frac{v''}{v'' - v'} = -\frac{v''}{v' - v''}$$

und infolgedessen:

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{v\,dv}{(v-v')(v-v'')}&=\frac{1}{v'-v''}\int\left(\frac{v'}{v-v'}-\frac{v''}{v-v''}\right)dv=\\&=\frac{1}{v'-v''}[v'\log(v-v')-v''\log(v-v'')]+C'.\end{aligned}\right\}\qquad(72)$$

Außerdem haben wir $\int dv = v + C''$, wo C' und C'' willkürliche Konstanten sind. Auf Grund von (71) und (72) ergibt sich:

$$t=\frac{1}{a_k+a}\left\{v+\frac{v'+v''}{v'-v''}\left[v'\log(v-v')-v''\log(v-v'')\right]\right\}+C,\qquad(73)$$

darin ist $C = C' + C''$ eine neue willkürliche Konstante.

Bezeichnen wir durch v_0 den Wert von v bei $t = 0$, so gilt:

$$C=-\frac{1}{a_k+a}\left\{v_0+\frac{v'+v''}{v'-v''}[v'\log(v_0-v')-v''\log(v_0-v'')]\right\}.\qquad(74)$$

Und aus (73) und (74)

$$t=\frac{1}{a_k+a}\left\{v-v_0+\frac{v'+v''}{v'-v''}\left[v'\log\frac{v-v'}{v_0-v'}-v''\log\frac{v-v''}{v_0-v''}\right]\right\}.\qquad(75)$$

Das ist die allgemeine Bewegungsgleichung eines Magnetofugalläufers, wenn die Beschleunigung des Magnetofugalfeldes konstant ist.

Wenn $a_k + a = 0$ oder $q = 0$, wird der rechte Teil der Gleichung (75) unbestimmt, und es ist einfacher, um diese Unbestimmtheit zu lösen, die Gleichung (51 a), die entsprechend umgeformt werden kann, ein zweites Mal zu integrieren. Es soll also dieses Mittel angewandt werden.

In unserem Falle nimmt die Gleichung (51 a) folgende Form an:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{fv}{1+q^2v^2}=0\qquad(76)$$

also:

$$f\,dt=-\left(\frac{1}{v}+q^2v\right)dv$$

$$ft=-\left(\int\frac{dv}{v}+q^2\int v\,dv\right)=-\log v-\frac{q^2v^2}{2}+C,$$

wo C eine willkürliche Konstante ist.

Wenn $t = 0$, ist $v = v_0$ und folglich $C=\log v_0+\frac{q^2v^2}{2}$ und

$$t=\frac{1}{f}\log\frac{v_0}{v}+\frac{q^2}{2}(v_0^2-v^2).\qquad(77)$$

Wenn dabei $q = 0$, was z. B. bei sehr schwacher Rotorstreuung auftreten kann, und folglich wenn L_1 in Formel (48 a) sehr klein ist, erscheint die Gleichung (77) in der Form:

$$t=\frac{1}{f}\log\frac{v_0}{v}$$

und

$$v=v_0e^{-ft}.$$

Es soll nun der Fall $q = 0$ in allgemeiner Form betrachtet werden. Die Gleichung (51 a) kann dann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\frac{dv}{dt}+ft=\frac{dv_{II}}{dt}+a_k.\qquad(79)$$

Es wird vorausgesetzt, daß v_{II} eine bekannte Funktion von t ist; die Gleichung (79), die eine lineare Funktion des ersten Grades ist, kann infolgedessen für jede Form dieser Funktion leicht integriert werden. Das allgemeine Integral der Gleichung (76) wird folgende Form haben:



$$v = e^{-ft}\left[\left|\int\left(a_k + \frac{dv_{II}}{dt}\right)e^{ft}\,dt\right|_t + C\right]. \tag{80}$$

Bei $t = 0$ ist $v = v_0$ und folglich:

$$C = -\left|\int\left(a_k + \frac{dv_{II}}{dt}\right)e^{ft}\,dt\right|_0 + v_0. \tag{81}$$

Aus (80) und (81) ergibt sich:

$$v - v_0 = e^{-ft}\int_0^t\left(a_k + \frac{dv_{II}}{dt}\right)e^{ft}\,dt. \tag{82}$$ [1]

Wenn das Feld gleichförmig beschleunigt ist, gilt $\frac{dv_{II}}{dt} = a = \text{const.}$

und

$$v - v_0 = (a_k + a)\,e^{-ft}\int_0^t e^{ft}\,dt = (a_k + a)\,e^{-ft}\frac{1}{f}\,(e^{ft} - 1) = \frac{1}{f}(a_k + a)(1 - e^{-ft}) \tag{83}$$

$$\frac{dv}{dt} = (a_k + a)\,e^{-ft}. \tag{83a}$$

Die Lösung der Gleichung (51a) für den Fall $v_0 = v''$ und $v_0 = v'$ ist schon angegeben worden [siehe Gleichung (63)].

§ 9. Wie wir gesehen haben, können die Wurzeln v^I und v^{II} imaginär sein (und zwar wenn $f^2 < 4a_k^2 q^2$), desgleichen v' und v'', (wenn $f^2 < 4\left(a_k + \frac{dv_{II}}{dt}\right)^2 q^2$). Es soll hier dieser Fall behandelt werden.

Aus (53) ist es augenscheinlich, daß, wenn v^I und v^{II} imaginär sind, diese Größen in folgender Form dargestellt werden können:

$$v^I = \alpha_1 + j\beta_1, \qquad v^{II} = \alpha_1 - j\beta_1, \tag{84}$$

worin

$$d = \frac{f}{2a_k q^2}; \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{4a_k^2 q^2 - f^2}{2\,a_k q^2}}; \quad j = \sqrt{-1}. \tag{85}$$

α_1 und β_1 sind selbstredend reelle Größen.

Aus (84) und (53) gilt:

$$\frac{dv_I}{dt} = -\frac{a_k q^2}{1 + q^2 v^2}(v - \alpha_1 - j\beta_1)(v - \alpha_1 + j\beta_1) = -\frac{[(v - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]\,a_k q^2}{1 + q^2 v^2}. \tag{86}$$

Es folgt daraus, daß wenn v^I und v^{II} imaginär sind und $a_k > 0$, ist $\frac{dv_I}{dt} < 0$ für einen beliebigen Wert von v. Das bedeutet, daß der Läufer in diesem Falle keiner positiven Beschleunigung unterliegen kann. Das ist der Fall, bei welchem der Läufer infolge von Reibungswiderständen sich nicht bewegen kann.

In derselben Weise folgt aus (54), daß die imaginären Wurzeln v' und v'' in folgender Form niedergeschrieben werden können:

$$v' = \alpha_2 + j\beta_2 \qquad v'' = \alpha_2 - j\beta_2, \tag{87}$$

wo:

$$\alpha_2 = \frac{f}{2\left(a_k + \frac{dv_{II}}{dt}\right)q^2}; \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{4\left(a_k + \frac{dv_{II}}{dt}\right)^2 q^2 - f^2}}{2\left(a_k + \frac{dv_{II}}{dt}\right)q^2}. \tag{88}$$

[1] t im Ausdruck e^{-ft} und als obere Integrationsgrenze soll denjenigen Zeitpunkt darstellen, der dem gesuchten entspricht. Dagegen bezieht sich in der Integralfunktion auf verschiedene Momente innerhalb der Integrationsgrenzen. Der Einfachheit halber führen wir keine besonderen Zeichen ein, wie es oft getan wird. In der Formel (80) bedeutet das $|\,|_t$, daß nach der Integrierung derjenige Wert von t eingeführt werden soll, der dem gesuchten v entspricht. Gleicherweise bedeutet $|\,|_0$ in Formel (81), daß man nach der Integrierung t durch 0 ersetzen muß.

Aus (84) und (54) folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{\left(a_k + \frac{d v_{II}}{dt}\right) q^2}{1 + q^2 v^2} (v - \alpha_2 - j\beta_2)(v - \alpha_2 + j\beta_2) = \\ &= \frac{[(v-\alpha_2)^2 + \beta_2^2]\left(a_k + \frac{d v_{II}}{dt}\right) q^2}{1 + q^2 v^2}.\end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Es ist hieraus klar, daß wenn $\frac{d v_{II}}{dt} + a_k > 0$ und wenn v' und v'' imaginär sind, $\frac{dv}{dt} > 0$ sein muß bei beliebigen Werten von v. Das bedeutet physikalisch, daß in diesem Falle der Geschwindigkeitsunterschied zwischen dem Magnetofugalläufer und dem Felde sich immer vergrößern wird.

Wir können das Variationsgesetz von v ermitteln, wenn die Wurzeln v' und v'' imaginär sind und $\frac{d v_{II}}{dt} = a = \text{const.}$

Aus (75) und (87) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}t &= \frac{1}{a_k + a}\left\{v - v_0 + \frac{\alpha_2}{j\beta_2}\left[\log\left(\frac{v - \alpha_2 - j\beta_2}{v_0 - \alpha_2 - j\beta_2}\right)^{\alpha_2 + j\beta_2} - \log\left(\frac{v - \alpha_2 + j\beta_2}{v_0 - \alpha_2 - j\beta_2}\right)^{\alpha_2 - j\beta_2}\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{a_k + a}\left(v - v_0 + \frac{\alpha_2}{j\beta_2}\log\frac{(v - \alpha_2 - j\beta_2)^{\alpha_2 + j\beta_2}(v_0 - \alpha_2 + j\beta_2)^{\alpha_2 - j\beta_2}}{(v_0 - \alpha_2 + j\beta_2)^{\alpha_2 - j\beta_2}(v_0 - \alpha_2 - j\beta_2)^{\alpha_2 + j\beta_2}}\right).\end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Wenn wir in acht nehmen, daß eine komplexe Größe $A + jB$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$A + jB = e^{j \arctang \frac{B}{A}},$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}t &= \frac{1}{a_k + a}\left(v - v_0 + \frac{\alpha_2}{j\beta_2}\log e^{2j\beta_2\left(\arctang\frac{\beta_2}{v - \alpha_2} - \arctang\frac{\beta_2}{v_0 - \alpha_2}\right)}\right) = \\ &= \frac{1}{a_k + a}\left[v - v_0 + 2\alpha_2\left(\arctang\frac{\beta_2}{v - \alpha_2} - \arctang\frac{\beta_2}{v_0 - \alpha_2}\right)\right].\end{aligned}\right\} \quad (90)$$

§ 10. Es soll nun die Joulesche Wärme im Läufer ermittelt werden. Wir bezeichnen als $\dot{W}$ die Wärmeverluste pro Zeiteinheit und Masseneinheit des Läufers. Sie sind gleich der Kraft des Magnetofugalfeldes, die an einer Masseneinheit des Läufers angreift, multipliziert mit der relativen Geschwindigkeit des Feldes in bezug auf den Läufer, d. h.

$$\dot{W} = \left(\frac{d v_I}{dt} + a_k\right) v. \quad (91)$$

Aus (91), (7) und (55) gilt:

$$\dot{W} = \left(-\frac{dv}{dt} + \frac{d v_{II}}{dt} + a_k\right) v = \left(a_k + \frac{d v_{II}}{dt}\right)\left(1 + q^2\frac{(v' - v)(v - v'')}{1 + q^2 v^2}\right) v. \quad (92)$$

Die Totalenergie, die in der Zeit t pro Maßeneinheit entwickelt wird:

$$W = \int_0^t \dot{W}\,dt = \int_0^t v\left(a_k + \frac{d v_{II}}{dt}\right)\left(1 + q^2\frac{(v' - v)(v - v'')}{1 + q^2 v^2}\right) dt. \quad (93)$$

Wenn die Bewegung des Feldes und des Läufers gleichförmig ist, d. h. $\frac{d v_{II}}{dt} = 0$ und $\frac{d v_I}{dt} = 0$, haben wir $v = v''$ und die Leistung, die den Schlupfverlusten entspricht, ist $\dot{W}_k = a_k v'' = \text{const.}$

Infolgedessen ist die Energie der Schlupfverluste, die durch die Ungleichförmigkeit der Läufergeschwindigkeit hervorgerufen wird:

$$W_a = \int_0^t v \left(a_k + \frac{d v_{II}}{dt}\right) \left(1 + q^2 \frac{(v' - v)(v - v'')}{1 + q^2 v^2}\right) dt - a_k v'' t. \tag{94}$$

Im allgemeinen Falle ist es einfacher die Gleichung (94) zu lösen, indem man die zu integrierende Funktion graphisch aufträgt, nachdem die Werte von v schon berechnet worden sind, und dann die entsprechende Kurvenfläche ausmißt.

In bestimmten Fällen ist aber der Ausdruck von W einfach genug. Ist z. B. $q = 0$ und ist das Feld gleichförmig beschleunigt, d. h. $\frac{d v_{II}}{dt} = a = \text{const.}$, so gilt aus (92) und (83):

$$W = \int_0^t \left[v_0 + \frac{1}{f}(a_k + a)(1 - e^{-ft})\right](a_k + a)\, dt =$$

$$= (a_k + a)\left[\left(v_0 + \frac{1}{f}(a + a_k)\right) t - \frac{a + a_k}{f} e^{-ft}\right]. \tag{95}$$

Wenn t nicht sehr klein ist, so können die das e^{-ft} enthaltenden Glieder vernachlässigt werden und

$$W \cong (a + a_k)\left[v_0 + \frac{1}{f}(a + a_k)\right] \cdot t. \tag{96}$$

§ 11. Wir betrachten nun ein Zahlenbeispiel, indem wir einen Magnetofugalläufer voraussetzen, der folgenden Angaben entspricht:

$$\delta_a = 7; \; \Theta = 2; \; \frac{L_1}{R_1} = 5 \times 10^{-2} \sec$$ [1]).

Der elektrisch leitende Teil besteht aus Kupfer und infolgedessen haben wir $\varrho = 1800$ abs. e. m. Einheiten; $\Delta = 8{,}95 \frac{gr}{cm^3}$.

Wir nehmen an, die Länge s des aktiven Teils des Läufers sei ein Vielfaches der Wellenlänge λ des Magnetofugalständers, d. h. $\omega s = \frac{2\pi}{\lambda} s$, und ein vielfacher von 2π.

Dieser Läufer sei durch ein Magnetofugalfeld mit dem Höchstwert $B_0 = 6000$ Gauß angetrieben. Ist die Wellenlänge $\lambda = 50$ cm, so finden wir $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{50} = 0{,}1256 \frac{1}{cm}$

Entsprechend der Formel (45)

$$f = \frac{B_0{}^2}{2\delta_a \Delta \Theta \varrho} = \frac{6000^2}{2 \times 5 \times 8{,}95 \times 2 \times 1750} = 111{,}5 \frac{1}{\sec}.$$

Aus (48a) hat man:

$$q = \frac{\omega L_1}{R_1} = 0{,}1256 \times 5 \times 10^{-2} = 6{,}28 \times 10^{-3} \frac{\sec}{cm}.$$

Der Läufer sei durch eine Widerstandskraft beeinflußt, die ihm eine Beschleunigung in der der Feldbewegung entgegengesetzten Richtung erteilt:

$$a_k = 1000 \text{ cm/sec}^2.$$

Wir nehmen an, daß am Anfang des Prozesses $(t = 0)$ der Läufer unbeweglich ist und folglich $v_{I_0} = 0$. Seine Bewegung soll in folgenden zwei Fällen betrachtet werden:

[1]) Wie wir wissen, hat der Ohmsche Widerstand R_1 und die Reaktanz $2\pi\nu L_1$ (wo ν die Frequenz ist) dieselbe Dimension. Da aber ν die Dimension $\frac{1}{\sec}$ hat, so ergibt sich die oben angegebene Dimension von $\frac{L_1}{R_1}$.

1. Das Magnetofugalfeld bewegt sich gleichförmig.

$$v_{II} = v_{II0} = 2500 \frac{\text{sec}}{\text{cm}} = \text{const.}$$

2. Das Magnetofugalfeld ist gleichmäßig beschleunigt.

$$v_{II} = at.$$

(Die Anfangsgeschwindigkeit des Feldes $v_{II0} = 0$.) Die konstante Beschleunigung des Feldes

$$a = 4000 \text{ cm/sec}^2.$$

Erster Fall.

Entsprechend den Formeln (54) finden wir:

$$v' = \frac{111,5 + \sqrt{111,5^2 - 4 \times 1000^2 \times (6,28 \times 10^{-3})^2}}{2 \times 1000 \times (6,28 \times 10^{-3})^2} = 2790 \text{ cm/sec.}$$

$$v'' = \frac{111,5 - \sqrt{111,5^2 - 4 \times 1000^2 \times (6,28 \times 10^{-3})^2}}{2 \times 1000 \times (6,28 \times 10^{-3})^2} = 12,6 \text{ cm/sec.}$$

Im Anfangsmoment ($t = 0$); $v = v_0 = v_{II0} = 2500$ cm/sec und es ist $v'' < v_0 < v'$. Die Schlüpfung wird sich infolgedessen verkleinern und die Geschwindigkeit des Läufers wird der Geschwindigkeit v_{II0} des Feldes v so lange zustreben, bis v den Wert v'' erreicht und bis:

$$v_I = v_{II0} - v'' = 2500 - 12,6 = 2487,4 \text{ cm/sec.}$$

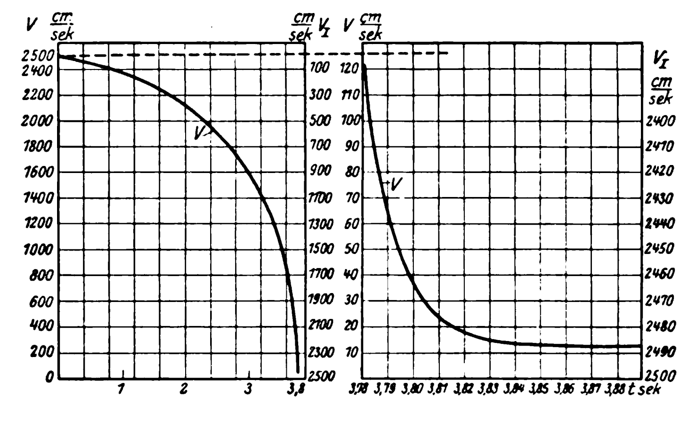


Bild 10.

Wenn v_{II0} größer wäre als v', z. B. $v_{II0} = 2791$ cm-sec, so hätte man bei $t = 0 \; \frac{dv}{dt} > 0$ und wenn die Beschleunigung a_k nicht von der Reibungskraft, sondern z. B. von der Schwerkraft herrührte, so würde sich der Läufer rückwärts bewegen. Da aber diese Beschleunigung durch Reibung hervorgerufen wird, versetzt sich der Läufer nicht in Bewegung.

Es ist also $v_{II0} = 2790$ cm/sec. der Maximalwert der Feldgeschwindigkeit bei der der Läufer noch eben mitgenommen wird; er erreicht dann mit der Zeit die Geschwindigkeit $v_{I\max} = v' - v'' = 2790 - 12,6 = 2777,4$ cm/sec den Höchstwert der Geschwindigkeit, die im gegebenen System bei $v_{II0} = \text{const.}$ überhaupt möglich ist.

Wir können nun die Konstanten für die Gleichung (75) ausrechnen.

$$v' - v'' = 2790 - 12,6 = 2777,4 \text{ cm/sec.}$$

$$v' + v'' = 2790 + 12,6 = 2802,6 \;\; ,, \;\; ,,$$

$$\frac{v' + v''}{v' - v''} v' = 2820 \text{ cm/sec}; \quad \frac{v' + v''}{v' - v''} v'' = 12,75 \text{ cm/sec.}$$

Dann hat man (75):

$$t = \frac{1}{1000}\left(v - 2500 + 2820 \log \frac{2790 - v}{290} + 12,75 \log \frac{v - 12,6}{2487,4}\right).$$

Setzt man nun anstatt v verschiedene Werte von $v_0 = 2500$ cm/sec bei $t = 0$ bis $v = v'' = 12,6$ cm/sec in diese Gleichung ein, so erhält man die Kurve $v = f(t)$.



die in Bild 10 dargestellt ist. Es ist leicht einzusehen, daß bei $t = \infty$, $v = v'' = 12{,}6$ und daß die Schlüpfung diesem Werte asymptotisch zustrebt.

Es können nun die Jauleschen Verluste im Läufer für den Fall konstanter Feldgeschwindigkeit ermittelt werden. Zu diesem Zwecke konstruieren wir die Kurve (Bild 11) entsprechend der Gleichung (92), die nach Substitution aller Konstanten unseres Beispiels folgende Form annimmt:

$$\dot{W} = v \times 1000 \left[1 + \frac{(6{,}28 \times 10^{-3})^2 (2790 - v)(v - 12{,}6)}{1 + (6{,}28 \times 10^{-3} v)^2} \right].$$

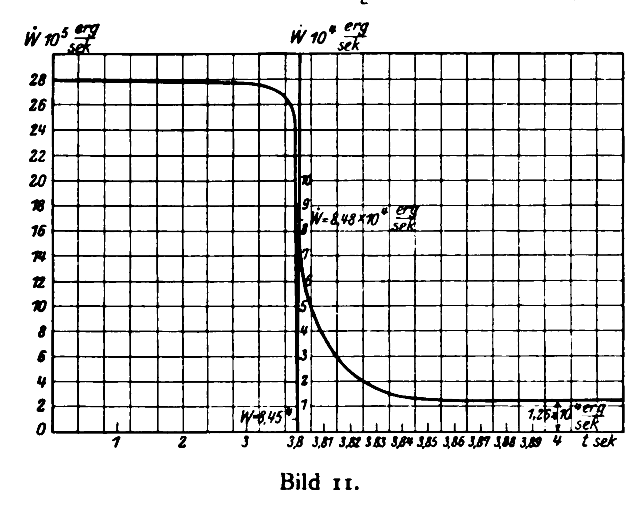


Bild 11.

Die Fläche dieser Kurve stellt W dar. Ziehen wir vom so ermittelten Wert von W die Größe $a_k v'' t = 100 \times 12{,}6 \times t$ ab [entsprechend der Formel (94)], so erhalten wir W_a, d. h. die Totalenergie pro Massengramm des Magnetofugalläufers, die in elektrischen Strömen infolge der Beschleunigung verbraucht wird (Schlupfverluste):

$$W_a = 10{,}9 \times 10^6 \text{ Erg.} = 1{,}09 \text{ Joule.}$$

Zweiter Fall.

Entsprechend der Formel (54) haben wir:

$$v' = \frac{111{,}5 + \sqrt{111{,}5^2 - (1000 + 4000)^2 \times (6{,}28 \times 10^{-3})^2}}{2 \times (1000 + 4000)(6{,}28 \times 10^{-3})^2} = 510 \text{ cm/sec}$$

$$v'' = \frac{111{,}5 - \sqrt{111{,}5^2 - (1000 + 4000)^2 \times (6{,}28 \times 10^{-3})^2}}{2 \times (1000 + 4000)(6{,}28 \times 10^{-3})^2} = 45 \text{ cm/sec}$$

$$q^2 v''^2 = (6{,}28 \times 10^{-3} \times 45)^2 = 0{,}08.$$

Da die Wurzeln v' und v'' reell sind und $v_0 = 0 < v''$, wie oben erwähnt worden ist, wird v dem Werte v'' asymptotisch zustreben, der also als Höchstwert von v erscheint.

Um das Variationsgesetz von v annähernd zu bestimmen, können wir die Größe $q^2 v^2 < q^2 v''^2 = 0{,}08$ in der Gleichung (51a) vernachlässigen. Wir können uns also der Differentialgleichung von der Form (79) und ihrer Lösung (83) bedienen. Setzt man in (83) die erhaltenen Werte der Konstanten ein, so findet man:

$$v = \frac{5000}{111{,}5}(1 - e^{-111{,}5}) = 45\,(1 - e^{-111{,}5\,t}).$$

Weitere Berechnungen ergeben, daß wenn $t = 0{,}04$ sec, $e^{-111{,}5\,t} < 0{,}01$.

Wir sehen also, daß die Größe v innerhalb einer kurzen Zeitdauer ihren Höchstwert praktisch erreicht, und daß die v-Linie dann parallel zur Abszissenachse verläuft.

Es soll darauf hingewiesen werden, daß der Höchstwert von v, der unter der Vorraussetzung $q = 0$ ermittelt worden ist (entsprechen der Genauigkeit unserer Berechnungen mittels des Rechenschiebers), dem Werte v'' gleich ist, der unter Berücksichtigung von q berechnet worden ist. Das bestätigt indirekt unsere Annahme, daß die Vernachlässigung der Größe $q^2 v^2$ im Ausdruck $1 + q^2 v^2$ der Gleichung (51a) zulässig ist.

Die v-Kurve ist in Bild 12 dargestellt, in demselben Bilde sind auch die v_{II}- und v_I-Kurven gegeben. Man sieht, daß v_I den Wert 2500 cm/sec schon nach

Verlauf von t = 0,63 sec erreicht, d. h. innerhalb der Zeit der im Falle von v_{II0} = const. der Schlüpfung v = 2480 cm/sec (siehe Bild 10) und $v_I = v_{II0} - v = 2500 - 2480 = 20$ cm/sec entspricht.

Die Energie, die pro Masseneinheit des Läufers in Form von Joulescher Wärme verbraucht wird, bis er die Geschwindigkeit von 2500 cm/sec beim gleichförmig beschleunigten Felde erreicht, ergibt sich aus Formel (96):

$$W = \frac{5000^2}{2 \times 111,5} \times 0,7 = 1,57 \times 10^6 \text{ Erg.}$$

Wir erhalten beinahe dasselbe Resultat, wenn wir die Energie für $v = v''$ = const. berechnen:

$$W = (a + a_k) v'' t = 5000 \times 45 \times 0,7 = 1,75 \times 10^5 \text{ Erg.},$$

davon wird nur:

$$W_a = a v'' t = 4000 \times 45 \times 0,7 = 1,26 \times 10^5 \text{ Erg.} = 0,0126 \text{ Joule}$$

für den eigentlichen Antrieb in Form von Schlupfverlusten verbraucht.

Diese Verluste stellen etwa 1,3% der Verluste dar, die sich für die Beschleunigung des Läufers bei konstanter Feldgeschwindigkeit ergeben.

Wir sehen, daß durch allmähliche Änderung der Geschwindigkeit des Magnetofugalfeldes die Verluste im Läufer bedeutend herabgedrückt werden können. Es ist daher zu hoffen, daß solche Felder zum Antrieb der stoßweise arbeitenden Maschinen, wie Hämmer, Fallwerke usw. mit Erfolg angewendet sein können.

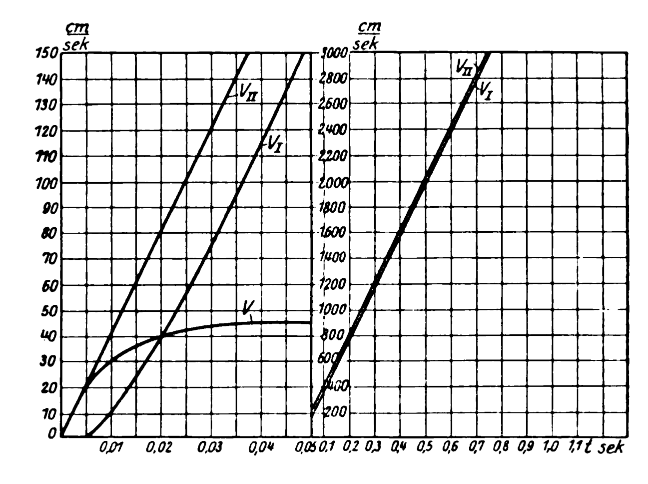


Bild 12.

Der Verfasser beabsichtigt, in nächster Zeit eine experimentelle Prüfung der in dieser Arbeit ermittelten Schlußfolgerungen durchzuführen. Dabei hält der Verfasser für seine angenehme Pflicht, den herzlichsten Dank Herrn Dipl.-Ing. L. B. Krassin auszusprechen, dessen freundliche Mitwirkung den Bau der zur experimentellen Untersuchung notwendigen Maschinen und Apparate ermöglichte.

Herr Dipl.-Ing. S. M. Preß hat die Arbeit durchgelesen und einige freundliche Ratschläge gegeben, Herr M. N. Balkashin alle Abbildungen ausgeführt und Fräulein M. King die Handschrift abgeschrieben und korrigiert, wofür der Verfasser seinen Dank ausspricht.

Zusammenstellung.

1. Ein bewegliches magnetisches Feld, das durch einen mehrphasigen Strom hervorgerufen wird (Magnetofugalfeld), eine veränderliche Amplitude B_0 der Induktion B an der Arbeitsfläche und eine veränderliche Geschwindigkeit v hat, kann dargestellt werden in Form einer Sinus-Funktion mit veränderlicher Zeitpulsation $\Omega = 2\pi\nu$ mit variabler Induktionsamplitude B_0 und konstanter Raumpulsation $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ dargestellt werden, wo λ die Wellenlänge des Magnetofugalfeldes und ν der Momentanwert der Periodenzahl ist:

$$B = B_0 \sin \omega (C_0 - \int_0^t v dt + \sigma) = B_0 \sin (\omega C_0 - \int_0^t \Omega dt + \omega s).$$



Darin ist σ die Raumkoordinate eines gegebenen Punktes auf der Arbeitsfläche und C_0 ein konstanter Wert von σ.

2. Ein Magnetofugalfeld von veränderlicher Geschwindigkeit v und Induktions-amplitude B_0 kann in derselben Weise wie ein Magnetofugalfeld von konstanter Geschwindigkeit und Induktions-Amplitude durch ein System rotierender Vektoren dargestellt werden, welche verschiedenen Punkten auf der Arbeitsfläche der Vorrichtung, die das Magnetofugalfeld hervorruft (Magnetofugalständer), entsprechen. Diese Vektoren rotieren mit einer zeitlich variablen Winkelgeschwindigkeit Ω, die aber für sämtliche Vektoren in jedem Zeitpunkte gleich ist. Der Momentanwert der so dargestellten Größe wird durch die Projektion des entsprechenden Vektors auf eine fixe Achse gemessen wie im Falle der konstanter Amplitude und Geschwindigkeit.

3. Entsprechend der Vektorialdarstellung des Magnetofugalfeldes von veränderlicher Geschwindigkeit und Amplitude kann man sich zwecks dessen Analyse der komplexen Größen bedienen.

4. Das Magnetofugalfeld von veränderlicher Geschwindigkeit und von konstanter Amplitude induziert in jedem beliebigen Zeitpunkte eine EM.-Kraft, die der durch ein ebensolches Feld von konstanter dem Momentanwert der variablen Feldgeschwindigkeit gleicher Geschwindigkeit hervorgerufenen EM.-Kraft gleich ist.

Wenn aber die Amplitude auch veränderlich ist, so entsteht eine zusätzliche EM.-Kraft, welche gegen die vorher erwähnte um 90° verschoben und proportional dem Differentialquotient der Induktionsamplitude nach der Zeit ist.

5. In vorliegender Arbeit wird eine Differentialgleichung für ein System von Stromleitern abgeleitet, die durch das Magnetofugalfeld angetrieben werden (Magnetofugalläufer). Mit Hilfe dieser Gleichung ist es möglich, den Bewegungscharakter des Magnetofugalläufers in verschiedenen Fällen zu beurteilen. Es ist z. B. möglich nachzuweisen, daß, wenn der Magnetofugalläufer mit schwacher, relativer Geschwindigkeit des Feldes in bezug auf den Läufer angetrieben wird, die kleiner als die „untere kritische Geschwindigkeit“ ist, sich aber allmählich vergrößert, man den Antrieb mit viel schwächerer Schlüpfung erhalten kann als bei konstanter Feldgeschwindigkeit.

6. Im Fall der gleichförmigen Beschleunigung des Magnetofugalfeldes kann die Bewegungsgleichung des Magnetofugalläufers (genauer die Gleichung der relativen Geschwindigkeit des Feldes in bezug auf den Läufer) als Funktion der Zeit leicht integriert werden. In gewissen Fällen, z. B. bei schwacher Streuung oder kleiner Geschwindigkeit des Feldes in bezug auf den Läufer, ist das Integral besonders einfach.

7. Die vorliegende Arbeit gibt eine Methode an, mit deren Hilfe die Jouleschen Verluste im Magnetofugalläufer berechnet werden können. Wenn die Geschwindigkeit des Magnetofugalfeldes gleichförmig wächst und die Streuung und die relative Geschwindigkeit des Feldes in bezug auf den Läufer verhältnismäßig klein sind, kann der Totalverlust in einfacher analytischer Form ausgedrückt werden. In anderen Fällen ist es einfacher, ihn graphisch zu ermitteln.

In den Beispielen, die am Ende des Aufsatzes angeführt sind, werden die Bewegungen eines Läufers verglichen, der aus dem Ruhezustand durch ein Magnetofugalfeld von konstanter Geschwindigkeit bzw. mit gleichförmiger Beschleunigung angetrieben wird, wobei die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null ist.

Im zweiten Falle ist der Läufer in kürzerer Zeit beschleunigt und die Verluste sind bedeutend kleiner. Es ist daher zu hoffen, daß solche Felder zum Antrieb der stoßweise arbeitenden Maschinen, wie Hämmer, Fallwerke usw., mit Erfolg angewendet sein können.

London, Januar 1924.

Abgeschlossen am 30. Oktober 1924.

Archiv für Elektrotechnik

XIV. Band. 2. Heft 1924.

Die Zusatzstromverluste unvollkommen verschränkter Leiter.

Von

Robert Pohl, AEG Turbinenfabrik, Berlin.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß der Faktor $K = \frac{\text{Wechselstromwiderstand}}{\text{Gleichstromwiderstand}}$ für einen nach Bild 1 verschränkten Leiter gleich dem eines zu unterst in der Nut liegenden massiven Leiters halber Höhe, für einen nach Bild 6 verschränkten Leiter gleich dem eines solchen von viertel Höhe ist und daß er für beliebig viele in der Nut übereinander liegende Stäbe dieser Art konstant, also unabhängig von ihrer Höhenlage ist. Hierbei ist die Teilleiterdicke als verschwindend klein angenommen.

Die benutzte Berechnungsweise läßt sich auch bei im Kopf verschränkten Spulenwicklungen mit parallelen Teilleitern für die Bestimmung der Höhe des äquivalenten unverschränkten Leiters anwenden. Diese ist unabhängig von der Anzahl der Windungen je Spule durch die halbe Höhe einer Windung bestimmt, kann aber leicht durch eine Verschränkung nach Bild 6 auf ein Viertel der Windungshöhe herabgesetzt werden.

Es herrscht vielfach noch die Meinung, daß eine praktisch ausreichende Unterdrückung der zusätzlichen Verluste in Nutenleitern von Wechselstrommaschinen

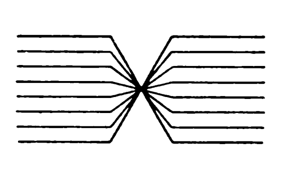


Bild 1.

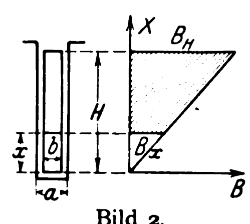


Bild 2.

dadurch erreicht werden könne, daß man sie aus parallelen Teilleitern zusammensetzt und diese nach Art des Bildes 1 symmetrisch zur Leiterachse versetzt. Es ist zwar bekannt, daß die Bedingung für den Fortfall der Wirbelströme — Gleichheit der durch das Streufeld induzierten EMK in allen Teilleitern — hierbei selbst dann nicht erreicht ist, wenn man die Versetzungsstelle als vernachlässigbar kurz ansieht, aber man ist angesichts der leichten Ausführbarkeit einer solchen Verschränkung, z. B. im Wickelkopf von Spulenwicklungen oder nach D. R. P. 294023, geneigt, diesen Fehler zu übersehen und die entstehenden Verluste außer acht zu lassen. Es soll nun gezeigt werden, wie die verbleibenden Verluste auf einfache Weise zu berechnen sind. Dabei ergibt sich, daß die durch die Verschränkung erzielte Verbesserung bei weitem nicht so groß ist, wie gemeinhin angenommen wird, wenn wir es mit einem Leiter pro Nut zu tun haben, daß dagegen die Verbesserung um so größer ist, je mehr solcher Leiter in der Nut übereinander liegen.

Ist H die Höhe, b die Breite eines in einer Nut der Breite a liegenden Leiters (Bild 2). J der Effektivwert des ihn durchfließenden Stromes, so ist die maximale Dichte des Nutenquerfeldes in der Höhe x

$$B_x = B_H \frac{x}{H} = \frac{4\pi}{10} \frac{\sqrt{2}\,J}{a} \frac{x}{H},$$

der einen Leiterstreifen in der Höhe x umschlingende Fluß (schraffierte Fläche im Bild 2)

$$N_x = \frac{1}{2} B_H H - \frac{1}{2} B_x x = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{10} \frac{\sqrt{2}\,J}{a} \left(H - \frac{x^2}{H}\right),$$

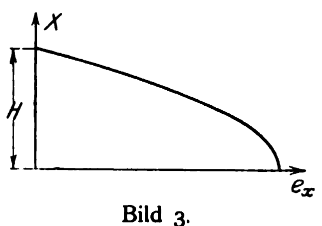


Bild 3.

also für f Perioden die entsprechende Streu-EMK

$$e_x = 4{,}44 \quad f \cdot N_x \cdot 10^{-8} = c\left(H - \frac{x^2}{H}\right), \qquad (1)$$

wo

$$c = 3{,}93\, f \frac{J}{a} 10^{-8}.$$

e_x hat einen parabolischen Verlauf und erreicht für $x = 0$ seinen Höchstwert (s. Bild 3). Dies gilt für einen unverschränkten Leiter, der massiv oder aus parallelen Teilleitern zusammengesetzt sein kann. Betrachten wir dagegen einen nach Bild 1 verschränkten Stab, dessen Teilleiter unendlich dünn sein mögen, und vernachlässigen wir den Einfluß der Verschränkungsstelle, so liegt der zunächst in der Höhe x verlaufende Teilleiter in seiner zweiten Hälfte in der Höhe $H - x$. Gleichung (1) geht also über in

$$e'_x = c\,\frac{1}{2}\left(H - \frac{x^2}{H} + H + \frac{(H-x)^2}{H}\right) = c\left(\frac{H}{2} + x - \frac{x^2}{H}\right). \qquad (2)$$

e'_x ist ebenfalls eine Parabel und hat genau den gleichen Verlauf wie e_x in Bild 3, nur liegt sie symmetrisch zur Stabachse und ist um $\frac{1}{4}\, e_{x\,max}$ nach links verschoben. Führt man zum Beweise hierfür in die vorstehende Gleichung $x = x' + \frac{H}{2}$ ein, wodurch die Abszissenachse in die Stabachse verlegt wird, so geht sie über in

$$e'_{x'} = c\left(\frac{3}{4} H - \frac{x'^2}{H}\right). \qquad (3)$$

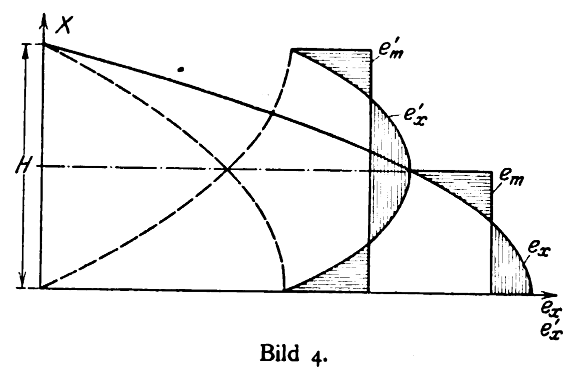


Bild 4.

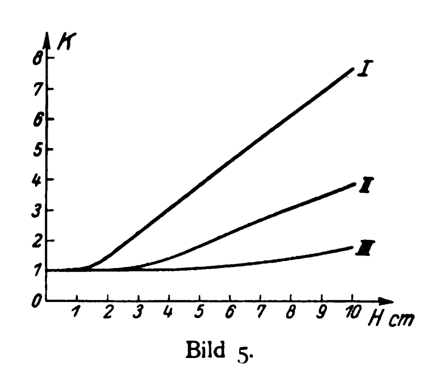


Bild 5.

Der Faktor von x'^2 ist also wiederum $\frac{c}{H}$, gleich dem von x^2 in Gleichung (1). Hieraus folgt, daß e'_x eine mit e_x übereinstimmende Parabel ist, deren Achse jedoch jetzt mit der Stabachse zusammenfällt. Die Wirbelstromverluste in jeder Hälfte des verschränkten Leiters müssen also die gleichen sein, wie in dem unteren von zwei je den Strom $\frac{J}{2}$ führenden massiven Leitern. Denn die EMK der Wirbelströme e_m bzw. e'_m ist durch die Abweichung der e_x- bzw. e'_x-Kurve von ihrem Mittelwerte, d. h. durch die schraffierten Flächen von Bild 4 bestimmt, die bzw. gleich sein müssen, weil die Parameter der e_x- und e'_x-Kurven gleich sind.

Für Wicklungen mit einem Leiter pro Nut, bzw. für die untersten Leiter von Mehrstabwicklungen gelten die in Bild 5 gezeichneten Kurven, die den Verlustfaktor $K = \frac{\text{Wechselstromwiderstand}}{\text{Gleichstromwiderstand}}$ für mäßig erwärmtes Kupfer bei 50 Perioden und $\frac{b}{a} = 0{,}6$ angeben, und zwar in I für unverschränkte Leiter und in II für Leiter nach Bild 1. Kurve I ist mittels der Fieldschen Formel berechnet, während, der vorstehenden Erkenntnis entsprechend, Kurve II aus I lediglich durch Verdoppelung der Abszisse H entsteht. Man erkennt, daß von etwa 3 cm Höhe ab die Zusatzverluste auch für den verschränkten Leiter beträchtliche Werte annehmen.

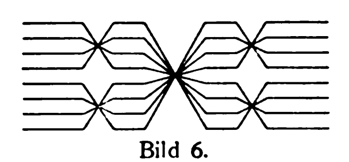


Bild 6.

Will man sie für Leiter größerer Höhe weiter verringern, so kann man zu einem zweifach verschränkten Leiter nach Bild 6 übergehen, bei dem jede Hälfte der Leiterlänge in $^1/_4$ bzw. $^3/_4$ der Gesamtlänge nochmals symmetrisch verschränkt ist. Die Verluste eines solchen Stabes sind das Vierfache eines massiven Stabes der Höhe $\frac{H}{4}$. Der Beweis ist ähnlich wie vorher zu erbringen. Betrachten wir die EMK-Kurve der obereren Hälfte e''_x, so geht sie aus der oberen Hälfte der $e'_{x'}$-Kurve hervor, wie diese aus der e_x-Kurve entstand, nämlich

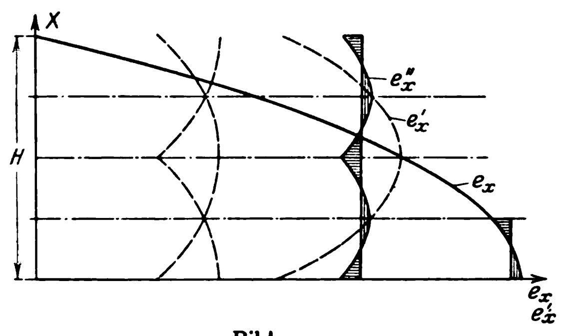


Bild 7.

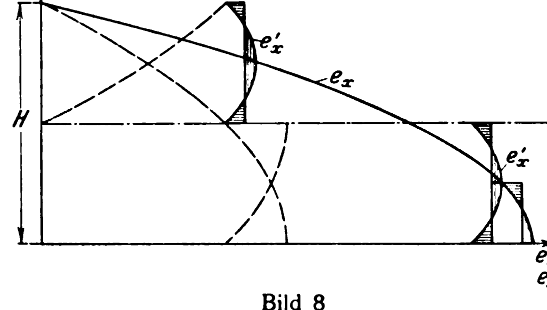


Bild 8

$$e''_{x'} = \frac{1}{2} e'_{x'} + \frac{1}{2} e'_{\frac{H}{2} - x'} = c \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} H - \frac{x'^2}{H} + \frac{3}{4} H - \frac{\left(\frac{H}{2} - x'\right)^2}{H} \right) = c \left(\frac{5}{8} H + \frac{x'}{2} - \frac{x'^2}{H} \right).$$

Setzt man nun $x' = x'' + \frac{H}{4}$, d. h. verschiebt man die Abszissenachse um $\frac{H}{4}$ in die Mitte der oberen Stabhälfte, so ergibt sich

$$e''_{x''} = c \left(\frac{11}{16} H - \frac{x''^2}{H} \right) \tag{4}$$

wiederum eine Parabel mit dem gleichen Parameter wie e_x und e'_x.

Da sich die untere Stabhälfte aus Symmetriegründen der oberen gleich verhalten muß, so besteht die e''_x-Kurve aus 4 gleichen Parabelbögen, die dem Bogen der ursprünglichen e_x-Kurve im untersten Viertel der Höhe H gleich sind, s. Bild 7. Somit erhält man auch ohne weiteres den K-Faktor eines zweifach verschränkten Stabes, wenn man die Abszissenwerte der Kurve I Bild 5 vervierfacht.

Wie verhalten sich nun Stäbe nach Bild 1, wenn sie zu mehreren übereinander in einer Nut liegen? Wir haben bisher nur den untersten Stab der Nut betrachtet, wie verhalten sich die höher liegenden? Um das interessante Ergebnis vorwegzunehmen: alle Leiter in der Nut haben den gleichen K-Faktor, im Gegensatz zu massiven Leitern, deren K-Faktor mit ihrer Höhenlage sehr stark anwächst. Bild 8 zeigt als Beispiel den e_x- und e'_x-Verlauf für eine Zweistabwicklung. Man sieht, daß e'_x für den oberen Stab zwar nach links gerückt ist, aber die gleiche Krümmung aufweist wie für den unteren, im Gegensatz zu der e_x-Kurve, die für den oberen zweier unverschränkter Leiter einen bedeutend höheren Verlust ergeben würde.

Der allgemeine Beweis dafür, daß bei mehreren nach Bild 1 verschränkten Stäben je Nut der K-Faktor von der Höhenlage in der Nut unabhängig ist, läßt sich wie folgt führen:

Ein solcher Leiter der Höhe $H' = x_2 - x_1$ (Bild 9) habe die beliebige Höhenlage x_1 bis x_2 einer Nut, für die $e_x = c\left(H - \frac{x^2}{H}\right)$. Wir drehen den zwischen x_1 und x_2 liegenden Parabelbogen der e_x-Kurve um die mittlere Ordinate $\frac{x_1 + x_2}{2}$, d. h. wir bilden

$$e_{x_1 + x_2 - x} = c\left(H - \frac{(x_1 + x_2 - x)^2}{H}\right)$$

und erhalten die für die Zusatzströme des betrachteten Stabes maßgebende Kurve

$$e'_x = \frac{1}{2}(e_x + e_{x_1 + x_2 - x}) = c\left(H - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2H} + \frac{(x_1 + x_2)x}{H} - \frac{x^2}{H}\right).$$

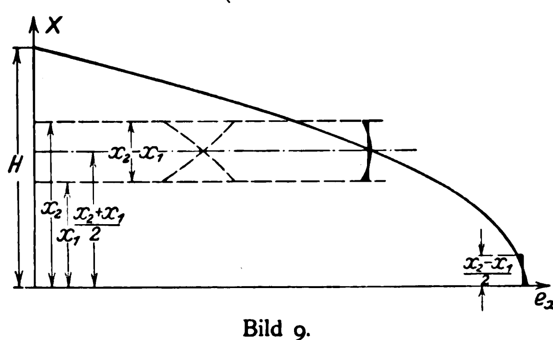


Bild 9.

Verschieben wir jetzt die Abszissenachse in die Mitte des betrachteten Leiters, indem wir setzen $x = \frac{x_1 + x_2}{2} + x'$, so findet sich

$$e'_{x'} = c\left(H - \frac{(x_1 + x_2)^2}{4H} - \frac{x'^2}{H}\right). \tag{5}$$

Das Glied mit x'^2 hat also wieder den Faktor $\frac{c}{H}$, die e'_x-Kurve also die gleiche Krümmung wie die e_x-Kurve, nur ist ihre Achse in die des betrachteten Leiters und ihr Scheitel um $\frac{(x_1 + x_2)^2}{4H}$ nach links verschoben. Die in jeder Hälfte des Leiters auftretenden Zusatzströme sind also die gleichen wie die eines zu unterst in der Nut liegenden unverschränkten Leiters der Höhe $\frac{H'}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}$. Alle Leiter einer Nut haben daher den gleichen K-Faktor, so daß auch ein Unterschied zwischen K_{Leiter} und K_{Nut} nicht mehr besteht. Hierbei ist angenommen, daß die Leiter hintereinander geschaltet sind oder sonstwie den gleichen Strom zu führen gezwungen sind.

Die vorstehenden Ableitungen beruhen auf der Voraussetzung so dünner Teilleiter, daß die in ihnen selbst entstehenden Wirbelströme vernachlässigbar sind. Bei Teilleitern erheblicher Dicke sind die Ergebnisse unserer Betrachtung daher nicht mehr ohne weiteres anwendbar. Es wäre dann auch verfehlt, wenn man die Wirbelströme in den einzelnen Teilleitern mit Hilfe des Verlaufs der e'_x- bzw. e''_x-Kurven berechnen wollte. Man muß vielmehr annehmen, daß diese Ströme jeweils zwischen einer Verschränkungsstelle und dem Stabende bzw. zwischen zwei Verschränkungsstellen kreisen, daß sie also durch die viel stärkere Neigung der e_x-Kurve erzeugt werden. Man hat demnach die Wirbelstromverluste der Teilleiter nach Field oder einfacher nach der Formel des Verfassers (ETZ 1920, S. 908)

$$K = 1 + c\left(\frac{f}{100}\cdot\frac{b}{a}\right)^2 h^4$$

zu berechnen und den Zusatzstromverlusten des ganzen Leiters, wie sie auf Grund der vorstehenden Erwägungen bestimmt sind, sinngemäß hinzuzufügen.

Die benutzte Berechnungsweise läßt sich auch bei im Kopf verschränkten Spulenwicklungen mit parallelen Teilleitern für die Bestimmung der Höhe des äquivalenten unverschränkten Leiters anwenden. Erfolgt die Verschränkung in der üblichen Weise durch Umkehrung der eine Nut füllenden Spule im Wickelkopf, so ist ohne weiteres zu erkennen, daß die beiden aktiven Spulenseiten jeder aus m Windungen bestehenden Spule in m Paare von Leitern zerlegt werden können, die je die gleiche Höhenlage in der Nut einnehmen und als nach Bild 1 verschränkt aufgefaßt werden können, da die Reihenfolge ihrer Teilleiter umgekehrt ist. Die Höhe des äquivalenten unverschränkten Leiters ist also für jedes dieser Paare gleich der halben Kupferhöhe einer Windung. Der Zusatzstromverlust jedes Nuteninhaltes ist demnach gleich dem 2 m fachen eines zu unterst in der Nut liegenden massiven Stabes von der halben Kupferhöhe einer Windung. Zu berücksichtigen ist hierbei aber noch, daß diese Zusatzströme durch die freie Länge gedämpft werden. Sie werden dadurch im Verhältnis $\frac{\text{aktive Länge}}{\text{Windungslänge}}$ herabgedrückt und fallen dann meist hinreichend klein aus. Sollte dies nicht der Fall sein, so kann man durch eine Umkehrung der halben Höhen der Teilleiter in sich, die für jede Phase nur einmal in ihrer Mitte zu erfolgen braucht, auf eine Verschränkung nach Bild 6 übergehen. Jetzt kommt als äquivalente Höhe des unverschränkten Leiters $^1/_4$ der Windungshöhe in Betracht. Die Zusatzströme werden so mit Sicherheit vernachlässigbar klein, so daß für die zusätzlichen Kupferverluste ausschließlich die in üblicher Weise zu berechnenden Wirbelstromverluste der einzelnen Teilleiter maßgebend sind.

Vergleich von Drehstromkabeln verschiedener Ausführungsformen.

Von

Dr. R. Dieterle und Dipl.-Ing. G. Eggeling, Charlottenburg.

I. Einleitung.

Zur Übertragung von Drehstrom werden heutzutage in steigendem Maße Kabel verwendet, insbesondere wenn es sich um Energieübertragungen in Städten und sonstigen dichtbevölkerten Gebieten handelt.

Überwiegend finden verseilte Dreifachkabel Anwendung; Drehstromkabel mit konzentrischen Leitern werden nur noch in Ausnahmefällen verlangt. Die Leiter der verseilten Dreifachkabel bestehen von 16 mm^2 ab aus Seilen und haben kreis- oder sektorförmigen Querschnitt. Da sektorförmige Leiter an ihrem Umfang Stellen stärkerer Krümmung aufweisen als querschnittsgleiche Rundleiter, so scheint bei gleicher Isolationsstärke die Gefahr eines Durchschlags beim Sektorkabel größer. Demgemäß werden in der Praxis Sektorkabel im allgemeinen nicht für hohe Spannungen, nämlich nur bis 15 kV Betriebsspannung ausgeführt. Dagegen sind Rundleiterkabel schon mit Spannungen bis zu 35 kV im Betrieb. In England wurden die sogenannten „splitconductors" (gespaltene Leiter) in Verbindung mit dem Schutzsystem Merz-Hunter entwickelt (Brit. Patent Nr. 22624 vom Jahre 1911). In einem weiteren brit. Patent Nr. 111351 vom Jahre 1918 wurden an Stelle der „split-conductors" die „parallel-conductors" in der Anordnung eines symmetrisch gebauten Sechsfachkabels erwähnt, bei dem je zwei diametral gegenüberliegende Leiter parallel geschaltet und mit Schutzvorrichtungen zum Abschalten fehlerhafter Strecken versehen waren. Über die obere Grenze der Betriebsspannungen derartiger Kabel wurden keine Angaben gemacht.

Handelt es sich um Übertragung mit höherer Spannung als 35 kV, so werden für die Drehstromphasen drei Einfachkabel verwendet; hierbei wird das Dielektrikum zwischen Leiter und Bleimantel nur mit dem $\frac{1}{\sqrt{3}}$ fachen Betrage der Betriebsspannung beansprucht; außerdem verlaufen sämtliche Feldlinien senkrecht zur Schichtung des Papiers. Auf diese Weise werden heute schon Drehspannungen von 50 kV übertragen. Werden die drei Einfachkabel miteinander verseilt, wobei die Bleimäntel durch dünne Metallbeläge ersetzt werden, so lassen sie sich unter einem gemeinsamen Bleimantel mit Bewehrung vereinigen. Diese Kabelart, sowie die Einfachkabel sollen im folgenden außer Betracht bleiben. Den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bilden die gewöhnlichen, verseilten Dreifachkabel für Hoch- und Niederspannung mit runden und sektorförmigen Leitern sowie die Sechsfachkabel mit symmetrisch angeordneten Rundleitern. Der Vergleich derselben erstreckt sich auf Kapazität, Induktivität, dielektrische Festigkeit, Belastbarkeit und thermische Eigenschaften; hieran schließen sich wirtschaftliche Betrachtungen.

II. Theoretischer Teil.

1. Kapazität.

In der Praxis interessiert man sich für die Kapazitätsverhältnisse von Starkstromkabeln im allgemeinen nur mit Rücksicht auf die durch sie bedingten Ladeströme; insbesondere wünscht man die Größe des Ladestromes jedes Leiters zu kennen. Zu diesem Zweck definiert man für Mehrphasenkabel eine „Betriebskapazität" C gemäß der bekannten Gleichung für den Ladestrom



$$J_c = V \omega C \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Amp}, \qquad (1)$$

worin V die Phasenspannung in Volt und ω die Kreisfrequenz bedeuten. Diese Betriebskapazität C hängt natürlich von den Kapazitäten der Leiter gegeneinander und gegen den Bleimantel ab. Bezeichnet man bei einem symmetrischen Dreifachkabel gemäß Bild 1 die Teilkapazitäten der Leiter gegeneinander mit

$$c_{12} = c_{23} = c_{31} = c_I$$

und ihre Teilkapazitäten gegen den Mantel mit $c_{10} = c_{20} = c_{30} = c_0$, so berechnet sich nach F. Breisig[1]) die Betriebskapazität C zu

$$C = c_0 + 3\,c_I. \qquad (2)$$

Die Betriebskapazität läßt sich auch als Funktion der geometrischen Abmessungen des Kabels angeben. Nach L. Lichtenstein[2]) lautet die Formel in dem üblichen Maß in erster Annäherung:

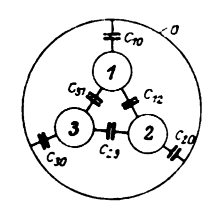


Bild 1. Teilkapazitäten des Dreifachkabels.

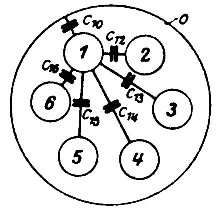


Bild 2. Teilkapazitäten des Sechsfachkabels.

$$C = \frac{0{,}0483\,\varepsilon}{{}^{10}\log \dfrac{3\,d^2 (R^2 - d^2)^3}{r^2 (R^6 - d^6)}}\ \mu\mathrm{F/km}, \qquad (3)$$

wobei r der Leiterhalbmesser, d der Abstand der Leiterachsen von der Kabelachse, R der Halbmesser unter Blei und ε die Dielektrizitätskonstante des Isoliermaterials sind.

Für Dreifachkabel mit Sektorleitern ist noch keine entsprechende Formel für C als Funktion der Querschnittsabmessungen veröffentlicht. Vergleicht man zwei Dreifachkabel mit Rund- und mit Sektorleitern von gleichem Querschnitt und gleicher Isolationsstärke an Hand von maßstäblichen Zeichnungen, so fällt ohne weiteres in die Augen, daß das Kabel mit sektorförmigen Leitern die größere Kapazität hat. Mit zunehmender Isolationsstärke sowie abnehmendem Leiterquerschnitt wird der Unterschied entsprechend geringer.

Für das symmetrische Sechsfachkabel werden die Kapazitätsgleichungen im folgenden abgeleitet.

Werden gemäß Bild 2 die Teilkapazitäten des symmetrisch gebauten Sechsfachkabels mit

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_{23} = \ldots = c_I \\ c_{13} &= c_{24} = \ldots = c_{II} \\ c_{14} &= c_{25} = \ldots = c_{III} \\ c_{10} &= c_{20} = \ldots = c_0 \end{aligned}$$

bezeichnet und erteilt man den Leitern 1—6 die Potentiale $v_1, v_2 \ldots\ldots v_6$, dem Mantel das Potential 0, so lauten die Maxwellschen Kapazitätsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= c_{10} v_1 + c_{12}(v_1 - v_2) + c_{13}(v_1 - v_3) + c_{14}(v_1 - v_4) + c_{15}(v_1 - v_5) + c_{16}(v_1 - v_6) \\ q_2 &= c_{20} v_2 + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Hierbei ist noch keine Festsetzung über die Potentiale v_1 bis v_6 getroffen worden. Im Drehstrombetrieb hängt ihre Größe von der Schaltung der sechs Leiter ab.

Es sind 3 bevorzugte Schaltungen möglich:

[1]) F. Breisig, ETZ Bd. 23, S. 1140, 1902.

[2]) L. Lichtenstein, ETZ Bd. 25, S. 110, 1904.

1. Je 2 gegenüberliegende Leiter werden parallel geschaltet, das heißt:

$$v_1 = v_4, \; v_2 = v_5, \; v_3 = v_6; \tag{5a}$$

im folgenden wird diese Schaltung mit a) bezeichnet.

2. Je 2 benachbarte Leiter werden parallel geschaltet, das heißt:

$$v_1 = v_2, \; v_3 = v_4, \; v_5 = v_6; \tag{5b}$$

im folgenden wird diese Schaltung mit b) bezeichnet.

3. 2 benachbarte Leiter bilden die erste Phase, die beiden anliegenden Leiter die zweite und die beiden gegenüberliegenden die dritte Phase, das heißt:

$$v_1 = v_2, \; v_3 = v_6, \; v_4 = v_5.$$

Die dritte Schaltung bietet für Freileitungen einen gewissen Vorteil wegen ihrer Symmetrie zum Leitungsmast. Bei Kabeln kommt diese Symmetrie nicht in Betracht, weil alle 6 Leiter miteinander verseilt sind.

Weitere Schaltungsmöglichkeiten sind zwar vorhanden, sie bleiben aber wegen ihrer völligen Unsymmetrie hier unberücksichtigt. Von den obigen 3 Schaltungen werden nur die 2 ersten rechnerisch behandelt.

Für Schaltung a) wird dann:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_0 v_1 + c_I (v_1 - v_2) + c_{II} (v_1 - v_3) + c_{II} (v_1 - v_2) + c_I (v_1 - v_3) \\ &= v_1 (c_0 + 2 c_I + 2 c_{II}) - v_2 (c_I + c_{II}) - v_3 (c_I + c_{II}). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der für sinusförmige Spannungen gültigen Drehspannungsbedingung

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \tag{6a}$$

wird

$$q_1 = v_1 (c_0 + 3 c_I + 3 c_{II}).$$

Dieselbe Gleichung erhält man für q_2 und q_3.

Die Betriebskapazität eines Leiters des Sechsfachkabels wird also in der Schaltung a)

$$C_a = c_0 + 3 c_I + 3 c_{II}.$$

Da aber auf eine Phase zwei Leiter kommen und damit der doppelte Ladestrom auftritt, so ist die Betriebskapazität, bezogen auf eine Phase

$$(C_a)_{Phase} = 2 (c_0 + 3 c_I + 3 c_{II}). \tag{7a}$$

Für Schaltung b) gehen die allgemeinen Kapazitätsgleichungen (4) unter Berücksichtigung der Gleichungen (5b) über in

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= v_1 (c_0 + c_I + 2 c_{II} + c_{III}) - v_3 (c_{II} + c_{III}) - v_5 (c_I + c_{II}) \\ q_2 &= v_1 (c_0 + c_I + 2 c_{II} + c_{III}) - v_3 (c_I + c_{II}) - v_5 (c_{II} + c_{III}) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Durch zyklische Vertauschung der Potentiale ergeben sich

aus der Gleichung für q_1 die Gleichungen für q_3 und q_5,
aus der Gleichung für q_2 die Gleichungen für q_4 und q_6.

Aus einer der Gleichungen (8) läßt sich mit Hilfe der Drehspannungsbedingung in der Schreibweise

$$v_1 + v_3 + v_5 = 0 \tag{6b}$$

keine Gleichung ableiten, die nur das Potential und die Ladung des zugehörigen Leiters enthält. Um den Ausdruck für die Betriebskapazität eines Leiters zu erhalten, wird die Drehspannungsbedingung in folgender Form geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= V \sin \omega t \\ v_3 &= V \sin (\omega t + 120^0) \\ v_5 &= V \sin (\omega t + 240^0) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden noch an Stelle der Koeffizienten der Gleichung (8) vorübergehend eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} c_0 + c_I + 2 c_{II} + c_{III} &= \alpha \\ c_{II} + c_{III} &= \beta \\ c_I + c_{II} &= \gamma \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Gleichungen (8) für Q_1 und Q_2 gehen dann unter Berücksichtigung der Gleichungen (9) und (10) über in

$$q_1 = \alpha V \sin \omega t - \beta V \sin (\omega t + 120^0) - \gamma V \sin (\omega t + 240^0)$$
$$q_2 = \alpha V \sin \omega t - \gamma V \sin (\omega t + 120^0) - \beta V \sin (\omega t + 240^0).$$

Hieraus erhält man

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= V\left(\frac{2\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) \sin \omega t + V\left(\frac{\gamma - \beta}{2} \sqrt{3}\right) \cos \omega t \\ q_2 &= V\left(\frac{2\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) \sin \omega t + V\left(\frac{\beta - \gamma}{2} \sqrt{3}\right) \cos \omega t \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Man kann nun für die periodisch veränderlichen Ladungen die allgemeinen Ausdrücke einführen:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \sin (\omega t + \varphi_1) \\ q_2 &= Q_2 \sin (\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Die Gleichungen (11) und (12) sind identisch; daraus folgt:

$$Q_1 \cos \varphi_1 = V\left(\frac{2\alpha + \beta + \gamma}{2}\right)$$

$$Q_1 \sin \varphi_1 = V\left(\frac{\gamma - \beta}{2} \sqrt{3}\right)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(\gamma - \beta)\sqrt{3}}{2\alpha + \beta + \gamma} \quad (13)$$

$$Q_1^2 = V^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma). \quad (14)$$

Analog ergibt sich

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{(\gamma - \beta)\sqrt{3}}{2\alpha + \beta + \gamma} \quad (13')$$

$$Q_2^2 = V^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma). \quad (14')$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, daß die Amplituden der Ladungen beider Leiter gleich groß sind, daß aber ihre Ladeströme gegenüber der gemeinsamen Spannung um denselben Winkel $\varphi = |\varphi_1| = |\varphi_2|$ vor- bzw. nacheilen.

Für die Ladungen der Leiter 3 und 4 sowie 5 und 6 und für die Phasenverschiebungen gegen ihre zugehörige Spannung erhält man dieselben Ausdrücke, wenn man bei ihrer Herleitung die Gleichungen (9) zyklisch vertauscht.

Zur Zuführung der um 2φ gegeneinander zeitlich verschobenen Ladungen q_1 und q_2 fließt in der ersten Phase der dreiadrig gedachten Zuführungsleitung ein Strom, der seiner und damit ihrer gemeinsamen Spannung um 90° voreilt. Dieser „Ladestrom pro Phase" ist die vektorielle Summe der Ladeströme der zwei parallelgeschalteten Leiter. An ihrer Stelle werden die Ladungen Q_1 und Q_2 vektoriell addiert.

Man erhält

$$(Q_b)_{\text{Phase}} = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - 2\, Q_1 Q_2 \cos [180^0 - (\varphi_1 - \varphi_2)]}$$
$$= Q_1 \sqrt{2(1 + \cos 2\varphi_1)}.$$

Die Betriebskapazität ergibt sich dann zu

$$(C_b)_{\text{Phase}} = \frac{Q_b}{V}$$
$$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma} \cdot \sqrt{2(1 + \cos 2\varphi_1)}.$$

Nach einigen trigonometrischen Umformungen erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (13)



$$(C_b)_{Phase} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3(\gamma-\beta)^2}{(2\alpha+\beta+\gamma)^2}}}$$

$$= 2\alpha + \beta + \gamma.$$

Führt man jetzt die Teilkapazitäten aus Gleichung (10) wieder ein, so erhält man die Betriebskapazität eines Leiterpaares als Funktion der Teilkapazitäten zu

$$(C_b)_{Phase} = 2\,c_0 + 3\,c_I + 6\,c_{II} + 3\,c_{III}. \tag{7 b}$$

Die Ausdrücke (7 a) und (7 b) für die Betriebskapazitäten lassen sich nach E. Orlich[1]) noch in etwas anderer Weise herleiten. Man gibt dem Leiter 1 das Potential v_1 und allen anderen Leitern und dem Mantel das Potential Null. Dann nimmt Leiter 1 eine Ladung auf, deren Größe von seinen Teilkapazitäten gegen alle übrigen Ladungsträger abhängt. Die Summe dieser Teilkapazitäten wird seine „totale Kapazität" k genannt; sie ergibt sich zu:

$$k = c_0 + 2\,c_I + 2\,c_{II} + c_{III}. \tag{15}$$

Auf dem Leiter 1 befindet sich dabei die Ladung $k v_1$, auf dem Leiter 2 die Ladung $-c_I v_1$, auf dem Leiter 3 die Ladung $-c_{II} v_1$ usw. Nun gibt man dem Leiter 2 auch ein Potential, nämlich v_2; dann überlagert sich seiner ersten Ladung $-c_I v_1$ die weitere Ladung $k v_2$; der Leiter 1 bekommt die weitere Ladung $-c_I v_2$, der Leiter 3 die weitere Ladung $-c_I v_2$ usw. Führt man dies für alle 6 Leiter durch (der Mantel behält das Potential 0, er verursacht also keine zusätzlichen Ladungsbeiträge), so erhält man auf den Leitern 1 und 2 die Gesamtladungen q_1 und q_2:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= k v_1 - c_I v_2 - c_{II} v_3 - c_{III} v_4 - c_{II} v_5 - c_I v_6 \\ q_2 &= -c_I v_1 + k v_2 - c_I v_3 - c_{II} v_4 - c_{III} v_5 - c_{II} v_6 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Für die Schaltung a) gehen die Gleichungen (16) unter Berücksichtigung von Gleichung (5 a) über in:

$$q_1 = v_1 (k - c_{III}) - v_2 (c_I + c_{II}) - v_3 (c_I + c_{II})$$

$$q_2 = -v_1 (c_I + c_{II}) + v_2 (k - c_{IV}) - v_3 (c_I + c_{II}).$$

Nach Einführung der Drehspannungsbedingung Gleichung (6 a) erhält man

$$q_1 = v_1 (k + c_I + c_{II} - c_{III})$$

$$q_2 = v_2 (k + c_I + c_{II} - c_{III}).$$

Für q_3 bis q_6 ergeben sich entsprechende Gleichungen.

Man erhält daher als Betriebskapazität für eine Phase

$$(C_a)_{Phase} = \frac{q_1 + q_4}{v_1} = \frac{2\,q_1}{v_1} = 2\,(k + c_I + c_{II} - c_{III}).$$

Diese Gleichung geht mit Hilfe der Gleichung (15) über in die frühere Gleichung (7 a):

$$(C_a)_{Phase} = 2\,(c_0 + 3\,c_I + 3\,c_{II}). \tag{7 a}$$

Für die Schaltung b) gehen die Gleichungen (16) unter Berücksichtigung von Gleichung (5 b) über in:

$$q_1 = v_1 (k - c_I) - v_3 (c_{II} + c_{III}) - v_5 (c_I + c_{II})$$

$$q_2 = v_1 (k - c_I) - v_3 (c_I + c_{II}) - v_5 (c_{II} + c_{III}).$$

Die Ladungsträger 1 und 2 haben dasselbe Potential $|v_1|$, ihre Ladungen können daher zusammengefaßt werden. Für die aus ihnen gebildete Phase erhält man die Betriebskapazität zu

$$(C_b)_{Phase} = \frac{q_1 + q_2}{v_1} = \frac{v_1 (2\,k - 2\,c_I) - v_3 (c_I + 2 c_{II} + c_{III}) - v_5 (c_I + 2\,c_{II} + c_{III})}{v_1}.$$

[1]) E. Orlich, Kapazität und Induktivität, Braunschweig 1909, S. 21.

Durch Einführung der Drehspannungsbedingung (6b) erhält man

$$(C_b)_{Phase} = 2\,k - c_I + 2\,c_{II} + c_{III}.$$

Diese Gleichung geht mit Hilfe der Gleichung (15) über in die frühere Gleichung (7 b)

$$(C_b)_{Phase} = 2\,c_0 + 3\,c_I + 6\,c_{II} + 3\,c_{III}. \qquad (7\text{ b})$$

Denselben Ausdruck ergibt auch die Zusammenfassung der Leiterpaare 3 und 4 bzw. 5 und 6.

Die Herleitung der Gleichung (7b) war hier einfacher, weil sofort der Ausdruck

$$(C_b)_{Phase} = \frac{q_1 + q_2}{v_1}$$

gebildet wurde, während bei der früheren Herleitung die Ladung jedes einzelnen Leiters für sich in Zusammenhang mit dem Potential gebracht wurde. Dabei trat die bei dieser Schaltung vorhandene Phasenverschiebung zwischen dem Ladestrom und der Spannung eines und desselben Leiters in Erscheinung.

Die Betriebskapazitäten lassen sich auch als Funktionen der geometrischen Abmessungen des Kabels darstellen. Hierbei wird die Methode der elektrischen Bilder nach Thomson angewendet. Die Leiter werden gemäß Bild 3 durch ihre geometrischen, mit Ladung belegt gedachten Achsen ersetzt, die von der Kabelachse den Abstand d haben sollen; es werden ihnen entsprechend geladene Linien im Abstand d' außerhalb des Bleimantels so zugeordnet, daß der Feldlinienverlauf innerhalb des Bleimantels ungeändert bleibt. Auf diese Weise wird der Bleimantel bzw. seine Innenfläche mit dem Halbmesser R durch die Bilder der Leiterachsen ersetzt. Für ihren Abstand vom Mittelpunkt gilt bekanntlich die Beziehung $d d' = R^2$. Da das Problem ein ebenes ist, so wird nur ein Querschnitt betrachtet; die Leiter und ihre Bilder erscheinen als Spuren.

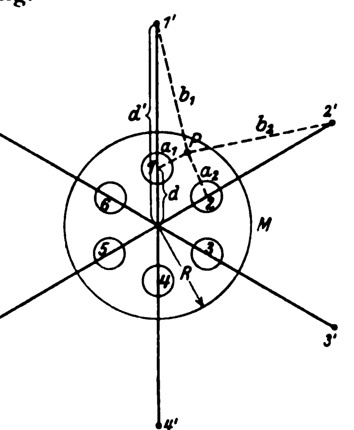


Bild 3. Elektrische Bilder der Leiterachsen des Sechsfachkabels.

Die Spurpunkte 1 bis 6 mögen die Ladungen q_1 bis q_6 tragen; dann haben die Bilder 1' bis 6' die entgegengesetzten Ladungen, also $-q_1$ bis $-q_6$. Das Potential in einem beliebigen Punkt P ergibt sich dann als Summe der von den einzelnen geladenen Punkten herrührenden Beträge. Werden die Abstände des Punktes P von den Punkten 1 bis 6 mit a_1 bis a_6 und von den Punkten 1' bis 6' mit b_1 bis b_6 bezeichnet, so lautet der allgemeine Ausdruck für das Potential in P:

$$\varphi = -\frac{2\,c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{a_1}{b_1} + q_2 \ln\frac{a_2}{b_2} + \dots + q_6 \ln\frac{a_6}{b_6}\right] + \text{konst.} \qquad (17)$$

Um den Feldlinienverlauf innerhalb des Bleimantels richtig wiederzugeben, sind die Bedingungsgleichungen dafür aufzustellen, daß die 6 Spuren der Leiteroberflächen und die des Mantels Äquipotentiallinien sind.

Die allgemeine Rechnung ist langwierig; sie führt auf sechs Gleichungen, zu deren Auflösung 7 sechsgliedrige Determinanten auszurechnen wären. Da hier aber nur Dreiphasenspannungen behandelt werden, so vereinfacht sich das Problem.

In der Schaltung a) treten aus Symmetriegründen nur die Ladungen $q_1 = q_4$; $q_2 = q_5$; $q_3 = q_6$ auf; man erhält daher ein System von nur 3 Gleichungen. Die Potentiale der Leiter seien v_1, v_2 und v_3. Legt man den Punkt P auf die Oberfläche des Leiters 1, so erhält die Potentialgleichung (17) folgende Form:

$$v_1 = -\frac{2\,c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{a_1}{b_1} + q_2 \ln\frac{a_2}{b_2} + q_3 \ln\frac{a_3}{b_3} + q_1 \ln\frac{a_4}{b_4} + q_2 \ln\frac{a_5}{b_5} + q_3 \ln\frac{a_6}{b_6}\right] + \text{konst.} \qquad (18)$$

Unter der einschränkenden Annahme, daß der Leiterhalbmesser r klein sei gegen d und R, kann man in erster Annäherung setzen:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= r \\
b_1 &= \overline{11'} = \frac{R^2}{d} - d \\
a_2 &= \overline{12} = d \\
b_2 &= \overline{12'} = \sqrt{d^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\,d\,\frac{R^2}{d}\cos 60^0} = \sqrt{\frac{d^4 + R^4 - R^2 d^2}{d^2}} \\
a_3 &= d\sqrt{3} \\
b_3 &= \sqrt{d^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\,d\,\frac{R^2}{d}\cos 120^0} = \sqrt{\frac{d^4 + R^4 + R^2 d^2}{d^2}} \\
a_4 &= 2\,d \\
b_4 &= \frac{R^2}{d} + d \\
a_5 &= a_3 = d\sqrt{3} \\
b_5 &= b_3 = \sqrt{\frac{d^4 + R^4 + R^2 d^2}{d^2}} \\
a_6 &= a_2 = d \\
b_6 &= b_2 = \sqrt{\frac{d^4 + R^4 - R^2 d^2}{d^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Unter Berücksichtigung von $a_5 = a_3$; $b_5 = b_3$; $a_6 = a_2$ und $b_6 = b_2$ erhält man aus Gleichung (18)

$$v_1 = -\frac{2\,c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{a_1\,a_4}{b_1\,b_4} + q_2 \ln\frac{a_2\,a_3}{b_2\,b_3} + q_3 \ln\frac{a_3\,a_2}{b_3\,b_2}\right] + \text{konst}.$$

Für v_2 und v_3 erhält man ähnliche Gleichungen durch sinngemäße Vertauschung der Indizes von a und b; es ergibt sich also das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= -\frac{2\,c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{a_1\,a_4}{b_1\,b_4} + (q_2 + q_3)\ln\frac{a_2\,a_3}{b_2\,b_3}\right] + \text{konst} \\
v_2 &= -\frac{2\,c^2}{\varepsilon}\left[q_2 \ln\frac{a_1\,a_4}{b_1\,b_4} + (q_1 + q_3)\ln\frac{a_2\,a_3}{b_2\,b_3}\right] + \text{konst} \\
v_3 &= -\frac{2\,c^2}{\varepsilon}\left[q_3 \ln\frac{a_1\,a_4}{b_1\,b_4} + (q_1 + q_2)\ln\frac{a_2\,a_3}{b_2\,b_3}\right] + \text{konst}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Zur Bestimmung der Konstanten der allgemeinen Gleichung (17) läßt man den Punkt P auf den Mantel rücken und berücksichtigt dessen Potential Null.

$$v_M = 0 = -\frac{2\,c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{a_{1\,m}\,a_{4\,m}}{b_{1\,m}\,b_{4\,m}} + q_2 \ln\frac{a_{2\,m}\,a_{5\,m}}{b_{2\,m}\,b_{5\,m}} + q_3 \ln\frac{a_{3\,m}\,a_{6\,m}}{b_{3\,m}\,b_{6\,m}}\right] + \text{konst}. \quad (21)$$

Da aber die Punkte 1 und 1′ konjugierte Punkte in bezug auf den Mantel sind, so ist das Verhältnis

$$\frac{a_m}{b_m}$$

für alle Leiter konstant und

$$\frac{a_m}{b_m} = \frac{d' - R}{R - d} = \frac{\frac{R^2}{d} - R}{R - d} = \frac{R}{d}.$$

Somit wird aus Gleichung (21)

$$\text{konst} = \frac{2\,c^2}{\varepsilon}\left[(q_1 + q_2 + q_3)\ln\frac{R^2}{d^2}\right].$$

In dieser Gleichung ist der Faktor $q_1 + q_2 + q_3 = 0$, die Konstante in den Gleichungen (20) wird also gleich Null.

Werden für a und b ihre Werte aus den Gleichungen (19) eingesetzt, so ergibt sich:

$$v_1 = -\frac{2c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln\left\{\frac{rd}{R^2 - d^2} \cdot \frac{2d^2}{R^2 + d^2}\right\}\right.$$

$$\left. + (q_2 + q_3) \ln\left\{\frac{d^2}{\sqrt{d^4 + R^4 - R^2 d^2}} \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{\sqrt{d^4 + R^4 + R^2 d^2}}\right\}\right]$$

$$= -\frac{2c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln \frac{2rd^3}{R^4 - d^4} + (q_2 + q_3) \ln \frac{d^4\sqrt{3}}{\sqrt{R^8 + R^4 d^4 + d^8}}\right].$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird vorübergehend gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{2c^2}{\varepsilon} \ln \frac{2rd^3}{R^4 - d^4} &= \alpha \\ -\frac{2c^2}{\varepsilon} \ln \frac{d^4\sqrt{3}}{\sqrt{R^8 + R^4 d^4 + d^8}} &= \beta. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die Gleichungen (20) lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \alpha q_1 + \beta q_2 + \beta q_3 \\ v_2 &= \beta q_1 + \alpha q_2 + \beta q_3 \\ v_3 &= \beta q_1 + \beta q_2 + \alpha q_3 \end{aligned}\right\} \tag{20'}$$

Löst man diese Gleichungen nach q_1, q_2, q_3 auf, so erhält man

$$(\alpha + 2\beta)(\beta - \alpha) q_1 = -(\alpha + \beta) v_1 + \beta v_2 + \beta v_3$$
$$(\alpha + 2\beta)(\beta - \alpha) q_2 = \beta v_1 - (\alpha + \beta) v_2 + \beta v_3$$
$$(\alpha + 2\beta)(\beta - \alpha) q_3 = \beta v_1 + \beta v_2 - (\alpha + \beta) v_3.$$

Durch Einführung der Drehspannungsbedingung

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \tag{6a}$$

ergibt sich

$$(\alpha + 2\beta)(\beta - \alpha) q_1 = -(\alpha + 2\beta) v_1.$$

Aus dieser und den beiden analogen **Maxwell**schen Kapazitätsgleichungen erhält man unmittelbar die Betriebskapazität eines einzelnen Leiters

$$C_a = \frac{q_1}{v_1} = \frac{q_2}{v_2} = \frac{q_3}{v_3} = \frac{1}{\alpha - \beta}.$$

Werden hierin die Werte aus Gleichung (22) eingesetzt, so erhält man

$$C_a = \frac{1}{-\frac{2c^2}{\varepsilon}\left[\ln \frac{2rd^3}{R^4 - d^4} - \ln \frac{d^4\sqrt{3}}{\sqrt{R^8 + R^4 d^4 + d^8}}\right]}.$$

In der Schaltung a) beträgt dann die Betriebskapazität, bezogen auf 1 Phase,

$$(C_a)_{\text{Phase}} = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{d\sqrt{3}(R^4 - d^4)}{2r\sqrt{R^8 + d^8 + R^4 d^4}}} \tag{23a}$$

Wird die Kapazität in μF/km gemessen und der **Brigg**sche Logarithmus verwendet, so wird

$$(C_a)_{\text{Phase}} = \frac{0{,}0483\,\varepsilon}{{}^{10}\log \frac{d\sqrt{3}(R^4 - d^4)}{2r\sqrt{R^8 + d^8 + R^4 d^4}}}\ \mu\text{F/km}. \tag{23a}$$

Im Gegensatz zur Schaltung a) lassen sich bei der Schaltung b) über die Größe der Ladungen q_1 bis q_6 keine Aussagen aus Gründen der Schaltungssymmetrie machen; es ist daher die allgemeine Rechnung durchzuführen. Man legt wiederum



den Punkt P auf die Oberfläche des Leiters 1 mit dem Potential v_1; damit ergibt sich aus der Gleichung (17):

$$v_1 = -\frac{2c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{a_1}{b_1} + q_2 \ln\frac{a_2}{b_2} + q_3 \ln\frac{a_3}{b_3} + q_4 \ln\frac{a_4}{b_4} + q_5 \ln\frac{a_3}{b_3} + q_6 \ln\frac{a_2}{b_2}\right] + \text{konst.} \qquad (24)$$

Durch sinngemäße Vertauschung der Indizes [damit die Gleichungen (19) erhalten bleiben] ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (5b)

$$v_2 = v_1 = -\frac{2c^2}{\varepsilon}\left[q_1 \ln\frac{a_2}{b_2} + q_2 \ln\frac{a_1}{b_1} + q_3 \ln\frac{a_2}{b_2} + q_4 \ln\frac{a_3}{b_3} + q_5 \ln\frac{a_4}{b_4} + q_6 \ln\frac{a_3}{b_3}\right] + \text{konst.} \qquad (24)$$

Die Gleichungen für die anderen vier Leiter wären entsprechend zu bilden. Die 6 Gleichungen müßten nach q_1 bis q_6 aufgelöst werden; das Problem wäre also nicht einfacher als im Anschluß an Gleichung (17) ausgeführt wurde.

Auch ohne Kenntnis der Ergebnisse der früheren Ableitung führen folgende geometrische Überlegungen zum Ziel:

Beim symmetrischen Drehstrombetrieb ist augenscheinlich bei Schaltung b) die Ladung des Leiters 1 gegen die Ladungen der Leiter 3 bzw. 5 um 120° bzw. 240° in der Phase verschoben; dasselbe trifft zu für die Ladungen der Leiter 2, 4 und 6.

Im allgemeinen Fall besteht zwischen der Ladung und der Spannung eines und desselben Leiters eine Phasenverschiebung. Im vorliegenden Falle ist aus Symmetriegründen zu erwarten, daß die Ladeströme eines Leiterpaares ihrer Spannung um denselben Winkel vor- bzw. nacheilen.

q_1 möge um φ, q_2 um $-\varphi$ gegen v_1 verschoben sein. Ferner ist der Höchstwert Q der Ladungen q_1 bis q_6 für alle Leiter derselbe. Es lassen sich dann folgende Gleichungen aufstellen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_2 = V \sin \omega t \\ v_3 &= v_4 = V \sin(\omega t + 120^0) \\ v_5 &= v_6 = V \sin(\omega t + 240^0) \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= Q \sin(\omega t + \varphi) \\ q_3 &= Q \sin(\omega t + \varphi + 120^0) \\ q_5 &= Q \sin(\omega t + \varphi + 240^0) \\ q_2 &= Q \sin(\omega t - \varphi) \\ q_4 &= Q \sin(\omega t - \varphi + 120^0) \\ q_6 &= Q \sin(\omega t - \varphi + 240^0 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Diese Werte sind in die Gleichungen (24) einzusetzen. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$v_1 = -\frac{2c^2}{\varepsilon} Q\left[\sin\omega t\left\{\frac{1}{2}\cos\varphi \ln\frac{a_1^2 a_2 b_3^2 b_4}{a_3^2 a_4 b_1^2 b_2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi \ln\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4}\right\} + \cos\omega t\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi \ln\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4} + \frac{1}{2}\sin\varphi \ln\frac{a_1^2 a_4 b_2 b_3^2}{a_2 a_3^2 b_1^2 b_4}\right\}\right] + \text{konst} \qquad (27)$$

Entsprechend erhält man für v_2 den Ausdruck:

$$v_2 = v_1 = -\frac{2c^2}{\varepsilon} Q\left[\sin\omega t\left\{\frac{1}{2}\cos\varphi \ln\frac{a_1^2 a_2 b_3^2 b_4}{a_3^2 a_4 b_1^2 b_2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi \ln\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4}\right\} - \cos\omega t\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi \ln\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4} + \frac{1}{2}\sin\varphi \ln\frac{a_1^2 a_4 b_2 b_3^2}{a_2 a_3^2 b_1^2 b_4}\right\}\right] + \text{konst} \qquad (27)$$

Zur Bestimmung der Konstanten der Gleichungen (27) wird der Punkt P auf den Mantel gelegt und dessen Potential Null berücksichtigt:

$$v_M = O = -\frac{2c^3}{\varepsilon} Q\Big[\sin(\omega t+\varphi)\ln\frac{a_{1m}}{b_{1m}} + \sin(\omega t-\varphi)\ln\frac{a_{2m}}{b_{2m}} + \sin(\omega t+\varphi+120^0)\ln\frac{a_{3m}}{b_{3m}}$$
$$+\sin(\omega t-\varphi+120^0)\ln\frac{a_{4m}}{b_{4m}} + \sin(\omega t+\varphi+240^0)\ln\frac{a_{5m}}{b_{5m}} + \sin(\omega t-\varphi+240^0)\ln\frac{a_{6m}}{b_{6m}}\Big] + \text{konst.}$$

Wie früher ist $\frac{a_m}{b_m}$ für alle Leiter konstant und gleich $\frac{R}{d}$. Somit wird:

$$\text{konst} = \frac{2c^3}{\varepsilon} Q \ln\frac{R}{d}\Big[\sin\omega t\Big\{\cos\varphi + \cos\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi\Big\}$$
$$+ \cos\omega t\Big\{\sin\varphi - \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi$$
$$- \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi\Big\}\Big]$$

In dieser Gleichung heben sich alle Glieder gegenseitig weg, die Konstante in den Gleichungen (27) wird also gleich Null. Ersetzt man in Gleichung (27) v_1 durch $V\sin\omega t$ [Gleichung (26)], so erhält man eine trigonometrische Gleichung zwischen V und Q mit der Veränderlichen t. In ihr müssen die Glieder mit $\sin\omega t$ und diejenigen mit $\cos\omega t$ je unter sich gleich sein.

Die $\cos\omega t$-Glieder ergeben:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi\ln\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4} + \frac{1}{2}\sin\varphi\ln\frac{a_1^2 a_4 b_2 b_3^2}{a_2 a_3^2 b_1^2 b_4} = 0,$$

hieraus erhält man:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{3}\ln\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4}}{\ln\frac{a_1^2 a_4 b_2 b_3^2}{a_2 a_3^2 b_1^2 b_4}} \tag{28}$$

Die $\sin\omega t$-Glieder ergeben:

$$V\sin\omega t = -\frac{2c^2}{\varepsilon} Q\sin\omega t\Big\{\frac{1}{2}\cos\varphi\ln\frac{a_1^2 a_2 b_3^2 b_4}{a_3^2 a_4 b_1^2 b_2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi\ln\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4}\Big\}$$

Aus dieser Gleichung eliminiert man den Winkel φ mit Hilfe der Gleichung (28); man löst dann nach Q auf und erhält:

$$Q = -V\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\sqrt{\ln^2\frac{a_1^2 a_4 b_2 b_3^2}{a_2 a_3^2 b_1^2 b_4} + 3\ln^2\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4}}}{\ln\frac{a_1^2 a_2 b_3^2 b_4}{a_3^2 a_4 b_1^2 b_2}\ln\frac{a_1^2 a_4 b_2 b_3^2}{a_2 a_3^2 b_1^2 b_4} - 3\ln^2\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4}}. \tag{29}$$

Die entsprechenden Gleichungen für v_3 bis v_6 führen zu denselben Ausdrücken für $\operatorname{tg}\varphi$ und für Q.

Die Gesamtladung einer Phase wird wie früher als vektorielle Summe der Einzelladungen beider Leiter bestimmt; es ist also wieder

$$(Q_b)_{Phase} = Q\sqrt{2(1+\cos 2\varphi)} = Q\,2\cos\varphi.$$

Die Betriebskapazität C_b wird dann:

$$(C_b)_{Phase} = \frac{(Q_b)_{Phase}}{V}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (29) ergibt sich nach kurzer Umformung:

$$(C_b)_{Phase} = -\frac{2c^2}{\varepsilon}\frac{\ln\frac{a_1^2 a_4 b_2 b_3^2}{a_2 a_3^2 b_1^2 b_4}}{\ln\frac{a_1^2 a_2 b_3^2 b_4}{a_3^2 a_4 b_1^2 b_2}\ln\frac{a_1^2 a_4 b_2 b_3^2}{a_2 a_3^2 b_1^2 b_4} - 3\ln^2\frac{a_4 b_2}{a_2 b_4}}. \tag{30}$$

Nun setzt man in diesen Ausdruck für $(C_b)_{Phase}$ die Querschnittsabmessungen des Kabels mit Hilfe der Gleichungen (19) ein und erhält nach einigen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} (C_b)_{Phase} &= \frac{2\,\varepsilon}{c^2}\,\frac{\ln\left(\frac{2\,r^2}{3\,d^2}\cdot A\cdot B\right)}{3\ln^2 B - \ln\left(\frac{r^2}{b\,d^2}\cdot\frac{A}{B}\right)\ln\left(\frac{2\,r^2}{3\,d^2}\cdot A\cdot B\right)} \\ \text{darin sind:}\quad A &= \frac{R^4+d^4+R^2d^2}{(R^2-d^2)^2} \\ B &= \frac{\sqrt{R^4+d^4-R^2d^2}}{R^2+d^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (23\,b)$$

Berücksichtigt man, daß zwischen R und d die Beziehung besteht

$$R = 2\,d - r$$

und r klein gegen d angenommen wurde, so ist R groß gegen d. Die Ausdrücke für A und B können daher durch Vernachlässigung von d^4 vereinfacht werden zu

$$A = \frac{R^2+d^2}{R^2-2\,d^2};\quad B = \frac{R\sqrt{R^2-d^2}}{R^2+d^2}.$$

Wird die Kapazität in μF/km eingeführt und der Briggsche Logarithmus verwendet, so lautet die Gleichung (23b) folgendermaßen:

$$(C_b)_{Phase} = 0{,}0965\,\frac{\varepsilon\,{}^{10}\!\log\left(\frac{2\,r^2}{3\,d^2}\cdot A\cdot B\right)}{3\,{}^{10}\!\log^2 B - {}^{10}\!\log\left(\frac{r^2}{6\,d^2}\cdot\frac{A}{B}\right){}^{10}\!\log\frac{2\,r^2}{3\,d^2}\cdot A\cdot B}\ \mu\text{F/km}. \qquad (23\,b)$$

Die Gleichung (3) für die Betriebskapazität des Dreifachkabels und die Gleichungen (23a) und (23b) für die Betriebskapazitäten des Sechsfachkabels in den Schaltungen a) und b) lassen sich nicht unmittelbar miteinander vergleichen. In der folgenden Zahlentafel 1 sind deshalb für Kabel von verschiedenen Leiterquerschnitten pro Phase und von gleicher Isolationsstärke Leiter/Leiter und Leiter/Blei die Betriebskapazitäten angegeben. Die Zahlen beziehen sich durchweg auf eine Isolationsstärke von 4 mm, entsprechen also Kabeln für 6 kV Betriebsspannung; die Wahl dieser Isolationsstärke wird in späteren Abschnitten der Arbeit begründet. Als Dielektrizitätskonstante ε der getränkten Papierisolation ist der Wert 3,7 eingesetzt.

Zahlentafel 1.
Kapazitätswerte von Mehrfachrundleiterkabeln.

Dreifachkabel		Sechsfachkabel		
Querschnitt in mm²	C in μF/km	Querschnitt in mm²	$(C_a)_{Phase}$ in μF/km	$(C_b)_{Phase}$ in μF/km
3 × 50	0,30	6 × 25	0,47	0 38
3 × 120	0,38	6 × 60	0,62	0,49
3 × 240	0,45	6 × 120	0,74	0,61

Die Betriebskapazitäten des Sechsfachkabels sind durchweg größer als die des Dreifachkabels, und zwar für die vorliegenden Querschnitte in der Schaltung a) um etwa 60%, in der Schaltung b) um etwa 30%. Für die größten Querschnitte 120 und 240 mm² gilt jedoch die vereinfachende Annahme d groß gegen r nicht mehr, so daß die Berechnung der Betriebskapazitäten mit Hilfe der Gleichungen (23a) und (23b) nicht mehr genau ist.

2. Induktivität.

Die Kenntnis des Induktionskoeffizienten einer Übertragungsleitung in Abhängigkeit von ihren Querschnittsabmessungen ist zur Berechnung des induktiven Spannungsabfalles erforderlich. Bei Mehrfachkabeln sind im Gegensatz zu Freileitungen die Leiterabstände vergleichsweise klein und die Leiterdurchmesser vergleichsweise groß. Die Induktivität der Mehrfachkabel ist daher klein und spielt im Vergleich zu ihrer Kapazität keine Rolle. Sie wird deshalb im folgenden nur kurz behandelt.

Bei Dreifachkabeln mit Rundleitern ist die Induktivität pro Phase bekanntlich gleich der halben Induktivität der aus 2 Leitern gebildeten Schleife, also

$$L_{Paase} = \left(4{,}6 \overset{10}{\log} \frac{a}{r} + 0{,}5\right) 10^{-4} \text{ Hy/km}, \tag{31}$$

wobei **a** der Abstand der Leiterachsen und **r** der Halbmesser der Leiter sind.

Bei Sektorkabeln von gleichem Querschnitt und gleicher Isolationsstärke ist sie etwas kleiner; es gibt jedoch unseres Wissens bisher für diese Kabelart keine Induktivitätsformel.

Bei Sechsfachkabeln ist die allgemeine Herleitung der Induktivität umständlich. Für völlig symmetrische Schaltungen treten zwischen den zwei Leiterströmen einer Phase keine zeitlichen Verschiebungen auf. Für sie ist daher die Berechnung der Induktivität in angenäherter Weise[1]) möglich. In der Schaltung a) erhält man so bei den früher gewählten Bezeichnungen (d = Abstand der Leiterachsen von der Kabelachse, r = Halbmesser der Leiter)

$$(L_a)_{Phase} = \left(2{,}3 \overset{10}{\log} \frac{d\sqrt{3}}{2\,r} + 0{,}25\right) 10^{-4} \text{ Hy/km}. \tag{32 a}$$

In unsymmetrischen Schaltungen treten aber zwischen den zwei Teilströmen einer Phase zeitliche Verschiebungen auf, d. h. bei der Ermittlung ihrer Größe sind außer den induktiven Verkettungen der Leiter auch ihre Ohmschen Widerstände zu berücksichtigen. Für die Schaltung b) verursacht deshalb die Herleitung ihrer Induktivitätsformel besonders viel Rechenarbeit; zudem werden die betreffenden Gleichungen unübersichtlich. Im Hinblick auf die Unwichtigkeit der Induktivität von Starkstromkabeln lohnt sich daher für die Schaltung b) ihre genaue Berechnung und Wiedergabe nicht.

In der folgenden Zahlentafel 2 sind die Induktivitätswerte L_{Phase} für die im Kapazitätsabschnitt gewählten Vergleichskabel zusammengestellt.

Zahlentafel 2.
Induktivitätswerte von Mehrfachrundleiterkabeln.

Dreifachkabel		Sechsfachkabel (Schaltung a)	
Querschnitt in mm²	L_{Phase} in Henry/km	Querschnitt in mm²	$L_{a\,Phase}$ in Henry/km
3 × 50	$2{,}6 \times 10^{-4}$	6 × 25	$1{,}3 \times 10^{-4}$
3 × 120	$2{,}4 \times 10^{-4}$	6 × 60	$1{,}1 \times 10^{-4}$
3 × 240	$2{,}3 \times 10^{-4}$	6 × 120	$1{,}0 \times 10^{-4}$

Die obigen Unterschiede haben jedoch auf die Brauchbarkeit der verschiedenen Kabel keinen Einfluß.

[1]) G. P. Markovitch, Die Berechnung der elektrischen Konstanten paralleler Wechselstromoberleitungen. Stuttgart 1905.

3. Dielektrische Festigkeit.

Die Stärke der Isolation eines Kabels hängt ab von den mechanischen und den elektrischen Beanspruchungen, welchen das Kabel bei seiner Herstellung, seiner Prüfung, seiner Verlegung und im Betrieb ausgesetzt ist. Die Mindeststärke der Isolation wird bei Niederspannungskabeln nur von der erforderlichen mechanischen Festigkeit bestimmt, bei Kabeln für mittlere Spannungen kommt außerdem die elektrische Beanspruchung mit in Betracht. Bei Kabeln für hohe Spannungen ist die letztere allein entscheidend.

Zur Berechnung der Höchstbeanspruchungen dienten bis jetzt einige Formeln, die aus der elektrischen Festigkeitslehre übernommen waren. Diesem Brauch lag die Vorstellung zugrunde, daß das Dielektrikum durchschlagen würde, wenn seine zulässige Beanspruchung an irgendeiner Stelle überschritten würde. Die neueren Untersuchungen über die Natur des Durchschlags [1]) mögen jedoch im folgenden noch unberücksichtigt bleiben, weil ihre Ergebnisse noch keine genügende Übereinstimmung zeigen.

Bei Mehrfachkabeln werden die Beanspruchungen $\mathfrak{E}$ an den theoretisch ungünstigsten Stellen des Querschnitts, nämlich an der Leiteroberfläche auf der Verbindungslinie der Achsen zweier Leiter ($\mathfrak{E}_{max}$) bzw. auf dem durch die Leiterachse gehenden Halbmesser ($\mathfrak{E}'_{max}$) näherungsweise berechnet. Zur Bestimmung von $\mathfrak{E}_{max}$ dient die bekannte Formel für die maximale Feldstärke an der Oberfläche zweier paralleler Kreiszylinder mit gleichen Halbmessern.

$$\mathfrak{E}_{max} = \frac{V\sqrt{\dfrac{a+2r}{a-2r}}}{2r\ln\dfrac{a-2r+\sqrt{a^2-4r^2}}{2r-a+\sqrt{a^2-4r^2}}}\ \mathrm{kV/mm}. \tag{33}$$

Hierin bedeutet V die zwischen den Zylindern herrschende Spannung in kV, also im Falle des Mehrfachkabels die Betriebsspannung, a den Abstand der Leiterachsen und r den Halbmesser der Leiter in Millimetern. Wird die Isolationsstärke Leiter gegen Leiter und Leiter gegen Bleimantel gleich groß gewählt und mit δ bezeichnet, so gilt die Beziehung

$$a = 2r + \delta.$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{E}'_{max}$ dient die Formel für zwei sich umhüllende, exzentrisch angeordnete, parallele Kreiszylinder.

$$\mathfrak{E}'_{max} = \frac{V'\sqrt{\dfrac{r^2-R^2+d^2-2rd}{r^2-R^2+d^2+2rd}}}{r\ln\dfrac{(r+R)^2-d^2+\sqrt{m}}{(r+R)^2-d^2-\sqrt{m}}} = \mathrm{kV/mm}, \tag{34}$$

wobei

$$\sqrt{m} = \sqrt{(r^2+R^2-d^2)^2-4r^2R^2}.$$

Hierin ist R der Halbmesser des äußeren, r der Halbmesser des inneren Zylinders, d der Abstand ihrer Achsen in Millimetern und V' die zwischen den Zylindern herrschende Spannung in kV, also im Falle des Mehrfachkabels die Spannung einer Phase gegen Erde, d. h.

$$V' = \frac{V}{\sqrt{3}}. \tag{35}$$

Durch Anwendung der Gleichung (33) wird somit beim Dreifachkabel der Einfluß des dritten Leiters und des Mantels vernachlässigt, beim Sechsfachkabel

[1]) K. W. Wagner, Ber. Berl. Akad. Bd. 29, S. 438, 1922 und Mitt. TRA. Bd. 10, S. 43; A. Günther-Schulze, Jahrb. Rad. El. 1922, S. 92; W. Rogowski, Arch. f. Elektr. Bd. 13, S. 153, 1924.

der Einfluß der übrigen 4 Leiter und der des Mantels; durch Anwendung der Gleichung (34) wird beim Dreifachkabel der Einfluß der beiden anderen Leiter und beim Sechsfachkabel der Einfluß der übrigen 5 Leiter außer acht gelassen. Für das Dreifachkabel mit Sektorleitern kann ebenfalls eine näherungsweise Betrachtung angestellt werden: $\mathfrak{E}_{max}$ würde hier zweckmäßig als die homogene Beanspruchung zwischen den planparallelen Gebieten der Leitoberflächen zu berechnen sein, d. h.

$$\mathfrak{E}_{max} = \frac{V}{\delta}. \tag{36}$$

$\mathfrak{E}_{max}$ könnte als Beanspruchung zwischen konzentrischen Kreiszylindern angegeben werden, d. h.

$$\mathfrak{E}'_{max} = \frac{V'}{(R - \delta) \ln \frac{R}{R - \delta}}. \tag{37}$$

Diese elektrischen Felder sind aber an den stark gekrümmten Stellen der Sektorleiter gestört; dort herrscht eine um so größere maximale Beanspruchung, je kleiner der Leiterdurchmesser und je größer die Isolationsstärke ist. Da die Sektorquerschnitte bei den einzelnen Kabelfabriken verschiedene Formen haben, so wird von einer rechnerischen Erfassung dieser Beanspruchungen abgesehen. Hierzu kommt noch, daß in der Nähe der stark gekrümmten Stellen Teile des Dielektrikums aus sogenanntem Beilauf, also aus elektrisch weniger hochwertigem Material bestehen. Dreifachkabel mit sektorförmigem Querschnitt werden daher aus Gründen der dielektrischen Sicherheit im allgemeinen nur für Betriebsspannungen bis 15 kV hergestellt. Die vom Beilauf ausgefüllten Stellen sind übrigens auch bei den Rundleiterkabeln tatsächlich am meisten gefährdet.

Ein zahlenmäßiger Vergleich der Beanspruchungsverhältnisse an Dreifachkabeln mit Rundleitern und Sechsfachkabeln läßt sich für gleiche Leiterquerschnitte je Phase und für gleiche Isolationsstärke durchführen. Unter diesen Voraussetzungen sind für 3 verschiedene Querschnitte, für Isolationsstärken zwischen 3,5 und 12 mm und für 10 kV Betriebsspannung die Werte für $\mathfrak{E}_{max}$ und $\mathfrak{E}'_{max}$ berechnet und in den Bildern 4 und 5 dargestellt.

Folgende Kurven sind miteinander zu vergleichen:

a	3 × 50	mit Kurve b	6 × 25
c	3 × 120	mit Kurve d	6 × 60
e	3 × 240	mit Kurve c	6 × 120

Die Beanspruchungen sind beim Sechsfachkabel durchweg höher; der prozentuale Unterschied in der Beanspruchung wächst mit abnehmendem Querschnitt und mit steigender Isolationsstärke. Jedoch wird z. B. bei $\delta = 10$ mm und beim Querschnitt 3×50 mm² bzw. 6×25 mm² beim Sechsfachkabel die Beanspruchung $\mathfrak{E}_{max}$ erst nahezu um 10 % und $\mathfrak{E}'_{max}$ etwa um 14 % größer als beim Dreifachkabel. Das betrachtete Dreifachkabel eignet sich unter Berücksichtigung der „Normen für isolierte Leitungen in Starkstromanlagen“, herausgegeben vom V.D.E.[1]), für etwa 20 kV Betriebsspannung. Die Sechsfachkabel kommen auch nicht für sehr viel höhere Spannungen in Betracht, weil sie bei den dann erforderlichen Isolationsstärken wesentlich größeren Gesamtquerschnitt haben und daher teurer werden als Dreifachkabel. Wohl aber können sie für mittlere Spannungen verwendet werden; deshalb ist beim früheren, zahlenmäßigen Vergleich der kapazitiven und induktiven Eigenschaften der Kabelarten eine Isolationsstärke von 4 mm bzw. eine Betriebsspannung von 6 kV gewählt worden.

[1]) ETZ, Bd. 43, S. 1462, 1922.

Die dielektrische Sicherheit der Kabel wird durch Abnahmemessungen in der Fabrik und nach der Verlegung geprüft. Hierfür sind bekanntlich bestimmte Vorschriften vom V.D.E.[1]) herausgegeben worden. Diese gelten ohne weiteres auch für Sechsfachkabel; sie müssen nur durch Angaben über die Schaltung der Leiter bei der Prüfung ergänzt werden. Folgende Schaltungen kommen in Betracht:

Bei Drehspannung:

1 + 2 gegen 3 + 4 gegen 5 + 6	10 Min. lang
1 + 4 gegen 2 + 5 gegen 3 + 6	10 Min. lang
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 gegen Mantel	10 Min. lang.

Bei Wechsel- und bei Gleichspannung:

1 + 3 + 5 gegen 2 + 4 + 6	15 Min. lang
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 gegen Mantel	15 Min. lang.

Auf diese Weise werden die Sechsfachkabel sowohl für ihre Verwendung in der Schaltung a) als auch in der Schaltung b) hinreichend geprüft.

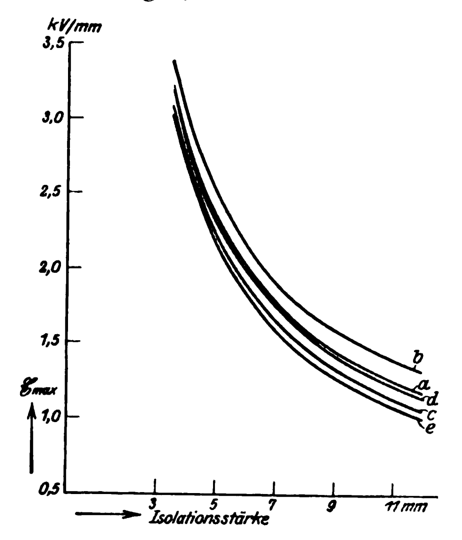


Bild 4. Höchstbeanspruchungen Leiter/Leiter bei Dreifach- und Sechsfachkabeln mit Rundleitern bei 10 kV Betriebsspannung.

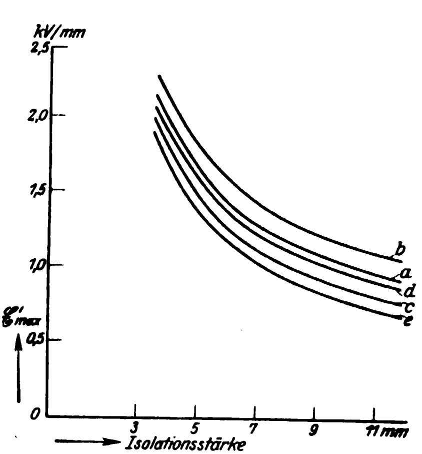


Bild 5. Höchstbeanspruchungen Leiter/Bleimantel bei Dreifach- und Sechsfachkabeln mit Rundleitern bei 10 kV Betriebsspannung.

a: 3 × 50 mm^2
b: 6 × 25 „
c: {3 × 120 „ / 6 × 120 „}
d: 6 × 60 „
e: 3 × 240 „

4. Thermische Eigenschaften.

Die Erwärmung von Kabeln wird durch die von der Stromstärke abhängigen Jouleschen Verluste in den Leitern, durch die von der Spannung abhängigen dielektrischen Verluste im Isoliermaterial und durch die Wirbelstromverluste im Mantel und in der Armierung verursacht. Die auf diese Weise in den Leitern, im Dielektrikum und in der Armierung erzeugte Wärme darf im allgemeinen höchstens eine Übertemperatur der Leiter von etwa 25° C bewirken, so daß sie bei Verlegung im Erdboden keine höhere Temperatur als etwa 40° C annehmen. Wird dieser Betrag

[1]) ETZ, Bd. 43, S. 1466, 1922.

dauernd überschritten, so verliert das Isoliermaterial allmählich seine anfängliche Güte; sein dielektrischer Sicherheitsgrad nimmt stark ab, so daß bei auftretenden Überspannungen erhöhte Durchschlaggefahr besteht. Bei Niederspannungskabeln ist diese Gefahr allerdings nicht groß; bei ihnen wird für längere Strecken die Belastungsstromstärke manchmal durch unzulässigen Spannungsverlust begrenzt. Dagegen werden die Kabel für mittlere Spannungen gewöhnlich voll ausgenutzt; bei ihnen spielt die zulässige Strombelastung die allein maßgebende Rolle bei der Auswahl des Querschnitts.

Bei Kabeln für hohe Spannungen darf der Leiterdurchmesser aus Gründen der dielektrischen Sicherheit nicht zu klein sein; andererseits sind bei hohen Spannungen die zu führenden Ströme verhältnismäßig klein, die Strombelastbarkeit des Querschnitts wird somit im allgemeinen nicht voll ausgenutzt. Nur bei diesen Kabeln spielt die Erwärmung durch dielektrische Verluste eine gewisse Rolle; nach H. Schering[1]) beträgt z. B. bei einem Kabel von 3×95 mm² Querschnitt für 25 kV mit einem Verlustfaktor von 0,02 die zusätzliche Erwärmung erst 0,63° C.

Die Verluste in der Bewehrung sind bei Dreifachkabeln nicht bedeutend; bei Sechsfachkabeln sind sie in der Schaltung a) sicher nur klein, dagegen können sie in der Schaltung b) einen gewissen Einfluß gewinnen, weil sich bei ihr die magnetischen Felder in der Entfernung der Bewehrung weniger gut aufheben.

Für einen thermischen Vergleich der Mehrfachkabel sind daher in erster Linie die Stromwärmeverluste maßgebend. Ihre Belastbarkeit hängt von den durch die Konstruktion des Kabels gegebenen Wärmeableitungsbedingungen ab, denn die Leitertemperatur steigt so lange an, bis die in der Zeiteinheit an die Umgebung (Erdreich, Wasser, Luftraum eines Kabelkanals) abgeführte Wärme gleich der in der Zeiteinheit im Leiter erzeugten Wärme ist. Der Vergleich verschiedener Kabelarten gleichen Gesamtleiterquerschnitts und gleicher Isolationsstärke hinsichtlich ihrer thermischen Eigenschaften hat also unter der Voraussetzung zu erfolgen, daß die Leiter aller zu vergleichenden Kabel bei konstanter Belastung und nach Eintreten des Dauerzustandes die gleiche Übertemperatur aufweisen; hierzu werden bei den verschiedenen Kabelarten verschiedene Stromstärken erforderlich sein, womit ein unmittelbares Maß für ihre Belastbarkeit erhalten wird. Offenbar sind die Ableitungsbedingungen für die in den Leitern erzeugte Wärme um so günstiger, je näher die Metallmassen der Leiter dem die Wärme abführenden Medium liegen. Es ist also von vornherein zu erwarten, daß das Dreifachkabel mit Rundleitern in thermischer Hinsicht den beiden anderen Ausführungsformen unterlegen ist.

Für die rechnerische Behandlung des Problems ergibt sich folgende Fragestellung: Welche Wärmemengen dürfen in den drei Kabeln durch Stromwärme erzeugt werden, damit die höchstzulässige Kabeltemperatur gerade erreicht, aber nicht überschritten wird?

Bezeichnet man die in dem Dreifachkabel mit Rundleitern bzw. Sektorleitern und in dem Sechsfachkabel erzeugten Wärmemengen mit W_{3r} bzw. W_{3s} und W_6, ferner die zugehörigen Übertemperaturen mit τ_{3r} bzw. τ_{3s} und τ_6, endlich die in Betracht kommenden Wärmewiderstände mit S_{3r} bzw. S_{3s} und S_6, so lautet das Fouriersche Gesetz der Wärmeströmung in den drei Fällen:

$$\tau_{3r} = W_{3r} S_{3r}; \quad \tau_{3s} = W_{3s} S_{3s}; \quad \tau_6 = W_6 S_6. \tag{38}$$

Mit der Bedingung gleicher Übertemperatur, also mit

$$\tau_{3r} = \tau_{3s} = \tau_6 = \tau$$

gehen die Gleichungen (38) über in die Gleichungen

$$W_{3r} S_{3r} = W_{3s} S_{3s} = W_6 S_6. \tag{39}$$

Da es sich hier um den Vergleich von Kabeln gleicher Baustoffe, also gleicher Materialkonstanten handelt, fallen letztere in der Rechnung heraus.

[1]) H. Schering, Archiv für Elektrotechnik Bd. 11, S. 76, 1922.

Zum Zweck einer bequemen Gegenüberstellung empfiehlt es sich, das Sektordreifach- und das Sechsfachkabel auf das Dreifachkabel mit Rundleitern zu beziehen. Die Gleichungen (39) lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} W_{3r} : W_{3s} &= S_{3s} : S_{3r} \\ W_{3r} : W_{6} &= S_{6} : S_{3r} \end{aligned}\right\} \qquad (39')$$

Da in den drei Fällen die Leiterwiderstände je Phase einander gleich sind, so können in den Gleichungen (39′) die Größen W durch die Quadrate der zugehörigen Stromstärken ersetzt werden; die Gleichungen (39′) lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} J_{3r}^2 : J_{3s}^2 &= S_{3s} : S_{3r} \\ J_{3r}^2 : J_{6}^2 &= S_{6} : S_{3r} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Der Wärmewiderstand S_{nr} eines verseilten Mehrfachkabels mit n Rundleitern läßt sich nach J. Teichmüller[1]) auf Grund der von G. Mie[2]) aufgestellten Theorie der Wärmeleitung angenähert folgendermaßen ausdrücken:

$$S_{nr} = \frac{\sigma_x}{2\pi n} \ln\left[\left(\frac{D_{is} D_3 D_a}{D_h D_2 D_4}\right)^n \frac{D_h + (n-1) D_l}{n D_l}\right]. \qquad (41)$$

Hierin sind σ_x der spez. Wärmewiderstand des Isoliermaterials, n die Anzahl der verseilten Leiter, D_l der Leiterdurchmesser, D_h der Durchmesser des die Leiter gemeinsam umhüllenden Kreises, D_{is} der Durchmesser des isolierten Kabels unter dem Bleimantel, D_2 der äußere Bleimanteldurchmesser, D_3 der innere und D_4 der äußere Durchmesser der Bewehrung, ferner D_a der Durchmesser des Kabels über der äußeren Kompoundschicht. Gleichung (41) gilt unter der Voraussetzung, daß der den äußeren Umf ng des Kabels durchsetzende Wärmestrom in ein Medium von unendlich großer Wärmeaufnahmefähigkeit eintritt, was bei fließendem Wasser nahezu der Fall ist. Für Sektorkabel setzt J. Teichmüller[3]) bei großen Querschni ten und kleinen Isolationsstärken den Kreis mit $D_h^{(s)}$ als Durchmesser in erster Annäherung als Isotherme an, d. h. es ist $D_h^{(s)} = D_l^{(s)}$. Um einen den wirklichen Verhältnissen besser Rechnung tragenden Wert für $D_l^{(s)}$ zu erhalten, werden die von der Leiterisolation eingenommenen Teile des Hüllkreises in Abzug gebracht, so daß ein neuer Ersatzleiterdurchmesser $D_l'^{(s)}$ gemäß der Formel

$$D_l'^{(s)} = D_h^{(s)} - 3\,\frac{\delta}{\pi} \qquad (42)$$

gebildet wird. Die Gleichung (41) drückt also auch den Wärmewiderstand des verseilten Dreifachsektorkabels aus, wenn darin $D_l^{(s)} = D_l'^{(s)}$ nach Gleichung (42) gesetzt wird. Führt man die Werte für S_{nr} und S_{ns} aus den Gleichungen (41) und (42) in die Gleichungen (40) ein und ersetzt den natürlichen durch den Briggschen Logarithmus, so ergeben sich die gesuchten Verhältnisgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{J_{3s}}{J_{3r}}\right)^2 &= \frac{{}^{10}\log\left[\left(\frac{D_{is} D_3 D_a}{D_h D_2 D_4}\right)^3_{(r)} \frac{D_h^{(r)} + 2 D_l^{(r)}}{3 D_l^{(r)}}\right]}{{}^{10}\log\left[\left(\frac{D_{is} D_3 D_a}{D_h D_2 D_4}\right)^3_{(s)} \frac{D_h^{(s)} + 2 D_l'^{(s)}}{3 D_l'^{(s)}}\right]} \\ \left(\frac{J_6}{J_{3r}}\right)^2 &= 2\,\frac{{}^{10}\log\left[\left(\frac{D_{is} D_3 D_a}{D_h D_2 D_4}\right)^3_{(3)} \frac{D_h^{(3)} + 2 D_l^{(3)}}{3 D_l^{(3)}}\right]}{{}^{10}\log\left[\left(\frac{D_{is} D_3 D_a}{D_h D_2 D_4}\right)^6_{(6)} \frac{D_h^{(6)} + 5 D_l'^{(6)}}{6 D_l^{(6)}}\right]} \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Es ist zweckmäßig, diese an sich undurchsichtigen Gleichungen für einige Fälle numerisch auszuwerten. In der folgenden Zahlentafel 3 sind die Ergebnisse für die

[1]) J. Teichmüller, Die Erwärmung der elektrischen Leitungen. Stuttgart 1905, S. 91 ff.
[2]) G. Mie, Über die Wärmeleitung in einem verseilten Kabel. ETZ 1905, S. 137.
[3]) J. Teichmüller, l. c. S. 96.

früher benutzten Leiterquerschnitte und für die vom V.D.E.[1]) vorgesehenen Stärken für Isolation, Bleimantel, Kompoundierung und Bewehrung von Dreifachkabeln zusammengestellt.

Zahlentafel 3.

Verhältniszahlen für die Belastbarkeit von Mehrfachkabeln bei gleicher Übertemperatur.

Betriebsspannung	$\frac{J_{3s}}{J_{3r}}$ für die Querschnitte			$\frac{J_6}{J_{3r}}$ für die Querschnitte		
kV	3 × 50/s = 3 × 50/r	3 × 120/s = 3 × 120/r	3 × 240/s = 3 × 240/r	6 × 25 = 3 × 50/r	6 × 60 = 3 × 120/r	6 × 120 = 2 × 240/r
0,75	1,09	1,09	1,12	1,09	1,10	1,12
3	1,08	1,08	1,10	1,09	1,10	1,12
5	1,05	1,08	1,10	1,10	1,11	1,11
6	1,05	1,07	1,09	1,11	1,11	1,11
10	1,05	1,06	1,08	1,12	1,11	1,12
15	1,05	1,06	1,07	1,13	1,12	1,12
20	1,06	1,06	1,05	1,14	1,13	1,12
25	1,06	1,06	1,06	1,15	1,14	1,13

In der Zahlentafel 3 sind zum Zweck eines übersichtlichen Vergleichs die Kabel für alle üblichen Spannungen bis zu 25 kV einschließlich derjenigen mit Sektorleitern enthalten.

Es erweisen sich Dreifachkabel mit Sektorleitern und Sechsfachkabel im Vergleich zu Rundleiterkabeln besonders für niedrige Spannungen und große Querschnitte als vorteilhaft. Für mittlere und hohe Spannungen sind die Sechsfachkabel nicht nur den Dreifachrundleiterkabeln, sondern auch den Sektorkabeln wesentlich überlegen.

Es liegt nahe, zwecks Schaffung noch günstigerer Abkühlungsverhältnisse die Leiter des Sechsfachkabels ebenfalls sektorförmig auszubilden. Die dann vorhandenen

Zahlentafel 4.

Belastungswerte für Mehrfachkabel.

Phasen-Querschnitt mm²	Stromstärken in Amp. bei den Betriebsspannungen											
	3 kV			10 kV			15 kV			25 kV		
	3r	3s	6r	3r	3s	6r	3r	3s	6r	3r	3s	6r
35	135	145	150	125	130	140	120	125	135	110	115	125
50	165	175	180	155	170	175	145	155	165	135	145	155
70	200	215	220	190	200	210	180	190	200	165	175	190
95	240	260	265	225	240	250	215	225	240	200	210	225
120	280	305	310	260	275	290	250	265	220	235	250	270
150	315	340	350	300	320	335	285	305	320	265	280	300
185	360	390	400	340	365	380	325	345	365	300	320	340
240	420	460	470	—	—	—	—	—	—	—	—	—

[1]) ETZ Bd. 43, S. 1466, 1922.

starken Krümmungen am Leiterumfang bringen jedoch verhältnismäßig hohe dielektrische und mechanische Beanspruchungen der Isolation mit sich, so daß eine derartige Ausführung nicht ratsam erscheint.

Vom V.D.E. ist in den schon erwähnten „Normen" eine Belastungstafel[1]) für verseilte Dreileiterkabel der Spannungen 3, 10, 15 und 25 kV angegeben. Es wird hierbei zwischen Rund- und Sektorleitern nicht unterschieden. Weist man die dortigen Werte den Rundleitern zu, so erhält man für Sektorleiter und für Sechsfachkabel auf Grund der Verhältniszahlen der Tafel 3 die in der Tafel 4 zusammengestellten Werte.

Die in der Zahlentafel 4 angegebenen Belastungsstromstärken gelten gemäß Gleichung (41) nur für Verlegung in fließendem Wasser. Bei Verlegung im Erdboden sind die Werte entsprechend zu verkleinern. Im übrigen ist es Sache des Versuchs, festzustellen, inwieweit die obigen theoretisch ermittelten Belastungsstromstärken in der Praxis bestätigt werden. Untersuchungen hierüber sind im Gang.

III. Wirtschaftliche Betrachtungen.

Die Auswahl der Kabelart zur Übertragung einer bestimmten Energie bei gegebener Spannung hängt in erster Linie von wirtschaftlichen Erwägungen ab. Die aus ihnen hervorgehenden Forderungen müssen dabei mit den rein technischen in Einklang gebracht werden.

Für die Wirtschaftlichkeit kommen die Gestehungs-, die Amortisations- und die Betriebskosten in Betracht. Erstere umfassen die Aufwendungen für die Herstellung des Kabels mit allem Zubehör und die Verlegungskosten. Dieses Anlagekapital muß verzinst und amortisiert werden. Die Betriebskosten entstehen durch Stromwärmeverluste und Instandhaltungsarbeiten. Die letzten dürften bei den verschiedenen Kabelarten annähernd gleich groß sein; im folgenden werden sie daher nicht berücksichtigt.

Die Übertragung der erforderlichen Stromstärke ist bei den drei Kabelarten mit verschiedenen Phasenquerschnitten möglich. Für den theoretischen Vergleich können diejenigen Querschnitte benutzt werden, welche die betreffende Stromstärke gerade noch zu übertragen vermögen. Dabei braucht man der Berechnung nicht die normalen Querschnitte zugrunde zu legen; ebensowenig ist ein Preisaufschlag für die nicht gebräuchlichen Querschnitte zu berechnen. In der Praxis wird man natürlich an den normalen Querschnitten festhalten.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel: Es seien 310 Amp. mit 6 kV zu übertragen. Durch Interpolation erhält man aus den Zahlentafeln 3 und 4 die hierfür erforderlichen Querschnitte, nämlich 3×150 mm² bei Dreifachrundleitern, 3×135 mm² bei Dreifachsektorleitern und 6×63 ($= 3 \times 126$) mm² bei Sechsfachrundleitern. Die Verlegung im Erdboden bedingt jedoch etwas größere Querschnitte; es mögen daher die Querschnitte 135 mm² auf 140 mm² und 63 mm² auf 65 mm² erhöht werden. Dann betragen die Herstellungskosten des Sektorkabels etwa 83% und die des Sechsfachkabels etwa 95% derjenigen des Dreifachrundleiterkabels. Dagegen sind die Stromwärmeverluste beim Sektorkabel um 7% und beim Sechsfachkabel um 13% größer als beim Dreifachrundleiterkabel.

Ein allgemeiner Vergleich im obigen Sinne lehrt: Die Herstellungskosten der Sektorkabel sind bei den für sie in Betracht kommenden Spannungen am geringsten. Die Sechsfachkabel sind für mittlere und große Leiterquerschnitte bis zu mittleren Spannungen etwas billiger als die Dreifachrundleiterkabel, dagegen bei höheren Spannungen infolge ihrer größeren Kabelquerschnitte teurer. Andererseits sind in allen Fällen die Stromwärmeverluste bei Sektor- und bei Sechsfachkabeln höher als bei den Dreifachkabeln mit Rundleitern.

---

[1]) ETZ Bd. 43, S. 1467, 1922.



Vom betriebstechnischen Standpunkt aus ergibt sich für das Sechsfachkabel gegenüber den Dreifachkabeln noch ein beachtenswerter Vorteil. Das Sechsfachkabel bildet 2 parallel geschaltete Übertragungsleitungen. Im Falle eines Kabelfehlers kann es vorkommen, daß eine von beiden unversehrt bleibt, wobei ein Notbetrieb aufrecht erhalten werden kann. Dies ist so lange möglich, als 3 Leiter unbeschädigt bleiben und zu einem Drehstromsystem zusammengeschaltet werden können. Kabelfehler bilden sich bekanntlich allmählich aus. Ihre rechtzeitige Erkennung sucht man mit Hilfe von Schutzschaltungen zu ermöglichen. Bei manchen Systemen sind hierzu besonders konstruierte Kabel erforderlich. Unter den bis jetzt üblichen Ausführungen der Schutzsystemkabel stellt das Sechsfachkabel vom fabrikatorischen Standpunkt aus eine beachtenswerte Lösung dar.

IV. Zusammenfassung.

Dreifachkabel mit Rund- und Sektorleitern sowie Sechsfachkabel mit Rundleitern werden hinsichtlich ihrer elektrischen Eigenschaften und ihrer Wirtschaftlichkeit miteinander verglichen. Für diese Kabel werden die Betriebskapazitäten angegeben, soweit sie bekannt sind, und für das Sechsfachkabel in 2 verschiedenen Schaltungen hergeleitet. Ferner werden ihre Induktionskoeffizienten und ihre dielektrische Festigkeit betrachtet. Ihre thermischen Eigenschaften werden berechnet und in Form einer Belastungstafel veranschaulicht. Die wirtschaftlichen Betrachtungen erstrecken sich auf die Herstellungs- und die Betriebskosten. Für niedrige Spannungen und große Querschnitte kommen in erster Linie Sektorkabel in Betracht; für mittlere Spannungen besitzen die Sechsfachkabel gewisse Vorzüge; für hohe Spannungen eignen sich nur Dreifachrundleiterkabel.

Die Induktivität von Spulen, Ringen und Stäben.

Von

Priv.-Doz. Dr.-Ing. **H. Hemmeter**, Breslau.

Übersicht.

Es wird ein sehr allgemeiner Satz abgeleitet, der sich z. B. beziehen kann auf den mittleren geometrischen oder den mittleren arithmetischen Abstand oder auf das mittlere Potential usf. zwischen zwei Rechtecken, deren Seiten parallel sind, die aber sonst beliebige Lage und Größe haben.

In der vorliegenden Arbeit wird er speziell angewandt auf die gegenseitige Induktion zwischen koaxialen Kreisringen und zwischen geraden, parallelen Stäben, die rechteckige Querschnitte haben (Bild 1 a). Daraus werden dann Formeln abgeleitet zur Berechnung

1. der gegenseitigen Induktion zwischen koaxialen Kreisringspulen mit rechteckigem Wickelraum und von geraden Stäben mit rechteckigem Querschnitt,
2. der Eigeninduktion von solchen Spulen und Stäben, aber mit einem Wickelraum bzw. Querschnitt, der sich aus Rechtecken zusammensetzt (Bild 1 b und c).

Die Fehler, die diese Formeln mit sich bringen, werden diskutiert.

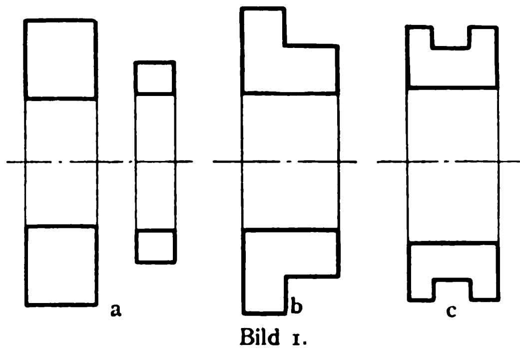


Bild 1.

Einleitung.

Schon die Berechnung der Eigeninduktivität von eisenlosen Spulen mit rechteckigem Wickelraum durch direkte Integration führt auf sehr große Schwierigkeiten, die erst in den letzten Jahren überwunden worden sind[1]). Ich habe sie mit Hilfe von Differentialgleichungen umgangen[2]). Das Resultat ist überdies so kompliziert, daß für den praktischen Gebrauch Hilfstafeln nötig sind[2])[3]). Dabei hängt die Selbstinduktion nur ab von drei Größen, den beiden Seiten des Wickelraumes und dem mittleren Durchmesser der Spule.

Die gegenseitige Induktion zwischen zwei koaxialen Spulen dagegen ist im allgemeinsten Fall erst durch sieben Größen bestimmt, nämlich außer den oben genannten für jede Spule auch noch durch ihren Abstand. Ebenso ist die Eigeninduktivität von Spulen, deren Wickelraum sich aus parallelliegenden Rechtecken zusammensetzt, erst durch mehr als drei Stücke bestimmt. Nun wächst aber die Schwierigkeit bei der Integration mit der Zahl dieser Bestimmungsstücke, außerdem wird die Verwendung von Hilfstafeln beim Gebrauch unmöglich, und so erscheint die Berechnung der gegenseitigen Induktion zwischen koaxialen Spulen und der Eigeninduktion von zusammengesetzten Spulen durch direkte Integration als ausgeschlossen.

In der Tat ist der Versuch dazu auch nur für den speziellen Fall der gegenseitigen Induktion zwischen einander gleichen Spulen mit nicht zu großem Wickelraum gemacht worden, die durch 4 Größen bestimmt ist, und zwar von Stefan und von Weinstein[4]) Die Formeln waren aber fehlerhaft und sind von Rosa[4]) verbessert worden. Für Spulen, die voneinander verschieden sind und einen im Vergleich zum Abstand kleinen Querschnitt haben, hat Raleigh[5]) eine Methode angegeben; dadurch wird die gegenseitige Induktion beider Spulen auf die von 9 Drahtkreisen zurückgeführt.

Diese Methode hat eine gewisse äußerliche Ähnlichkeit mit der in der vorliegenden Arbeit verwendeten, wo die gegenseitige Induktion von Spulen, die einen gegen ihren Abstand großen Wickelraum haben, und die Eigeninduktivität von Spulen, deren Wickelraum sich aus parallelen Rechtecken zusammensetzt, zurückgeführt wird auf eine Reihe von Selbstinduktionen von Spulen mit rechteckigem Wickelraum, die mit Hilfe meiner Arbeit (Arch. f. Elektrot. XIII. S. 474 ff.) ermittelt werden können. Die Methode beruht aber auf einem ganz anderen Prinzip wie die Raleighsche. Sie hat mit ihr den Nachteil gemeinsam, daß sie viel Rechenarbeit erfordert; das liegt aber in der Schwierigkeit des Problems begründet. Dafür hat sie den Vorteil, der bei solchen Methoden sehr viel wiegt, daß sie erstens sehr durchsichtig ist und leicht kontrolliert werden kann und zweitens daß der Fehler, der mit ihr gemacht wird, leicht abzuschätzen ist.

Vorbereitung.

Ein allgemeiner Satz. Wir beziehen uns auf Bild 2. φ sei eine Funktion von x, ξ und y, η; und zwar soll φ symmetrisch sowohl in bezug auf x und ξ, als auch in bezug auf y und η sein. D. h. also

$$\varphi(x, \xi, y, \eta) = \varphi(\xi, x, \eta, y).$$

[1]) Butterworth, Proc. Phys. Soc. London Bd. 27, S. 371. 1915. — Phil. Mag. 29. S. 578. 1915. — Dwigth, Trans. Am. Inst. Elec. Engr. 38, 2. S. 1675. 1919. — Elektr. World 71, p. 300. 1918. — Lyle, Phil. Trans. 213 A, S. 421. 1914.

[2]) Siehe Hemmeter, Arch. f. El. XI. 1922, S. 155 ff. XIII. 1924, S. 474 ff.

[3]) Grover, Sc. Pap. of the Bur. of Stand. Nr. 320. 1918.

[4]) Jahrb. d. drahtl. T. u. T. 2, S. 372, 1908. — Orlich, Kap. u. Ind. S. 88. — Rosa Bull. of Bur. of. St. 4, S. 342 und 348.

[5]) Maxwell, Treatise 2. Ausg., II, S. 320. — Glage, Jahrb. d. drahtl. T. u. T. 2, S. 370, 1908.

x, y seien die Koordinaten des Punktes P,

ξ, η die des Punktes Q.

Die Punkte R und S in den beiden anderen Rechtecken sollen so liegen, daß die

Koordinaten von R: x, η

„ von S: ξ, y

sind. Dann drückt φ eine Beziehung aus zwischen den Punkten P und Q; und nach den Voraussetzungen über die Symmetrie gilt dieselbe Beziehung auch zwischen R und S.

$\varphi(x, y, \eta, \xi)$ kann z. B. einfach die Entfernung zwischen P und Q sein

$$\varphi = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}.$$

Die Entfernung zwischen **R** und **S** ist aber

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + (y - \eta)^2},$$

also dasselbe.

Jede Funktion von

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

genügt dieser Forderung. Wir fügen noch hinzu:

$$\varphi = \log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

und

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}.$$

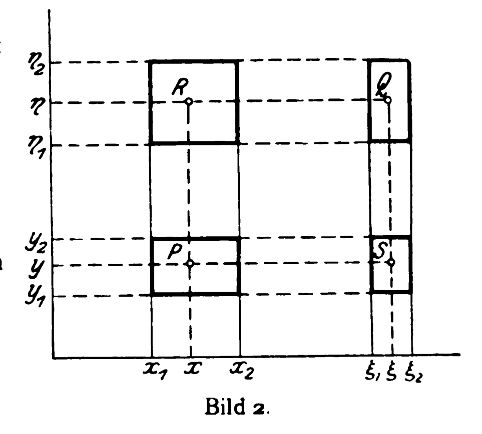


Bild 2.

Sind P, Q, R, S die Spuren von Geraden, die die Papierebene senkrecht durchstoßen, so kann

φ die gegenseitige Induktion zwischen den geraden Leitern (P) und (Q) sein,

die ebenso groß ist wie die zwischen (R) und (S), wo mit den Klammern nunmehr die Geraden bezeichnet sind, deren Spuren die geklammerten Punkte sind. Endlich seien P, Q, R, S noch die Spuren von vier koaxialen Kreisen, deren gemeinsame Achse die Abszissenachse ist. Dann ist

φ die gegenseitige Induktion zwischen den Kreisen (P) und (Q),

die gleich ist der zwischen den Kreisen (R) und (S). In der Tat ist[1])

$$\varphi = 4\pi \sqrt{(y + \eta)^2 + (x - \xi)^2} \cdot f(k'),$$

wo

$$k' = \sqrt{\frac{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2}{(y + \eta)^2 + (x - \xi)^2}},$$

also symmetrisch in x und ξ bzw. y und η.

Wir bilden nun das vierfache Integral

$$\frac{1}{F_P \cdot F_Q} \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi \cdot dx \cdot d\xi \cdot dy \cdot d\eta. \qquad (1)$$

F_P soll der Flächeninhalt des linken unteren Rechtecks sein, in dem der Punkt P liegt, F_Q der des rechten oberen, in dem also Q liegt.

Der Ausdruck (1) ist dann je nachdem, was φ bedeutet, z. B. der mittlere arithmetische Abstand der beiden Rechtecke [P] und [Q] oder der mittlere geometrische Abstand oder das mittlere Potential zwischen den beiden. Oder aber die gegenseitige Induktion zwischen geraden Stäben oder endlich zwischen koaxialen Kreisringen, deren Querschnitte die Rechtecke [P] und [Q] bzw. [R] und [S] sind.

[1]) Hemmeter, Arch. f. Elektrot. XI, S. 168; dort steht statt y und η: A und a.

Es gilt nun folgender Satz: Die gegenseitige Induktion zwischen den Ringen [P] und [Q] ist gleich der gegenseitigen Induktion zwischen den Ringen [R] und [S]. Dasselbe gilt für die Stäbe [P] und [Q] bzw. [R] und [S].

Ebenso ist, was nur nebenbei erwähnt sei, der mittlere arithmetische, der mittlere geometrische Abstand zwischen den Rechtecken [P] und [Q] gleich dem zwischen [R] und [S] usw.

Der Beweis folgt einfach daraus, daß

1. φ symmetrisch ist in x und ξ bzw. y und η;
2. die Integrationsgrenzen konstant sind und die Reihenfolge der Integration also vertauscht werden kann

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} d\,x\,d\,y \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2} d\xi\,d\eta = \int_{x_1}^{x_2}\int_{\eta_1}^{\eta_2} d\,x\,d\,\eta \int_{\xi_1}^{\xi_2}\int_{y_1}^{y_2} d\xi\,d y;$$

daß 3. das Produkt aus den Flächen der Rechtecke [P] und [Q] gleich dem aus [R] und [S] ist:

$$F_P \cdot F_Q = F_R \cdot F_S,$$

da ja

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cdot(\xi_2 - \xi_1)\cdot(\eta_2 - \eta_1) = (x_2 - x_1)(\eta_2 - \eta_1)\cdot(\xi_2 - \xi_1)(y_2 - y_1).$$

Zusatz 1. Man findet zu einem Paar Rechtecke [P] und [Q], die auch zu Punkten und Geraden degenerieren können, das entsprechende andere, indem man die parallelen Seiten verlängert bis zum Schnitt mit den darauf senkrecht stehenden.

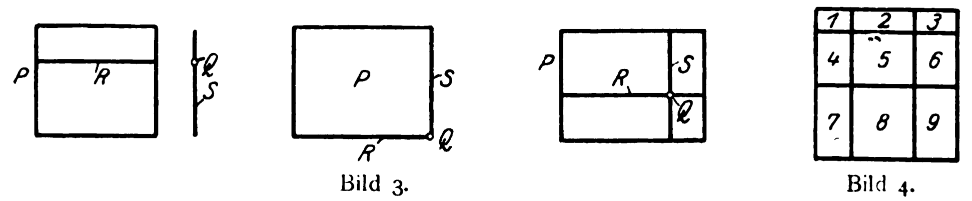


Bild 3. Bild 4.

Zusatz 2. Der Satz läßt eine Erweiterung zu auf den Raum und auf Polarkoordinaten. Hier soll aber davon abgesehen werden, da sie elektrisch ohne Bedeutung ist, es sei denn man denkt an homogen magnetisierte oder elektrisierte Medien.

Beispiele. Bild 3. Das Rechteck [P] sei der Querschnitt eines Kreisringes, dessen Achse parallel einer der beiden Seiten liege; Q sei die Spur eines Kreises, der koaxial zu diesem Ring ist. [P] kann aber auch der rechteckige Querschnitt eines geraden Stabes, Q die Spur eines geraden linearen Leiters, beide senkrecht auf der Papierebene sein. Q kann beliebig liegen, innerhalb, außerhalb oder auf der Umrandung von [P]. [R] und [S] sind dann die Spuren eines zu beiden koaxialen Zylinders bzw. einer Kreisringscheibe. Ist die Achse horizontal, dann ist [R] der Zylinder, die Gerade [R] seine Mantellinie; [S] die Scheibe, die Gerade [S] ihr radialer Schnitt mit der Papierebene. Jedenfalls ist

$$m_{(P \times Q)} = m_{(R \times S)},$$

wo m die gegenseitige Induktion zwischen den genannten Leitern oder auch den mittleren geometrischen oder arithmetischen Abstand oder das mittlere Potential zwischen den ebenen Bildern bedeutet.

Bild 4. Die Rechtecke können Querschnitte von Ringen oder Stäben sein. Wieder ist allgemein

$$m_{(\alpha \times \beta)} = m_{(\mu \times \nu)}$$

mit derselben Bedeutung für m wie oben; α, β, μ, ν sind Zahlen von 1—9, für die gilt

$$\alpha + \beta = \mu + \nu,$$

außer wenn α und β oder μ und ν zwischen denselben Parallelen liegen. Also z. B.

$$m_{(1\times 9)} = m_{(3\times 7)};\ m_{(1\times 5)} = m_{(2\times 4)},\ \text{aber}\ m_{(5\times 8)} \neq m_{(6\times 7)}\ \text{usf.}$$

Die angeführten Beispiele, die beliebig vermehrt werden könnten, sollten zeigen, daß der Satz zu bemerkenswerten Beziehungen führt, die aus der reinen, geometrischen Anschauung nicht gefolgert werden können.

Anwendungen.

Allgemeines. Es seien n Stromkreise 1, 2, 3, . . . n hintereinander geschaltet. Wir bezeichnen allgemein die gesamte Selbstinduktion der hintereinander geschalteten Kreise [p, q, r, . . .] mit $L_{(p,q,r,\ldots)}$, ferner die gegenseitige Induktion zwischen der Gruppe [p, q, r, . . .] und der Gruppe [u, v, w, . . .] mit $M_{(p,q,r,\ldots\times u,v,w,\ldots)}$. p, q, r, . . . sind unter sich in Reihe, ebenso wie u, v, w, ...

Dann läßt sich $L_{(p,q,r,\ldots)}$ auflösen in ebenso viele Selbstinduktionen, als Kreise p, q, r, . . . da sind, und in die zweifache Summe von ebenso vielen gegenseitigen Induktionen als es Kombinationen zu zweien zwischen den Ziffern p, q, r, . . . gibt, d. h.

$$L_{(p,q,r,\ldots)} = L_{(p)} + L_{(q)} + L_{(r)} + \ldots 2\,[M_{(p\times q)} + M_{(p\times r)} + \ldots].$$

Diese Beziehung hat Ähnlichkeit mit dem Quadrat eines Polynoms; man kann dies symbolisch andeuten, indem man setzt

$$L_{(p,q,r,\ldots)} = L_{(p+q+r\ldots)^2},$$

rechts $(p+q+r+\ldots)^2$ auswertet und dann für $L_{(p^2+q^2+r^2+\ldots 2pq+2pr+\ldots}$ setzt: $L_{(p)} + L_{(q)} + L_{(r)} + \ldots 2\,M_{(p\times q)} + 2\,M_{(p\times r)} \ldots$

Um leichter verständlich zu werden, soll ein einfaches Beispiel Bild 5 behandelt werden, an dem wir auch alles andere, was für das folgende von Wichtigkeit ist, entwickeln wollen.

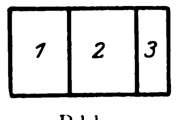


Bild 5.

Bild 6.

Bild 5 und 6 zeigen eine Spule (es ist nur der Wickelraum gezeichnet), die in 3 Teile zerfällt. Dann ist nach dem eben Gesagten:

$$L_{(123)} = L_{(1+2+3)^2} = L_{(1)} + L_{(2)} + L_{(3)} + 2\,[M_{(1\times 2)} + M_{(1\times 3)} + M_{(2\times 3)}]. \quad (2)$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} L_{(12)} &= L_{(1)} + L_{(2)} + 2\,M_{(1\times 2)} \\ L_{(23)} &= L_{(2)} + L_{(3)} + 2\,M_{(2\times 3)} \\ L_{(13)} &= L_{(1)} + L_{(3)} + 2\,M_{(1\times 3)} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Mit Hilfe von (3) eliminiert man die M aus (2) und erhält

$$L_{(13)} = L_{(123)} - L_{(12)} - L_{(23)} + 2\,(L_{(1)} + L_{(2)} + L_{(3)}). \quad (4)$$

Die L rechts gehören zu Spulen, die rechteckigen Wickelraum haben und die also mit meiner Arbeit (siehe Seite 132 Fußnote 1) ermittelt werden können. $L_{(13)}$, das direkt nicht bestimmt werden kann, ist also damit auf eine Reihe von anderen Selbstinduktionen zurückgeführt. (4) gilt natürlich ebenso für Ringe und Stäbe, die in Reihe geschaltet sind: dabei sind also die Ströme in [1] und [3] gleich, die Stromdichten verhalten sich umgekehrt wie die Querschnitte.

Die Selbstinduktion der Ringe [1] und [3], die parallel geschaltet sind (also Stromdichten gleich), wird auf folgende Weise erhalten:

Allgemein ist

$$L = n^2 l',$$

wo L die Selbstinduktion der Spule, l' die des Ringes mit derselben Form, n die Windungszahl der Spule ist. Wird mit $n_{(123)}$, $n_{(12)}$ usf. die Windungszahl der Spulen

[123], [12] usf. bezeichnet, mit $F_{(123)}$, $F_{(12)}$ usf. der Inhalt des Rechteckes [123], [12] usf. und ist die Windungsdichte (Zahl der Windungen für das cm^2 des Wickelraumes) von [123] überall dieselbe, dann verhalten sich die n wie die entsprechenden F.

Dann wird mit (5) aus (4)

$$l'_{(13)} = \frac{1}{F^2_{(13)}} \left[F^2_{(123)} l'_{(123)} - F^2_{(12)} l'_{(12)} - F^2_{(23)} l'_{(23)} + \right. \\ \left. + 2 \left(F^2_{(1)} l'_{(1)} + F^2_{(2)} l'_{(2)} + F^2_{(3)} l'_{(3)} \right) \right]. \tag{6}$$

Die l' sind nun die Selbstinduktionen der Ringe, die F die dazu gehörigen Querschnitte. Dieselbe Gleichung gilt für Stäbe.

Analog findet man aus (2) und (3) für die gegenseitige Induktion der Spulen [1] und [3]

$$M_{(1 \times 3)} = \frac{1}{2} \left(L_{(123)} - L_{(12)} - L_{(13)} + L_{(2)} \right) \tag{7}$$

und für die gegenseitige Induktion der Ringe (Stäbe) [1] und [3]:

$$m'_{(1 \times 3)} = \frac{1}{2 F_{(1)} \cdot F_{(3)}} \left(F^2_{(123)} l'_{(123)} - F'_{(12)} l'_{(12)} - F^2_{(23)} l'_{(23)} + F^2_{(2)} l'_{(2)} \right). \tag{8}$$

Neue Fälle. Das behandelte Beispiel ist schon bekannt. Im folgenden sollen aber Fälle behandelt werden, die nur unter Verwendung des Satzes, den wir oben abgeleitet haben, gelöst werden können Die großen Buchstaben L und M beziehen sich auf die Spulen, die kleinen l' und m' auf die Ringe bzw. Stäbe.

1. Wir beziehen uns auf Bild 7. Es ist

$$L_{(1234)} = L_{(1)} + L_{(2)} + L_{(3)} + L_{(4)} + 2 \left(M_{(1 \times 2)} + M_{(1 \times 3)} + M_{(1 \times 4)} + M_{(2 \times 4)} + \right. \\ \left. + M_{(2 \times 3)} + M_{(3 \times 4)} \right). \tag{9}$$

1	2
3	4

Bild 7.

Ferner ist

$$\begin{aligned} L_{(12)} &= L_{(1)} + L_{(2)} + 2 M_{(1 \times 2)} \\ L_{(13)} &= L_{(1)} + L_{(3)} + 2 M_{(1 \times 3)} \\ L_{(2 \times 4)} &= L_{(2)} + L_{(4)} + 2 M_{(2 \times 4)} \\ L_{(3 \times 4)} &= L_{(3)} + L_{(4)} + 2 M_{(3 \times 4)} \end{aligned} \tag{10}$$

Ist die ganze Spule [1234] gleichmäßig dicht bewickelt, dann ist wegen $m'_{(1 \times 4)} = m'_{(2 \times 3)}$ (nach unserem allgemeinen Satz) auch

$$M_{(1 \times 4)} = M_{(2 \times 3)} \tag{11}$$

und man erhält aus (9), indem man die M aus (10) darin einsetzt,

$$M_{(1 \times 4)} = M_{(2 \times 3)} = \frac{1}{4} \left(L_{(1234)} - L_{(12)} - L_{(13)} - L_{(24)} - L_{(34)} + \right. \\ \left. + L_{(1)} + L_{(2)} + L_{(3)} + L_{(4)} \right). \tag{12}$$

Rechts stehen nun lauter Selbstinduktionen von Spulen mit rechteckigem Wickelraum, die also berechenbar sind.

Ist die Windungsdichte in [1] und [4] nicht gleich (bzw. in [2] und [3]) oder ist die gegenseitige Induktion der Ringe (Stäbe) gesucht, so findet man letztere aus (12) durch Einführung der l' und F, wie in Gleichung (8), und

$$M_{(1 \times 4)} = n_{(1)} n_{(2)} \cdot m'_{(1 \times 4)},$$

wo

$$m'_{(1 \times 4)} = m'_{(2 \times 3)} = \frac{1}{4 F_{(1)} F_{(4)}} \left(F^2_{(1234)} l'_{(1234)} - F^2_{(12)} l'_{(12)} - F^2_{(13)} l_{(13)} - \right. \\ \left. - F^2_{(24)} l'_{(24)} - F^2_{(34)} l'_{(34)} + F^2_{(1)} l'_{(1)} + F^2_{(2)} l'_{(2)} + F^2_{(3)} l'_{(3)} + F'_{(4)} l'_{(4)} \right). \tag{13}$$

Hierfür schreibt man besser symbolisch:

$$m'_{(1 \times 4)} = m'_{(2 \times 3)} = \frac{(F^2 l')}{4 F_{(1)} F_{(4)}} \left((1234) - (12) - (13) - (24) - (34) + \right. \\ \left. + (1) + (2) + (3) + (4) \right). \tag{13a}$$

Ferner ist symbolisch, indem man das L, das zu jedem Glied gehört, vor die Klammer setzt:

$$M_{(1\times 34)} = \frac{L}{4}((1234) - (12) + (13) - (34) - (1) + (2) - (3) + 4)), \qquad (14)$$

da $M_{(1\times 34)} = M_{(1\times 3)} + M_{(1\times 4)}$, mit $M_{(1\times 3)}$ aus (10) und $M_{(1\times 4)}$ aus (12). Daraus

$$m'_{(1\times 34)} = \frac{(F^2 l')}{4\,F_{(1)}\cdot F_{(34)}}((1234) - (12) + (13) - (34) - (1) + (2) - (3) + (4)). \qquad (14a)$$

Ähnlich findet man mit (10) und (12)

$$\left.\begin{aligned} M_{(2\times 134)} &= M_{(1\times 2)} + M_{(2\times 3)} + M_{(2\times 4)} = \\ &= \frac{L}{4}((1234) + (12) - (13/ + (24) - (34) + (1) + (2) + (3) + (4)) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

und

$$m'_{(2\times 134)} = \frac{(F^2 l')}{4\,F_{(2)}\cdot F_{(134)}}\ [\text{wie in Gleichung (15)}]. \qquad (15a)$$

Endlich, da $L_{(134)} = L_{(1)} + L_{(3)} + L_{(4)} + 2\,(M_{(13)} + M_{(1\times 4)} + M_{(3\times 4)})$, wieder mit (10) und (12):

$$L_{(134)} = \frac{L}{2}((1234) - (12) + (13) - (24) + (34) + (1) + (2) - (3) + (4)), \qquad (16)$$

also

$$l'_{(134)} = \frac{(F^2 l')}{2\cdot F^2_{(134)}}((1234) - [\text{wie in Gleichung (16)}]). \qquad (16a)$$

Gleichung (16) gilt nur, wenn alle Teilspulen gleichmäßig bewickelt sind. Ist das nicht der Fall, ist also z. B. [1] anders bewickelt als [34], dann muß man auflösen:

$$L_{(134)} = L_{(1)} + L_{(34)} + n_{(1)}\cdot n_{(34)}\cdot m'_{(1\times 34)}, \qquad (17)$$

mit $m'_{(1\times 34)}$ nach (14a).

1	2	3
4	5	6

Bild 8.

2. Bild 8. Wir geben im folgenden nur die Formeln ohne die Ableitung an, lassen aber am Schluß eine Methode folgen, die es gestattet, dieselben nachzuprüfen.

$$\left.\begin{aligned} M_{(2\times 456)} = \frac{L}{4}((1245) + (2356) - (12) - (14) - (23) - (36) - (45) - (56) + \\ + (1) + (3) + (5) + (6)). \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

$$\left.\begin{aligned} L_{(2456)} = \frac{L}{2}((1245) + (2356) + 2(456) - (12) - (14) - (23) - (36) - (45) - \\ - (56) + (1) + 2(2) + (3) + (4) + (6)). \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} L_{(13456)} = \frac{L}{2}(2(123456) - (1245) - (2356) - (12) + (14) - (23) - (25) + \\ + (36) + (45) + (56) + (1) + 2(2) + (3) - (4) - (6)). \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{(1\times 6)} = M_{(3\times 4)} = \frac{L}{4}((123456) - (1245) - (2356) - (123) - (456) + (12) + \\ + (23) + (25) + (45) + (56) - (2) - (5)). \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Aus diesen Formeln für die Spulen erhält man wieder diejenigen für die Ringe bzw. Stäbe, indem man den symbolisch zu nehmenden Faktor L vor der Klammer ersetzt

bei Gleichung (18) durch $\dfrac{(F^2 l')}{F_{(2)}\cdot F_{(456)}}$,

„ „ (19) „ $\dfrac{(F^2 l')}{F^2_{(2456)}}$,

bei Gleichung (20) durch $\frac{(F^2 l')}{F^2_{(13456)}}$,

" " (21) " $\frac{(F^2 l')}{F_{(1)} \cdot F_{(6)}}$.

Von der symbolischen Form geht man zur wirklichen über, indem man mit $(F^2 l')$ jedes Glied in der Klammer multipliziert und z. B. ersetzt

$$(F^2 l')(\alpha \beta \gamma \ldots) \text{ durch } F^2_{(\alpha \beta \gamma \ldots)} l'_{(\alpha \beta \gamma \ldots)}.$$

3. Bild 4.

$$\left.\begin{aligned} M_{(1 \times 9)} = M_{(3 \times 7)} = \frac{L}{4} ((123456789) - (123456) - (456789) - (124578) - \\ - (235689) + (1245) + (2356) + (4578) + (5689) + (258) + (456) - (25) - \\ - (45) - (56) - (58) + (5)). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{(23 \times 78)} = M_{(12 \times 89)} = \frac{L}{4} ((123456789) - (123456) - (456789) - (147) + \\ (258) - (369) + (456) + (14) - (25) + (36) + (47) - (58) + (69) - (4) + \\ + (5) - (6)). \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Die Formeln für die Ringe und Stäbe bekommt man wieder wie im Anschluß an Nr. 2 Bild 7 angegeben.

Methode zur Nachprüfung der Formeln. Links und rechts in den angegebenen Gleichungen müssen dieselben Selbstinduktionen und gegenseitigen Induktionen vorkommen. Z. B. kommt in Gleichung (16) bei $L_{(123)}$ links vor $L_{(1)}$, $L_{(2)}$, $L_{(3)}$, $2\,M_{(1 \times 2)}$, $2\,M_{(13)}$, $2\,M_{(23)}$. Es muß also rechts in der symbolischen Klammer, da davor der Faktor $\frac{1}{2}$ steht, vorkommen

(1), (2), (3) zweimal,
(12), (13), (23) viermal.

Da rechts außerdem auch noch vorkommt die Ziffer 4 und die Kombinationen mit 4 zu zweien, links aber nicht, so muß die 4 und jede Kombination mit 4 rechts mit ebenso vielen positiven wie negativen Zeichen auftreten. Man kann also folgende Tafel anlegen:

(1)	(2)	(3)	(4)	(12)	(13)	(14)	(23)	(24)	(34)
+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2
— 1	— 1	+ 1	— 1	— 2	+ 2	—	—	— 2	+ 2
+ 1	— 1	+ 1	+ 1	—	—	—	—	—	—
+ 1	+ 1	— 1	+ 1	—	—	—	—	—	—
2	0	2	2	0	4	2	2	0	4

(1) kommt vor im 1., 3. und 6. Glied mit positivem, im 2. mit negativem Zeichen, und zwar je einmal; Summe 2.

(12) kommt vor im 1. mit positivem Zeichen zweimal $(2\,M_{(1 \times 2)})$, im 2. mit negativem Zeichen zweimal $(2\,M_{(1 \times 2)})$; Summe 0.

(14) kommt nur zweimal vor, ebenso wie (23); es ist aber zu beachten, daß $m'_{(1 \times 4)} = m'_{(2 \times 3)}$ nach unserem Satz auf Seite 134.

Auf diese Weise lassen sich alle Formeln verifizieren; bei denen für M ist zu beachten, daß vor der Klammer $\frac{1}{4}$ steht; damit ist die Summe für die Häufigkeit des Vorkommens in der Klammer zu multiplizieren.

Fehlerbestimmung. Die angegebenen Formeln gelten ganz allgemein. Ihre Brauchbarkeit wird jedoch erheblich eingeschränkt durch die Fehler, die bei der Berechnung der einzelnen Posten in den Klammern entstehen und die im ungünstigsten Fall sich alle addieren können. Deshalb soll dieser ungünstigste Fall

im folgenden untersucht und der Fehler näherungsweise bestimmt werden. Dabei ist zunächst folgendes zu beachten:

Die Selbstinduktion einer Spule ist allgemein gegeben (wenn die Isolation der Wicklung zunächst als unendlich dünn angenommen wird) durch

$$L = 4\pi a_0 \cdot n^2 \cdot l = n^2 l'.$$

Dieses l' steht in unseren Klammern (12a) usf. Der Fehler, der bei der Bestimmung von l mit Hilfe meiner Arbeit (Arch. f. Elektrot. XIII, S. 474 ff.) auftritt, ist höchstens 0,0004 bis 0,0005; wir können im Mittel 0,00045 annehmen. Da der kleinste Wert für l innerhalb des Bereiches, für den jene Arbeit gilt, 0,3800 ist, so beträgt der Fehler wenig mehr als 0,1 % für Spulendimensionen, wie sie in der Praxis kaum noch vorkommen. Ebenso groß ist also prozentual der Fehler bei l' und bei L.

1. Ziehen wir nun zur weiteren Entwicklung das Beispiel auf S. 135 heran, und zwar Formel (6). Wenn der Fehler für jedes l 0,00045 ist, dann ist er für jedes l': $4\pi a_0 \cdot 0{,}00045$ und somit für

$$l'_{(13)} : f_{max} = \frac{4\pi a_0}{F^2_{(13)}} (F^2_{(123)} + F^2_{(12)} + F^2_{(23)} + 2(F^2_{(1)} + F^2_{(2)} + F^2_{(3)})) \cdot 0{,}00045 \tag{24}$$

im ungünstigsten Fall. Die F sind die Inhalte der Wickelquerschnitte. Nehmen wir zur ersten Orientierung an, daß

$$F_{(1)} = F_{(2)} = F_{(3)} = \frac{F_{(12)}}{2} = \frac{F_{(13)}}{2} = \frac{F_{(23)}}{2} = \frac{F_{(123)}}{3} \tag{25}$$

und setzen wir dies gleich Eins, dann wird der Fehler

$$f_{max} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}00045 \cdot \frac{23}{4} \cong 4\pi a_0 \, 0{,}0026.$$

Nun ist $l'_{(13)} = 4\pi a_0 \cdot l_{(13)}$ und $l_{(13)}$ sicher größer als das l eines Ringes, dessen Dimensionen an der Grenze des obigen Bereiches liegen. Denn man kann auch setzen:

$$l'_{(13)} = \frac{1}{F^2_{(13)}} (F^2_{(1)} l'_{(1)} + F^2_{(3)} + 2 F_{(1)} \cdot F_{(3)} \cdot m'_{(1\times 3)}),$$

woraus die Behauptung sofort folgt.

Also ist bei der Berechnung von $l'_{(13)}$ mit Hilfe von (6) der Fehler sicher nicht größer als 1 %, da die untere Grenze von l' in jenem Bereich $4\pi a_0 \cdot 0{,}3800$ ist.

Ist $F_{(2}$ wesentlich größer als $F_{(1)}$ und $F_{(3)}$, dann wird der Fehler freilich größer. Dies muß von Fall zu Fall nach (24) untersucht werden.

Der Fehler bei $m'_{(1\times 3)}$ wird nach diesen Überlegungen mit (8)

$$f_{max} = \frac{4\pi a_0 \cdot 0\,00045}{2 F_{(1)} \cdot F_{(3)}} (F^2_{(123)} + F^2_{(12)} + F^2_{(23)} + F^2_{(2)}), \tag{26}$$

und mit (25)

$$f_{max} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}00045 \cdot \frac{18}{2} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0041. \tag{27}$$

Dieser Wert ist nicht nur deshalb ungünstiger, weil er wesentlich höher ist, sondern weil $m'_{(1\times 3)}$ in viel stärkerem Maße von der Entfernung zwischen [1] und [3] abhängt wie $l'_{(13)}$. Man erkennt ja sofort, daß $L_{(1\times 3)}$ im Grenzfall gleich $L_{(1)} + L_{(3)}$ wird, während $M_{(1\times 3)}$ verschwindet. Hier ist also noch viel mehr die Forderung zu stellen, daß [2] klein ist oder daß [1] und [3] sich sehr nahe liegen. Nimmt man für

$$F_{(1)} = 2 F_{(2)} = F_{(3)},$$

so wird der Fehler bei $m'_{(1\times 3)} : f_{max} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0025$, also wesentlich kleiner; und $m'_{(1\times 3)}$ wird wesentlich größer.

2. Ganz ähnlich werden die Fehler berechnet, wenn die 3 Teilspulen nicht angeordnet sind wie in Bild 5, sondern wie in Bild 6. Hier sind freilich die mittleren Durchmesser $2a_0$ der einzelnen Ringe verschieden. Infolgedessen erhält man statt (24)

$$f_{max} = \frac{4\pi \cdot 0{,}00045}{2\,F_{(1)} \cdot F_{(3)}} \left(a_{0(123)} F^2_{(123)} + a_{0(12)} F^2_{(12)} + a_{0(23)} F^2_{(23)}\right) + + 2\left(a_{0(1)} \cdot F^2_{(1)} + a_{0(2)} F^2_{(2)} + a_{0(3)} \cdot F^2_{(3)}\right) \quad (28)$$

und analog statt (26).

$a_{0(\alpha\beta\gamma\ldots)}$ ist dabei der mittlere Radius der Spule $[\alpha\beta\ldots]$.

Ist a_0 der größte dieser Radien und ersetzen wir alle $a_{0(\alpha\beta\gamma\ldots)}$ durch diesen größten a_0, so wird der wirkliche Fehler sicher kleiner als der, den wir auf diese Weise errechnen. Wir erhalten also als obere Grenze für

$$f_{max} = \frac{4\pi a_0 \cdot 0{,}00045}{2\,F_{(1)} \cdot F_{(3)}} \left(F^2_{(123)} + \text{wie in (24)}\right),$$

also dasselbe wie bei Bild 6, nur daß a_0 jetzt der größte vorkommende mittlere Radius ist.

3. Die Fehler bei Bild 7 schreiben wir ohne Ableitung einfach an und schicken nur folgende Bemerkungen voraus. Hier sind die Verhältnisse wesentlich günstiger als bei Bild 5 und 6, da die einzelnen Rechtecke aneinander stoßen; auch wenn die Teilrechtecke recht verschieden groß sind, ist der Fehler nicht sehr verschieden von dem bei Gleichheit derselben. Es ist bei Annahme der letzteren: der Fehler bei (a_0 ist wieder der größte vorkommende mittlere Radius)

$$\left.\begin{array}{ll} m'_{(1\times 4)}: & f_{max} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0040 \\ m'_{(1\times 34)}: & \phantom{f_{max}} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0020 \\ m'_{(2\times 134)}: & \phantom{f_{max}} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0014 \\ l'_{(134)}: & \phantom{f_{max}} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0009 \end{array}\right\} \text{Bild 7.}$$

4. Die Fehler bei Bild 8 und 4. Sie sind ebenso wie beim vorigen Bild 7 bei den Formeln, die sich auf aneinanderstoßende Spulen beziehen, klein und zwar ist bei

$$\left.\begin{array}{ll} m'_{(2\times 456)}: & f_{max} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0023 \\ l'_{(2456)}: & \phantom{f_{max}} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0012 \\ l'_{(13456)}: & \phantom{f_{max}} = 4\pi a_0 \cdot 0{,}0013 \end{array}\right\} \text{Bild 8,}$$

wenn wieder a_0 der größte vorkommende mittlere Radius ist und in erster Annäherung die einzelnen Flächen einander gleich gesetzt sind.

Der Fehler ist durchwegs kleiner als 1%, da sowohl die $\frac{m'}{4\pi a_0}$ als auch die $\frac{l'}{4\pi a_0}$ größer sind als der entsprechende kleinste Wert für l, der in den Bereich meiner oben zitierten Arbeit fällt.

Viel ungünstiger fallen die Fehler aus bei den gegenseitigen Induktionen der Spulen in Bild 8 und 4, die nicht zusammenhängen, also für Formel (21), (22) und (23). Setzt man hier wieder die Teilflächen $F_{(1)}$, $F_{(2)}$, ... einander gleich, dann wird schon der absolute Wert von f_{max} sehr groß. Man muß hier fordern, daß die Flächen zwischen den Wickelräumen der fraglichen Spulen sehr klein sind, oder mit anderen Worten, daß die Wickelräume der fraglichen Spulen, in Bild 8, also [1], [6], [3] und [4], in Bild 4 [1], [9], [3], [7] bzw. [23], [78], [12], [89] nicht viel kleiner als ein Viertel der gesamten Fläche selbst sind. Sonst wird m' selbst zu klein und f_{max} zu groß. Von einer Aufstellung der Formeln sehen wir ab, da sie leicht nach dem Vorhergehenden gebildet werden können.

Zusatz. Bei der Fehlerbestimmung haben wir bisher nur von Spulen und Ringen gesprochen. Für Stäbe wird sie viel genauer, da man die Selbstinduktionen der Teilstäbe viel genauer bestimmen kann. Es ist für einen geraden Stab von der Länge l bei beliebigem Querschnitt

$$L = 2\,l \cdot \left(\ln \frac{2\,l}{g} - 1\right),$$

wo g der mittlere geometrische Abstand des Querschnitts von sich selbst ist, der nach Sumec[1]) für das Rechteck a × b ist:

$$g = (a + b)\,k,$$

wo k nur schwankt zwischen 0,22369 und 0,22315. Die Werte für k findet man bei Orlich, Kap. u. Ind., S. 67. Damit können die einzelnen Posten in unseren Gleichungen viel genauer bestimmt werden wie bei den Ringen bzw. Spulen, und damit fällt auch die Forderung, daß bei den Formeln (21), (22), (23) in Bild 8 und 4 die fraglichen Stäbe sehr nahe beieinander liegen müssen, viel milder aus. Die Genauigkeit kann leicht auf das Zehnfache der bei Spulen getrieben werden. Praktisch kommt sie aber kaum in Frage.

Die Isolation der Wicklung. Unsere Formeln gelten zunächst nur für zu vernachlässigende Isolation der Drahtwicklung. Zu den Formeln für die Selbstinduktion muß bei rundem Drahtquerschnitt noch ein Korrekturglied hinzutreten, über das man Genaueres findet in meinen Arbeiten (Arch. f. Elektrot., XI, 1922, S. 161 u. XII, 1924, S. 475). Aus der ersteren ist auch zu entnehmen, daß dieses Glied bei den Formeln für die gegenseitige Induktion ohne Belang ist.

Für anderen als kreisförmigen Drahtquerschnitt sind Korrekturglieder noch nicht berechnet.

Über die Wellenausbreitung auf Leitungen und die elektromagnetische Beeinflussung von Nachbarleitungen.

Von

Dr. F. Walter.

Mitteilung aus dem Laboratorium der Dr. E. F. Huth-Gesellschaft für Funkentelegraphie Berlin.

Seitdem es gelungen war, Sprache durch hochfrequente Wellen zu übertragen, hat im Wirtschaftsverkehr neben der drahtlosen Sprach- oder Nachrichtenübermittlung auch die Wellenübertragung auf Leitungen an Bedeutung zugenommen. Wurde doch erst durch letztere der Technik ein neuer Weg geebnet, auf dem alte Verkehrsbedürfnisse befriedigt werden konnten. Ich denke dabei an die Sprachübertragung durch Hochspannungsleitungen, an Mehrfachtelephonie über eine Leitung und an den telephonischen Verkehr mit einem fahrenden Eisenbahnzuge.

Die Leitungshochfrequenztelephonie steht im Gegensatz zur allgemeinen Raumtelephonie. Während die Wellenenergie der letzteren nach jeder Richtung gleichmäßig sich ausbreitet, bevorzugt die Leitungstelephonie nur eine Richtung, die der Leitung. Durch diese Energiekonzentration im Raume um die Leitung wird die Wellentelephonie ökonomischer und wirtschaftlicher gemacht und es wird die Reichweite einer Station bedeutend erhöht.

Die Zugtelephonie[2]), die die gewöhnlichen Telephondrähte längs des Bahnkörpers für die Fortpflanzung der Wellen sich dienstbar macht, hat dadurch den praktischen Vorteil erzielt, sparsam in der Energieausbeute zu sein. Die räumliche Energieverteilung um ein solches mehrdrähtiges Telephonnetz wird infolge der magnetischen und elektrischen Kraftwirkungen der mit elektrischen Ladungen behafteten Leiter auf die benachbarten Leitungen eine komplizierte Gestalt annehmen.

[1]) Orlich, Kap. u. Ind. S. 67.

[2]) Technische Einrichtung derselben s. B. Rosenbaum, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie und Telephonie, Bd. XX, S. 357, 1922 und Bd. XXI, S. 262, 1923

Wenn dann noch einzelne Leitungen sich vom Hauptnetz entfernen und ihrer Bestimmung gemäß nach anderen Richtungen hinlaufen, so wird in solchen Fällen hochfrequente Energie auch von diesen mitgeführt[1]).

Die Wellenenergie eines solchen Mehrleiters ist elektromagnetische Feldenergie. Der Träger dieser Energie ist das Dielektrikum und ihr zeitlich veränderter Energieinhalt gibt uns die Stärke des Energieflusses an. Dieser, in der uns bekannten Weise durch die magnetische wie elektrische Feldstärke darstellbar, ruft naturgemäß auf den Leitern einen Zustand hervor, den wir in der Physik durch die Elektrizitätsmengen und ihre zeitlichen Änderungen zu bestimmen pflegen. Die Ladungen auf den Leitern bilden den Ursprung der elektrischen Kraftlinien, die zeitlichen Änderungen derselben, die Ströme, den Ursprung der die einzelnen Leiter umschlingenden magnetischen Kraftflüsse. Auf diese Weise haben magnetischer und elektrischer Kraftfluß ihren Sitz auf den Leitern und leiten in diesem Sinne nicht nur die Elektrizität, sondern auch die Energie. Sie bestimmen die Richtung der Energiefortpflanzung.

Die Gleichungen der Wellenausbreitung.

Zwei Fundamentalgesetze sind es, nach denen die Energieausbreitung im Raume sich regelt. Die erste Maxwellsche Grundgleichung gibt uns die Beziehung zwischen Strom und Magnetfeld im Raume an; die zweite bestimmt, daß das Linienintegral der elektrischen Kraft längs einer geschlossenen Kurve gleich der zeitlichen Abnahme des Induktionsflusses der Fläche ist, die von der Kurve berandet wird. Aus der ersteren der Maxwellschen Gleichungen folgt die auf Leitern so erfolgreich angewandte Gleichung

$$\operatorname{div} J = 0. \tag{1}$$

Diese beiden Gesetze, auf eine einfache Leitung bezogen, liefert uns die Telegraphengleichung für den Strom und die Spannung auf dem einfachen Leiter. Es würde zu weit führen, die Ergebnisse, die die Kabeltechnik mit so großem Nutzen und Erfolge aus dieser Gleichung zog, hier zu schildern.

Wir betrachten jetzt ein Mehrleitersystem. Die Eigenschaften eines solchen Systems sind durch die Leitungskonstanten R_v, A, C_v, L_v, L_{vk}, C_{vk} bestimmt.

R_v bedeutet den wirksamen Dämpfungswiderstand des Leiters v für die hochfrequenten Schwingungen.

A ist die Ableitung eines Leiters und enthält alle Verluste des Dielektrikums, sie ist bei der Homogenität des Dielektrikums für alle Leiter konstant.

L_v ist der Selbstinduktionskoeffizient des Leiters v zur Erde.

C_v die Kapazität zur Erde.

L_{vk} ist der gegenseitige Induktionskoeffizient der Leiter v und k.

C_{vk} ist die Kapazität des Leiters v zum Leiter k.

Für alle diese Konstanten sind die für die Hochfrequenz gültigen Werte einzusetzen, welche von denen des Gleichstroms verschieden sind. Die Konstanten sind auf die Einheit der Leitung bezogen. Die praktische Maßeinheit der Leitungslänge ist für diese Konstanten 1 km.

[1]) Vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung der auf einem Mehrleitersystem noch wenig klaren Wellenausbreitung von hochfrequenten Schwingungen. Auch empfand ich bei den mir obliegenden Arbeiten über Zugtelephonie einen Mangel in der Kenntnis der Größe der Energieabwanderung durch Leitungen, die sich von dem Mehrleitersystem entfernen. Die mir erst nach Aufstellung der Formeln in die Hände gelangte Arbeit von K. W. Wagner „Über Induktionswirkung von Wanderwellen in Nachbarleitungen" (ETZ Jahrgang 35, S. 639, 1914) gibt auch auf letztere Frage keine genügende Auskunft. In dieser Arbeit bleibt die für Hochfrequenzschwingungen noch mehr in Erscheinung tretende Dämpfung und Ableitung unberücksichtigt und die Abhängigkeit der Energieabwanderung von der Länge des gemeinsamen Leitungsweges kommt nicht zum Ausdruck.

Legen wir jetzt im Abstand x vom Anfangspunkt durch den Mehrleiter einen Querschnitt. Den an dieser Stelle im Leiter v fließenden Strom nennen wir J_v, die Spannung V_v. In einem sehr geringen Abstande dx hiervon sei ein zweiter Querschnitt gelegt. Die Spannung an dieser Stelle sei V_{v_1}, der Strom J_{v_1}. Wenden wir jetzt auf die durch die Querschnitte begrenzte Fläche die zweite Maxwellsche Gleichung an, so erhalten wir für das Linienintegral der elektrischen Kraft oder für die Summe der Umlaufspannungen der betrachteten Flächenkurve

$$-V_v + R_v\,dx\,J_v + V_{v_1} = -\frac{d\,\Phi_v}{dt}\,dx. \tag{2a}$$

Es ist

$$V_{v_1} = V_v + \frac{d\,V_v}{dx}\,dx,$$

hieraus folgt

$$-\frac{d\,V_v}{dx} = R_v\,J_v + \frac{d\,\Phi_v}{dt}. \tag{2b}$$

Der Strom J_v, der im Abstand x im Leiter v in das Leitungsstück dx hineinfließt, wird auf der Strecke dx zum Teil abgeleitet; zu einem anderen Teil wird der Strom zur Ladung der Kapazitäten verbraucht. Der Ableitungsstrom des Leiters v ist

$$A \cdot dx \sum_{k=n}^{k=o} (V_v - V_k),$$

wo in V_k die Potentiale jedes Leiters im System einzusetzen sind, also

$$K = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots n.$$

Der Ladestrom der Kapazitäten ist

$$\frac{d\,Q_v}{dt}\,dx.$$

Gleichung (1), jetzt auf den Leiter v angewandt, gibt

$$J_v - J_{v_1} - A\,dx \sum_{k=n}^{k=o} (V_v - V_k) - \frac{d\,Q_v}{dt}\,dx = 0. \tag{3a}$$

Nun ist

$$J_{v_1} = J_v + \frac{d\,J_v}{dx}\,dx,$$

folglich

$$-\frac{d\,J_v}{dx} = A \sum_{k=n}^{k=o} (V_v - V_k) + \frac{d\,Q_v}{dt}. \tag{3b}$$

Die Gleichungssysteme (2) und (3) bestimmen vollständig die Gesetze der Wellenausbreitung auf einem Mehrleitersystem.

Die Wellenausbreitung auf 2 parallelen Leitern.

Zur Vereinfachung unserer Rechnung wollen wir annehmen, der Mehrleiter bestehe nur aus zwei Leitungen. Die Erde soll den Rückleiter bilden.

Die Ladung Q_1 des Leiters 1 ist darstellbar durch

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) \tag{4a}$$

und

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 + C_{12}(V_2 - V_1). \tag{4b}$$

Der Induktionsfluß durch den Leiter 1 ist

$$\Phi_1 = L_1 \cdot J_1 + L_{12} \cdot J_2, \tag{5a}$$

durch den Leiter 2

$$\Phi_2 = L_2 \cdot J_2 + L_{12} \cdot J_1. \tag{5b}$$

Die Gleichungen (4) und (5) in (2) und (3) eingesetzt geben das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{d V_1}{dx} &= R_1 J_1 + L_1 \frac{d J_1}{dt} + L_{12} \frac{d J_2}{dt} \\
-\frac{d V_2}{dx} &= R_2 J_2 + L_2 \frac{d J_2}{dt} + L_{12} \frac{d J_1}{dt} \\
-\frac{d J_1}{dx} &= A V_1 + A (V_1 - V_2) + C_1 \frac{d V_1}{dt} + C_{12} \frac{d (V_1 - V_2)}{dt} \\
-\frac{d J_2}{dx} &= A V_2 + A (V_2 - V_1) + C_2 \frac{d V_2}{dt} + C_{12} \frac{d (V_2 - V_1)}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Stellen wir jetzt Strom und Spannung durch den komplexen Ausdruck $J_e{}^{j\omega t}$ bzw. $V_e{}^{j\omega t}$ dar, so läßt sich das Gleichungssystem (6) auch schreiben

$$-\frac{d V_1}{dx} = (R_1 + j\omega L_1) \cdot J_1 + j\omega L_{12} \cdot J_2 = a_1 J_1 + c_1 J_2, \quad (7)$$

$$-\frac{d V_2}{dx} = (R_2 + j\omega L_2) \cdot J_2 + j\omega L_{12} \cdot J_1 = a_2 J_2 + c_1 J_1, \quad (8)$$

$$-\frac{d J_1}{dx} = [2A + j\omega (C_1 + C_{12})] \cdot V_1 - (A + j\omega C_{12}) \cdot V_2 = b_1 V_1 + c_2 V_2, \quad (9)$$

$$-\frac{d J_2}{dx} = [2A + j\omega (C_2 + C_{12})] \cdot V_2 - (A + j\omega C_{12}) \cdot V_1 = b_2 V_2 + c_2 V_1. \quad (10)$$

Multiplizieren wir Gleichung (8) mit m und addieren das Ergebnis zu (7), so ergibt sich

$$-\frac{d (V_1 + m V_1)}{dx} = (a_1 + m c_1) J_1 + (m a_2 + c_1) J_2.$$

Setzen wir jetzt

$$m a_2 + c_1 = n (a_1 + m c_1),$$

so erhalten wir für

$$-\frac{d (V_1 + m V_2)}{dx} = (a_1 + m c_1)(J_1 + n J_2). \quad (11)$$

Auf ähnliche Weise wird

$$-\frac{d (J_1 + n J_2)}{dx} = (b_1 + n c_2)(V_1 + m V_2) \quad (12)$$

erhalten, wenn für

$$n b_2 + c_2 = m (b_1 + n c_2)$$

gesetzt wird.

$$m a_2 + c_1 = n (a_1 + m c_1). \quad (13)$$

$$n b_2 + c_2 = m (b_1 + n c_2). \quad (14)$$

Die Gleichungen (13) und (14) bedeuten die Strom- und Spannungsverkettung auf dem Mehrleiter bzw. die elektrische und magnetische Kraftlinienverkettung.

Aus (11) und (12) erhält man

$$\frac{d^2 (V_1 + m V_2)}{dx^2} = (a_1 + m c_1) \cdot (b_1 + n c_2)(V_1 + m V_2) \quad (15)$$

und

$$\frac{d^2 (J_1 + n J_2)}{dx^2} = (a_1 + m c_1) \cdot (b_1 + n c_2)(J_1 + n J_2). \quad (16)$$

$$(a_1 + m c_1) \cdot (b_1 + n c_2) = \gamma^2. \quad (17)$$

Die Größe γ nennen wir die Ausbreitungskonstante der Welle. Unter Zuhilfenahme von (13) und (14) läßt sich γ^2 in die Form bringen

$$\gamma^2 = (a_1 b_1 + c_1 c_2) + m(a_2 c_2 + b_1 c_1), \tag{17a}$$
$$= (a_1 b_1 + c_1 c_2) + n(a_1 c_2 + b_2 c_1), \tag{17b}$$

denn aus (13) und (14) folgt

$$m(a_2 c_2 + b_1 c_1) = n(a_1 c_2 + b_2 c_1) \tag{18}$$

oder zur Vereinfachung der Schreibweise

$$m f = n g.$$

Aus (13) und (14) folgt ferner

$$m^2 f + m(a_1 b_1 - a_2 b_2) = g \tag{19}$$
$$n^2 g + n(a_1 b_1 - a_2 b_2) = f \tag{20}$$

oder

$$m_1 f = n_1 g = \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{2} + \sqrt{\frac{(a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2)^2}{4} + g f} \tag{21}$$

und

$$m_2 f = n_2 g = \frac{a_2 b_2 - a_1 b_1}{2} - \sqrt{\frac{(a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2)^2}{4} + g f}. \tag{22}$$

Aus den Lösungen von m und n läßt sich ein weiterer Zusammenhang zwischen den Wellenübertragungskonstanten m und n finden. Es ist

$$m_1 = -\frac{1}{n_2}, \tag{23}$$

$$m_2 = -\frac{1}{n_1}. \tag{24}$$

Diese Gleichungen in (13) und (14) eingeführt, geben wiederum die Beziehungen

$$a_1 + (m_1 + m_2) \cdot c_1 + a_2 \cdot m_1 \cdot m_2 = 0, \tag{25}$$
$$b_1 \cdot m_1 \cdot m_2 - (m_1 + m_2) \cdot c_2 + b_2 = 0. \tag{26}$$

Wie wir später sehen werden, bestimmen die Konstanten m_1, m_2 bzw. n_1, n_2 die Größe der Induktion auf dem Nachbarleiter. Wir wollen deshalb diese Konstanten Wellenübertragungskonstanten nennen. Die Größen f und g sollen Welleninduktionskonstanten genannt werden.

Diese Formeln auf die Gleichung (17) für die Ausbeutungskonstante angewandt, gibt für

$$\gamma_1^2 = a_1 b_1 + c_1 c_2 + m_1 f = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2 c_1 c_2}{2} + \sqrt{\frac{(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2}{4} + g f}, \tag{27}$$

$$\gamma_2^2 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2 c_1 c_2}{2} - \sqrt{\frac{(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2}{4} + g f}. \tag{28}$$

Wir besitzen also auf dem Doppelleiter 2 Wellenausbreitungskonstanten. Diese in Gleichung (15) eingeführt, ergeben die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2(V_1 + m_1 V_2)}{dx^2} = \gamma_1^2 (V_1 + m_1 V_2), \tag{29}$$

$$\frac{d^2(V_1 + m_2 V_2)}{dx^2} = \gamma_2^2 (V_1 + m_2 V_2). \tag{30}$$

In ähnlicher Weise zerfällt die Gleichung (16) in die Gleichungen

$$\frac{d^2(J_1 + n_1 J_2)}{dx^2} = \gamma_1^2 (J_1 + n_1 J_2), \tag{31}$$

$$\frac{d^2(J_1 + n_2 J_2)}{dx^2} = \gamma_2^2 (J_1 + n_2 J_2). \tag{32}$$

Allgemeine Lösungen dieser Differentialgleichungen (29) und (30) sind

$$V_1 + m_1 V_2 = p_1 e^{\gamma_1 x} + p_2 e^{-\gamma_1 x}, \tag{33}$$
$$V_1 + m_2 V_2 = p_3 e^{\gamma_2 x} + p_4 e^{-\gamma_2 x}, \tag{34}$$

oder



$$\left.\begin{aligned} V_1 = & -\frac{m_2}{m_1 - m_2}(p_1 e^{\gamma_1 x} + p_2 e^{-\gamma_1 x}) \\ & + \frac{m_1}{m_1 - m_2}(p_3 e^{\gamma_2 x} + p_4 e^{-\gamma_2 x}) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} V_2 = & \frac{1}{m_1 - m_2}(p_1 e^{\gamma_1 x} + p_2 e^{-\gamma_1 x}) \\ & - \frac{1}{m_1 - m_2}(p_3 e^{\gamma_2 x} + p_4 e^{-\gamma_2 x}) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Allgemeine Lösungen der Gleichungen (31) und (32) sind:

$$J_1 + n_1 J_2 = s_1 e^{\gamma_1 x} + s_2 e^{-\gamma_1 x} \tag{37}$$

und

$$J_1 + n_2 J_2 = s_3 e^{\gamma_2 x} + s_4 e^{-\gamma_2 x}. \tag{38}$$

Hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} J_1 = & -\frac{n_2}{n_1 - n_2}(s_1 e^{\gamma_1 x} + s_2 e^{-\gamma_1 x}) \\ & + \frac{n_1}{n_1 - n_2}(s_3 e^{\gamma_2 x} + s_4 e^{-\gamma_2 x}) \end{aligned}\right\} \tag{39a}$$

$$\left.\begin{aligned} J_2 = & \frac{1}{n_1 - n_2}(s_1 e^{\gamma_1 x} + s_2 e^{-\gamma_1 x}) \\ & - \frac{1}{n_1 - n_2}(s_3 e^{\gamma_2 x} + s_4 e^{-\gamma_2 x}) \end{aligned}\right\} \tag{40a}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen m und n lassen sich die Gleichungen (39) und (40) schreiben

$$\left.\begin{aligned} J_1 = & -\frac{m_2}{m_1 - m_2}(s_1 e^{\gamma_1 x} + s_2 e^{-\gamma_1 x}) \\ & + \frac{m_1}{m_1 - m_2}(s_3 e^{+\gamma_2 x} + s_4 e^{-\gamma_2 x}) \end{aligned}\right\} \tag{39b}$$

und

$$\left.\begin{aligned} J_2 = & \frac{-m_1 m_2}{m_1 - m_2}(s_1 e^{\gamma_1 x} + s_2 e^{-\gamma_1 x}) \\ & + \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2}(s_3 e^{\gamma_2 x} + s_4 e^{-\gamma_2 x}) \end{aligned}\right\} \tag{40b}$$

Letztere Werte von J in die Gleichungen (6), (7), (8), (9) eingesetzt, gibt für

$$\left.\begin{aligned} J_1 = & \frac{m_2}{m_1 - m_2}\left(\frac{p_1}{z_1} e^{\gamma_1 x} - \frac{p_2}{z_1} e^{-\gamma_1 x}\right) \\ & - \frac{m_1}{m_1 - m_2}\left(\frac{p_3}{z_2} e^{\gamma_2 x} - \frac{p_4}{z_2} e^{-\gamma_2 x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} J_2 = & \frac{-g}{f(m_1 - m_2)} \cdot \frac{p_1}{z_1} e^{\gamma_1 x} + \frac{g}{f(m_1 - m_2)} \frac{p_1}{z_1} e^{-\gamma_1 x} \\ & + \frac{g}{f(m_1 - m_2)} \cdot \frac{p_3}{z_2} e^{\gamma_2 x} - \frac{g}{f(m_1 - m_2)} \frac{p_4}{z_2} e^{-\gamma_2 x} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

wenn

$$z_1 = \frac{a_1 + m_1 c_1}{\gamma_1} = \frac{\gamma_1}{b_1 + n_1 c_2} = \sqrt{\frac{a_1 + m_1 c_1}{b_1 + n_1 c_2}} \tag{43}$$

und

$$z_2 = \frac{a_1 + m_2 c_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_2}{b_1 + n_2 c_2} = \sqrt{\frac{a_1 + m_2 c_1}{b_1 + n_2 c_2}}. \tag{44}$$

Die jetzt noch willkürlichen Integrationskonstanten p lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

$$p_1 = \frac{V_{10} + m_1 V_{20}}{2} - z_1 \frac{J_{10} + n_1 J_{20}}{2}, \tag{45 a}$$

$$p_2 = \frac{V_{10} + m_1 V_{20}}{2} + z_1 \frac{J_{10} + n_1 J_{20}}{2}, \tag{45 b}$$

$$p_3 = \frac{V_{10} + m_2 V_{20}}{2} - z_2 \frac{J_{10} + n_2 J_{20}}{2}, \tag{45 c}$$

$$p_4 = \frac{V_{10} + m_2 V_{20}}{2} + z_2 \frac{J_{10} + n_2 J_{20}}{2}. \tag{45 d}$$

Abkürzungshalber schreiben wir noch für

$$\sqrt{\frac{(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2}{4} + g f} = D,$$

dann ist

$$m_1 - m_2 = \frac{2D}{f}$$

und diese Werte in (35), (36), (39), (40) eingesetzt, geben die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} V_{1x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 x} + e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{g V_{20} - m_2 f V_{10}}{2D} - \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{f J_{20} - m_2 f J_{10}}{2D} \cdot z_1 \\ & - \frac{e^{\gamma_2 x} + e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{g V_{20} - m_1 f V_{10}}{2D} + z_2 \frac{e^{\gamma_2 x} - e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{f J_{20} - m_1 f J_{10}}{2D} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{2x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 x} + e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{f V_{10} + f m_1 V_{20}}{2D} - z_1 \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{f J_{10} + f n_1 J_{20}}{2D} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 x} + e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{f V_{10} + f m_2 V_{20}}{2D} + z_2 \frac{e^{\gamma_2 x} - e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{f J_{10} + f n_2 J_{20}}{2D} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{1x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 x} + e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{f J_{20} - f m_2 J_{10}}{2D} - \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{g V_{20} - m_2 f V_{10}}{2D z_1} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 x} + e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{f J_{20} - f m_1 J_{10}}{2D} + \frac{e^{\gamma_2 x} - e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{g V_{20} - m_1 f V_{10}}{2D z_2} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{2x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 x} + e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{g J_{10} + g n_1 J_{20}}{2D} - \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{g V_{10} + g m_1 V_{20}}{2D z_1} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 x} + e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{g J_{10} + g n_2 J_{20}}{2D} + \frac{e^{\gamma_2 x} - e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{g V_{10} + g m_2 V_{20}}{2D z_2} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Die Anfangswerte der Spannungen und Ströme bestimmen sich hieraus zu:

$$\left.\begin{aligned} V_{10} = {} & \frac{e^{\gamma_1 x} + e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{g V_{2x} - f m_2 V_{1x}}{2D} + z_1 \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{f J_{2x} - f m_2 J_{1x}}{2D} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 x} + e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{g V_{2x} - f m_1 V_{1x}}{2D} - z_2 \frac{e^{\gamma_2 x} - e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{f J_{2x} - f m_1 J_{1x}}{2D} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{20} = {} & \frac{e^{\gamma_1 x} + e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{f V_{1x} + f m_1 V_{2x}}{2D} + z_1 \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{f J_{1x} + f n_1 J_{2x}}{2D} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 x} + e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{f V_{1x} + f m_2 V_{2x}}{2D} - z_2 \frac{e^{\gamma_2 x} - e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{f J_{1x} + f n_2 J^2{}_x}{2D} \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{10} = {} & \frac{e^{\gamma_1 x} + e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{f J_{2x} \quad f m_2 J_{1x}}{2D} + \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{g V_{2x} - f m_2 V_{1x}}{2D z_1} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 x} + e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{f J_{2x} - f m_1 J_{1x}}{2D} - \frac{e^{\gamma_2 x} - e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{g V_{2x} - f m_1 V_{1x}}{2D z_2} \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{2x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 x} + e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{g J_{1x} + g n_1 J_{2x}}{2D} + \frac{e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x}}{2} \, \frac{g V_{1x} + g m_1 V_{2x}}{2 D z_1} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 x} + e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{g J_{1x} + g n_2 J_{2x}}{2D} - \frac{e^{\gamma_2 x} - e^{-\gamma_2 x}}{2} \, \frac{g V_{1x} + g m_2 V_{2x}}{2 D z_2} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Sind in einem beliebigen Punkte P, dessen Entfernung von dem Anfangspunkte x_1 sei, Strom- und Spannungsverteilung (V_{1b}, V_{2b}, J_{1b}, J_{2b}) bekannt, so lassen sich die Spannungen V_{1x}, V_{2x} die Ströme J_{1x} und J_{2x} auf dem gesamten Leitungsstrang durch folgende Gleichungen angeben:

$$\left.\begin{aligned} V_{1x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 (x - x_1)} + e^{-\gamma_1 (x - x_1)}}{2} \, \frac{g V_{2b} - m_2 f V_{1b}}{2D} - z_1 \frac{e^{\gamma_1 (x - x_1)} - e^{-\gamma_1 (x - x_1)}}{2} \, \frac{f J_{2b} - f m_2 J_{1b}}{2D} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 (x - x_1)} + e^{-\gamma_2 (x - x_1)}}{2} \, \frac{g V_{2b} - m_1 f V_{1b}}{2D} + z_2 \frac{e^{\gamma_2 (x - x_1)} - e^{-\gamma_2 (x - x_1)}}{2} \, \frac{f J_{2b} - f m_1 J_{1b}}{2D} \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{2x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 (x - x_1)} + e^{-\gamma_1 (x - x_1)}}{2} \, \frac{f V_{1b} + f m_1 V_{2b}}{2D} - z_1 \frac{e^{\gamma_1 (x - x_1)} - e^{-\gamma_1 (x - x_1)}}{2} \, \frac{f J_{1b} + f n_1 J_{2b}}{2D} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 (x - x_1)} + e^{-\gamma_2 (x - x_1)}}{2} \, \frac{f V_{1b} + f m_2 V_{2b}}{2D} + z_2 \frac{e^{\gamma_2 (x - x_1)} - e^{-\gamma_2 (x - x_1)}}{2} \, \frac{f J_{1b} + f n_2 J_{2b}}{2D} \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{1x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 (x - x_1)} + e^{-\gamma_1 (x - x_1)}}{2} \, \frac{f J_{2b} - f m_2 J_{1b}}{2D} - \frac{e^{\gamma_1 (x - x_1)} - e^{-\gamma_1 (x - x_1)}}{2} \, \frac{g V_{2b} - m_2 f V_{1b}}{2 D z_1} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 (x - x_1)} + e^{-\gamma_2 (x - x_1)}}{2} \, \frac{f J_{2b} - f m_1 J_{1b}}{2D} + \frac{e^{\gamma_2 (x - x_1)} - e^{-\gamma_2 (x - x_1)}}{2} \, \frac{g V_{2b} - m_1 f V_{1b}}{2 D z_2} \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{2x} = {} & \frac{e^{\gamma_1 (x - x_1)} + e^{-\gamma_1 (x - x_1)}}{2} \, \frac{g J_{1b} + g n_1 J_{2b}}{2D} - \frac{e^{\gamma_1 (x - x_1)} - e^{-\gamma_1 (x - x_1)}}{2} \, \frac{g V_{1b} + g m_1 V_{2b}}{2 D z_1} \\ & - \frac{e^{\gamma_2 (x - x_1)} + e^{-\gamma_2 (x - x_1)}}{2} \, \frac{g J_{1b} + g n_2 J_{2b}}{2D} + \frac{e^{\gamma_2 (x - x_1)} - e^{-\gamma_2 (x - x_1)}}{2} \, \frac{g V_{1b} + g m_2 V_{2b}}{2 D z_2} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Diese Gleichungen gelten allgemein, und es lassen sich in einfacher Weise hieraus die Gleichungen für die Anfangswerte aus den Endwerten und umgekehrt entwickeln.

Die Ausbreitung von elektrischer Energie auf einen Doppelleiter wird demnach durch zwei Wellen besorgt. Diese Wellen haben zwei verschiedene Ausbreitungskonstanten; sie überlagern sich. Da die Superposition zweier Wellenzüge verschiedener Ausbreitungskonstanten Inferenzwirkungen besitzen muß, so werden also auch auf den Leitern sich Strom- und Spannungsmaxima bzw. -minima ausbilden.

Die Strom- und Spannungsverhältnisse der Großgleichrichter.

Von

Walter Dällenbach und **Eduard Gerecke.**

Diese Veröffentlichung ist hervorgegangen aus einer Reihe von theoretischen Arbeiten und von Versuchen, die im Konzern Brown-Boveri & Co. im Laufe mehrerer Jahre ausgeführt wurden. Die wesentlichen Gedanken der Kapitel 1 und 2 gehen zurück auf den Winter 1919/20 und stammen von Meyer-Delius in Mannheim. Sie bildeten zusammen mit der mathematischen Behandlung des allgemeinen Falles, wie sie im zweiten Teil dieser Arbeit gegeben ist, den Gegenstand einer Vorlesung an der Eidgenössischen Technischen Hochschule (Zürich) im Winter 1922/23.

Einleitung und Inhaltsangabe.

So neu und umstritten die physikalischen Grundlagen heute noch sein mögen, auf die man im Bestreben nach gesteigerter Betriebssicherheit und Leistungsfähigkeit der Großgleichrichter abstellen muß, so klar und altbekannt sind die Voraussetzungen, von denen aus die äußere Wirkung eines störungsfrei arbeitenden Gleichrichters zu ermitteln ist. Wir meinen die Berechnung der Strom- und Spannungsverhältnisse in den zwei Stromnetzen, zwischen denen er als statischer Umformer vermittelt.

Der Lichtbogenabfall eines Quecksilberdampf-Gleichrichters ist gering im Verhältnis zu den bei Großgleichrichteranlagen vorkommenden Spannungen. Er erweist sich innerhalb weiter Grenzen als praktisch unabhängig von der Belastung. Der normale Rückstrom ist nicht bloß vernachlässigbar klein, sondern sogar eine recht schwierig zu messende Größe. Die einzelne Phase des Gleichrichters ist daher in ihrer Wirkung nach außen ersetzbar durch ein vollkommen sperrendes Ventil mit einem bei normalem Stromdurchgang unveränderlichen Spannungsabfall. Die Wirkungsweise der übrigen in den gesamten Stromnetzen vorhandenen Maschinen, Transformatoren und Apparate sei durch bekannte Gesetze wie das Ohmsche Gesetz, das Faradaysche Induktionsgesetz bestimmt. Es ist dann eine rein formale Angelegenheit, in der Art der Kirchhoffschen Regeln beliebig verzweigter Leitersysteme die Strom- und Spannungsverhältnisse zu berechnen.

Der Quecksilberdampf-Gleichrichter wirkt also wie ein periodisch und synchron arbeitender Schaltmechanismus. Die Periode, etwa eines Anodenstromes, wird durch die Schaltmomente des Mechanismus in eine Anzahl von Zeitintervallen unterteilt, in deren jedem der Anodenstrom in bekannter Weise sich ergibt durch Überlagerung einer rein sinusförmigen und einer exponentiell abklingenden Schwingung. Die Konstanten dieser Schwingungen sind in jedem dieser Teilintervalle andere und unter sich verknüpft und aus den Daten der Stromkreise berechenbar vermöge eines Systems transzendenter Gleichungen. Dieses System scheint allgemein nicht lösbar, und die Arbeiten, welche sich mit den Strom- und Spannungsverhältnissen des Gleichrichters befassen, unterscheiden sich nun gerade durch die Art und Weise, wie sie sich dieser Tatsache gegenüber verhalten.

An erster Stelle ist eine Arbeit von Steinmetz aus dem Jahr 1905 zu nennen[1]). Er behandelt den Fall des durch Einphasenstrom gespiesenen Quecksilberdampf-Gleichrichters mit zwei Anoden. Im Gleichstromkreis sind Drosselspule, Widerstand und gegenelektromotorische Kraft in Reihe geschaltet. Widerstände und Streureaktanzen der Transformatorwicklung werden mitberücksichtigt. Die Gleichungen zur Berechnung des Anodenstromes werden in voller Allgemeinheit angesetzt. Ihre Lösung geschieht

---

[1]) Proc. of the Am. Inst. of El. Eng. 1905, S. 743.

angenähert und in zwei Stufen. Es werden zunächst alle Ohmschen Widerstände vernachlässigt. Das allgemein unlösbare System transzendenter Gleichungen degeneriert dann zu einem System rein trigonometrischer Gleichungen. Dessen Lösung wird in die exponentiellen Glieder des allgemeinen Systems eingesetzt und aus diesen nun wieder rein trigonometrischen Gleichungen eine zweite, schon genauere Lösung ermittelt. Durch Interpolation folgt aus diesen zwei Lösungen die Annäherung, die nach Versuchen von Steinmetz genügt.

Nielsen hat in der ETZ für den deutschen Leserkreis über die Arbeit von Steinmetz ausführlich referiert [1]). In einer weiteren Veröffentlichung [2]) überträgt er dessen Rechnungsweise auf den Fall des Dreiphasengleichrichters mit besonderer Berücksichtigung einer Transformatorschaltung, wie sie bei Kleingleichrichteranlagen der Glastype Verwendung findet.

Einen andern Weg gibt Kleeberg [3]) an. Der Gleichrichter befinde sich im Leerlauf. In einem bestimmten, geeignet gewählten Zeitmoment wird die Gleichstrombelastung zugeschaltet. Von diesem bekannten Anfangszustand aus ist es nach der Art von Einschaltvorgängen möglich, das Einschwingen in den periodischen Stromverlauf des stationären Betriebes zu berechnen. Die Strom- und Spannungsverhältnisse beim stationären Betrieb ergeben sich also statt durch Lösung eines Systems transzendenter Gleichungen durch ein Verfahren endloser Annäherung.

Dann existiert über den Gegenstand eine Dissertation von Keller [4]), der für eine Anzahl wichtiger Betriebsfälle die Lösungen des Systems transzendenter Gleichungen, das für die Strom- und Spannungsverhältnisse des 6-Phasengleichrichters maßgebend ist, mit Hilfe der Regula falsi numerisch berechnet.

Ähnliches leistet eine Arbeit von Pflieger-Haertel [5]). Die Differentialgleichungen mit Berücksichtigung der Ohmschen und induktiven Widerstände im Transformator und bei allgemeiner Belastung im Gleichstromnetz werden nach einer anschaulichen Methode graphisch integriert. Wenn man nicht mehr will, als in einem zahlenmäßig gegebenen Einzelfall den Stromverlauf numerisch berechnen, so scheint uns dieses das bequemste und am raschesten zum Ziel führende Verfahren zu sein.

Endlich müssen noch Arbeiten des Holländers Krijger [6]) genannt werden. In der ersten gelangt Krijger für den Mehrphasengleichrichter zu dem System transzendenter Gleichungen, dessen näherungsweise Lösung in den vorerwähnten Arbeiten auf verschiedenen Wegen versucht wurde. Ohne in dieser Richtung einen Ansatz zu versuchen, werden ungeeignete Spezialisierungen vorgenommen, wie die Vernachlässigung sämtlicher Streureaktanzen des Transformators, welche die praktische Verwendbarkeit seiner Resultate in Frage stellen. Weitere Publikationen von Krijger, die von denselben ungeeigneten Annahmen ausgehen, befassen sich mit dem Leistungsfaktor von Gleichrichteranlagen.

Der Vollständigkeit halber seien noch ältere Arbeiten von Papalexi [7]), Jäger [8]) und von Schulze und Lindemann [9]) genannt, die sich alle darauf beschränken, die Wirkungsweise eines einzelnen elektrischen Ventils in verschiedenen Schaltungen zu beschreiben. Für die Frage der Strom- und Spannungsverhältnisse der Gleich-

[1]) ETZ 1919, S. 224.
[2]) ETZ 1921, S. 1185.
[3]) ETZ 1920, S. 145, 171, 193.
[4]) Untersuchungen an Quecksilberdampfgleichrichtern, Zürich 1918.
[5]) Wissenschaftl. Veröffentl. aus dem Siemenskonzern Bd. III, 1923, S. 61.
[6]) de Ingenieur 1921, S. 144. — Wiederholungen davon finden sich bei Jungmichel, Elektrotechnik u. Maschinenbau XLI (1923), S. 57 und Revue générale d'Electricité XIV (1923), S. 182 — Kade'n, Wissenschaftl. Veröffentl. aus dem Siemenskonzern Bd. III, 1923, S. 41.
[7]) Ann. d. Phys. 1912. S. 976.
[8]) Archiv f. Elektrotechnik 1914, S. 418.
[9]) Phys. Zeitschrift 1914, S. 254.



richter können sie, weil in ihnen die physikalische Seite noch reiner zum Ausdruck kommt, das Verständnis einer Arbeit wie der von Steinmetz erleichtern.

Von diesen qualitativ so verschieden zu bewertenden Arbeiten hat eigentlich keine Eingang gefunden in die Praxis des projektierenden Ingenieurs, denn entweder werden ungeeignete, oder für die Bedürfnisse der Praxis zu weit gehende Spezialisierungen vorgenommen, wie in den Arbeiten von Krijger, Jungmichel und Kaden, oder es wird versucht ohne einschränkende Bedingungen die allgemeine Lösung anzugeben. So werden in den Arbeiten von Steinmetz, Kleeberg, Keller und Pflieger-Haertel verschiedene Integrationsmethoden entwickelt. Allen gemeinsam ist, daß sie wohl erlauben, in irgendeinem zahlenmäßig vorliegenden Belastungsfall die Strom- und Spannungsverhältnisse zu berechnen, dagegen ist keine von ihnen imstande, geschlossene analytische Ausdrücke anzugeben, welche mit genügender Annäherung die Abhängigkeit der Gleichspannung, der Ströme, der Transformatorscheinleistungen, des Leistungsfaktors im speisenden Netz und des Wirkungsgrades von der Belastung darstellen und welche erlauben, die Vor- und Nachteile verschiedener Schaltungen und die Einflüsse von Reaktanzen und Ohmschen Widerständen in übersichtlicher Weise zu diskutieren. Infolge der rechnerischen Schwierigkeiten bei der Behandlung des allgemeinen Falles gehen eben die dem Ingenieur so nötige Übersichtlichkeit und Anschaulichkeit der Ableitungen und ihrer Resultate verloren. Unter diesen Umständen haben wir auf die Lösung des allgemeinen Falles verzichtet und haben von vorneherein zwei bestimmte vereinfachende Annahmen eingeführt.

In einer immer größeren Anzahl von Gleichrichteranlagen wird die Welligkeit des Gleichstromes möglichst unterdrückt, meistens durch Erhöhung der Phasenzahl auf 6 (in seltenen Fällen sogar auf 12), oder auch durch Anwendung von Drosselspulen oder besonderen Schaltungen im Gleichstromkreis. Man erhält daher eine für die Mehrzahl der Großgleichrichteranlagen gute Annäherung an die wirklichen Betriebsverhältnisse, wenn man annimmt, der Gleichstrom werde durch eine unendlich große Drosselspule vollkommen konstant gehalten. Vernachlässigt man ferner im Transformator und im speisenden Wechselstromnetz die Ohmschen Widerstände gegenüber den Reaktanzen und eventuell vorhandenen magnetischen Kopplungen, so werden die Strom- und Spannungsverhältnisse einer Gleichrichteranlage beliebiger Phasenzahl für den ganzen Belastungsbereich von Leerlauf bis Kurzschluß berechenbar, insbesondere lassen sich die Stromspannungscharakteristik des Gleichstromnetzes, der oszillographische Verlauf des Anodenstromes, aus dem dann bei gegebener Schaltung der Primärstrom, der Netzstrom, die Scheinleistungen des Transformators und der Leistungsfaktor des Netzes folgen, auf geschlossene, analytische Ausdrücke bringen, die bequem diskutierbar sind. Die Konstanz des Gleichstromes einerseits und die Vernachlässigung der Ohmschen Widerstände im Wechselstromkreis gegenüber den Reaktanzen anderseits sind also die zwei vereinfachenden Annahmen, die in der Folge zunächst gemacht werden.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil ist in einer dem Mittelschultechniker geläufigen Weise gehalten.

Das erste Kapitel behandelt den Gleichrichter beliebiger Phasenzahl im einfachsten Fall, wo außer den Ohmschen auch die induktiven Spannungsabfälle vernachlässigt sind. Die Ergebnisse sind für den 2-Phasenfall und verschiedene Schaltungen des 3-Phasen- und des 6-Phasengleichrichters bis zu den Zahlenwerten in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt.

Im zweiten Kapitel werden die Streureaktanzen in den Sekundärphasen des Transformators berücksichtigt und dabei der wichtige Begriff der Überlappung der Anodenströme eingeführt. Der Gleichspannungsabfall wächst für kleine Überlappungen linear mit dem Belastungsstrom. Es bestätigt sich dabei die günstige Wir-

kung der Saugdrosselspule nach Kübler auf Gleichspannungsabfall und Scheinleistungen des Transformators.

Im dritten Kapitel werden die bisherigen Betrachtungen erweitert auf den Fall, daß auch primärseitig und im speisenden Wechselstromnetz Streureaktanzen vorkommen. Für die 4 hauptsächlichsten Schaltungen des 6-Phasengleichrichters werden die Resultate mitgeteilt und eingehend besprochen, jedoch nur für eine von ihnen ist die Herleitung der Formeln durchgeführt.

Im vierten Kapitel werden schließlich auch die Ohmschen Widerstände berücksichtigt, aber dabei ist näherungsweise angenommen, daß sie an dem in Kapitel 3 für die verlustlose Anlage errechneten Verlauf der Ströme nichts ändern und nur zusätzliche Spannungsabfälle zur Folge haben, was streng natürlich nicht der Fall ist.

Das fünfte Kapitel zeigt an einem Beispiel, wie auf Grund der Resultate der Kapitel 1 bis 4 die Vorausberechnung einer Gleichrichteranlage vor sich geht. Dabei ergibt sich die praktisch bedeutungsvolle Feststellung, daß der Gleichspannungsabfall, die Daten des Transformators und der Saugdrosselspule, sowie der Leistungsfaktor an den Primärklemmen der Anlage auch dann, wenn die Primärklemmenspannung am Transformator konstant gehalten wird, mitbestimmt sind durch die Verhältnisse im speisenden Wechselstromnetz. Das steht im Gegensatz zum Verhalten der üblichen Maschinen mit sinusförmigem Stromverbrauch und ist zurückzuführen auf die verzerrte Kurvenform des Netzstromes bei Gleichrichterbetrieb. Insbesondere dann, wenn die Leistung des Netzes von ähnlicher Größe ist wie die der Gleichrichteranlage, ist dieser Einfluß derart, daß er bei Vorausberechnung und Garantieabgabe berücksichtigt werden muß. So können sich beispielsweise auf den Anlagen beträchtliche Abweichungen zeigen von den Strom- und Spannungsverhältnissen, wie sie im Versuchsstand gemessen wurden, sobald die vor der Gleichrichteranlage im speisenden Netz befindlichen Reaktanzen in den beiden Fällen wesentlich verschieden sind.

Kapitel 6 greift neuerdings über den Rahmen der bisherigen Betrachtungen hinaus, indem in ihm Versuche an einem 6-Phasengleichrichter beschrieben werden über den Verlauf der Gleichspannung und des Anodenstromes im ganzen Belastungsintervall von Leerlauf bis Kurzschluß. Es zeigt sich, daß der in Kapitel 2 und 3 berechnete Gleichspannungsabfall von derjenigen Belastung an nicht mehr gilt, wo die Überlappung solche Werte erreicht, daß zeitweise mehr als zwei Anoden gleichzeitig brennen. Die vollständige Stromspannungscharakteristik erweist sich als ein gebrochener Linienzug. Dessen Geradenstücke unterscheiden sich nun dadurch von einander, daß bei wachsender Belastung die Zahl der sich überlappenden Phasen von Gerade zu Gerade um je eine Einheit zunimmt. Die in den Kapiteln 2 und 3 errechnete Strom-Spannungs-Charakteristik deckt sich mit der ersten Geraden des Polygonzuges, und auf ihr liegen die im normalen Betrieb auftretenden Belastungen, so daß die Betrachtungen der Kapitel 1 bis 5 ihre Geltung behalten. Im Idealfall des vollkommenen stationären Kurzschlusses brennen alle sechs Anoden dauernd gleichzeitig, so sonderbar das auf den ersten Blick auch erscheint.

Der zweite Teil befaßt sich eingehend mit der Aufklärung und Berechnung von Betriebszuständen, bei denen eine beliebige Anzahl von Phasen sich überlappen. Wie im ersten Teil ist wieder angenommen, daß wechselstromseitig die Ohmschen Widerstände gegenüber den Reaktanzen zu vernachlässigen seien und daß der Gleichstrom konstant gehalten werde durch eine unendlich große Kathodendrosselspule. Von den im Transformator und im speisenden Wechselstromnetz angenommenen Reaktanzen und magnetischen Kopplungen wird allein vorausgesetzt, daß sie den Symmetrieeigenschaften eines Mehrphasensystems genügen. — Es gelingt, die in Kapitel 6 experimentell aufgenommene Charakteristik der Gleichspannung genau zu berechnen. Im Fall, daß magnetische Kopplungen im Spiel sind, weicht



sie von dem dort gefundenen Linienzug wesentlich ab, bleibt aber nach der angegebenen Methode berechenbar. Zum Schluß wird die Wirkungsweise der Saugdrosselspule einer eingehenden Analyse unterzogen.

Die Erfahrung wird zeigen müssen, ob diese Arbeit trotz der Vernachlässigung der Widerstände wechselstromseitig und der Welligkeit im Gleichstromnetz eine der Praxis genügende Annäherung darstellt. In einem Fall ist das sicher nicht zutreffend, nämlich dann, wenn parallel zum Gleichrichter eine Akkumulatoren-Batterie oder eine große Dynamomaschine aufs Gleichstromnetz arbeitet. Die dabei im Gleichrichterstrom auftretende starke Welligkeit bedarf besonderer Betrachtungen[1]). Vorarbeit dafür ist bereits geleistet durch Demontvignier[2]). Unabhängig von uns, aber ähnlich wie das im zweiten Teil unserer Veröffentlichung geschieht, rechnet er streng den folgenden Fall: Wechselstromseitig sollen Spannungsabfälle allein in den Streureaktanzen und magnetischen Kopplungen zwischen benachbarten Phasen der Sekundärwicklung des Transformators auftreten. Im Gleichstromkreis befinde sich eine endliche Drosselspule in Serie mit konstanter Gegen-EMK. Die Arbeit ist sehr gedrängt abgefaßt und beschränkt sich auf die Mitteilung des Mathematisch-Prinzipiellen.

Erster Teil.

1. Der Mehrphasen-Gleichrichter bei Vernachlässigung aller Spannungsabfälle wechselstromseitig und mit unendlich großer Drosselspule im Gleichstromkreis.

Da wir annehmen, der Lichtbogenabfall sei unabhängig von der Belastung und konstant, so können zwei Anoden nur dann gleichzeitig brennen, wenn sie unter sich dasselbe Potential haben und gegenüber der Kathode eine um den Lichtbogenabfall höhere Spannung. Das ist für die einfache und bekannte Schaltung des Bildes 1 bei Vernachlässigung sowohl der Ohmschen, wie der induktiven Spannungsabfälle wechselstromseitig nur der Fall in dem Zeitpunkt, wo die Phasenspannungen zweier aufeinander folgender Anoden gleich und positiv sind. Es brennt daher, wenn die Phasenspannungen ein symmetrisches Mehrphasensystem bilden, immer nur eine Anode und zwar gerade die mit momentan höchstem Potential. Welches also auch die Belastung im Gleichstromkreis sei, wenn die Spannungsabfälle wechselstromseitig alle Null sind, so fließt bei einem p-Phasengleichrichter immer nur ein einzelner Anodenstrom und nur über ein Intervall der Dauer $\frac{2\pi}{p}$. Diese Intervalle reihen sich für die aufeinanderfolgenden Anoden aneinander, ohne sich zu überdecken. Wird der Gleichstrom J durch eine unendlich große Drosselspule konstant gehalten, so muß jeder Anodenstrom in seinem Arbeitsintervall den konstanten Wert J haben und zu den sinusförmig vorausgesetzten Phasenspannungen orientiert sein, wie Bild 2 zeigt. Damit ist der oszillographische Verlauf des

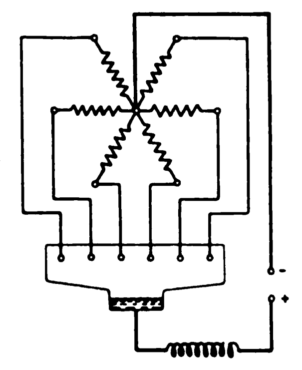


Bild 1. Mehrphasengleichrichter.

[1]) Taeger, Der Einfluß der Gleichstromdrosselspule auf den Leistungsfaktor des Wechselstromes beim Quecksilber-Dampf-Gleichrichter. ETZ 45 (1924), S. 774. Taeger glaubt im Gegensatz zu unserer Auffassung gezeigt zu haben, daß die Gleichstromdrosselspule keinen Einfluß ausübt auf den Leistungsfaktor im Netz. An einfachen Beispielen ist leicht einzusehen, daß das nicht richtig sein kann. Seine Ableitungen enthalten Rechenfehler, die sich beispielsweise darin äußern, daß seine Gleichung (2) nicht einmal in den Dimensionen stimmt.

[2]) Revue générale d'Electricité Tome XV (1924), S. 493.

Anodenstromes bekannt, und aus ihm folgen alle Daten der Tabelle I, wie nun erläutert werden soll.

Allgemein für den p-Phasengleichrichter hat also der Anodenstrom, der ja mit dem sekundären Phasenstrom übereinstimmt, den Scheitelwert J, den Mittelwert $\frac{J}{p}$ und den Effektivwert $\frac{J}{\sqrt{p}}$.

Der Transformator habe das Übersetzungsverhältnis 1 : 1, was in allen Fällen der Tabelle gleichbedeutend ist mit gleicher Windungszahl der primären und sekundären Phasen. Ferner soll das Transformatoreisen praktisch unendlich gut leiten, d. h. der Magnetisierungsstrom sei vernachlässigbar klein. Daraus folgt, daß die resultierende Ampèrewindungszahl verschwinden muß, welche durch irgendeinen geschlossenen Weg umschlungen wird, der ganz innerhalb des Eisens verläuft.

Bei der in Bild 3 dargestellten Sternschaltung eines 6-Phasengleichrichters führe Anode 1 momentan den vollen Gleichstrom J, während alle anderen Anoden sperren. Die erste Kirchhoffsche Regel, auf den Sternpunkt der Primärseite angewandt, liefert für die drei Primärströme j_1, j_2, j_3 die Beziehung:

$$j_1 + j_2 + j_3 = 0.$$

Durch Nullsetzen der Ampèrewindungszahlen, welche von den drei möglichen Wegen umschlungen werden, die je 2 Schenkel durchsetzen und sich über die Joche schließen, gewinnt man die Gleichungen:

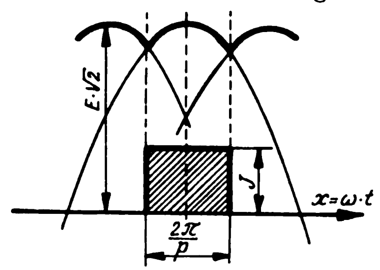


Bild 2. Anodenspannung und Anodenstrom eines Mehrphasengleichrichters bei Vernachlässigung aller Spannungsabfälle wechselstromseitig und mit unendlich großer Kathodendrosselspule.

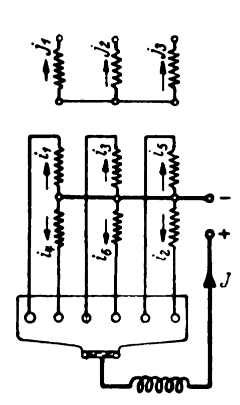


Bild 3. 6-Phasengleichrichter mit Sternschaltung der Primärwicklung.

$$J + j_1 - j_2 = 0 \qquad J + j_1 - j_3 = 0 \qquad j_2 - j_3 = 0.$$

Die letzte ist eine Folge der beiden andern. Auflösen aller 4 Gleichungen liefert:

$$j_1 = -\frac{2}{3} J, \qquad j_2 = +\frac{J}{3}, \qquad j_3 = +\frac{J}{3}.$$

Damit ist der oszillographische Verlauf der Primärströme bestimmbar. Brennt Anode 1, so ist die Summe aller Ampèrewindungen auf jedem Schenkel gleich dem Produkt aus der Windungszahl pro Phase und dem Strom $\frac{J}{3}$. Es tritt also erzwungene Magnetisierung auf, die einen magnetischen Fluß erzeugt, der von Joch zu Joch durch die Luft und evtl. über das Gehäuse geht. Brennt die nächste Anode, so kehrt sich das Vorzeichen der magnetischen Spannung zwischen den Jochen um. Der Streufluß über die Luft und das Gehäuse muß also nach je 60° die Richtung wechseln. Hierdurch treten in den Phasenwicklungen Reaktanzspannungen auf, die ein momentanes Anwachsen und Verschwinden der Anodenströme verhindern. Da wir aber in diesem Kapitel alle Spannungsabfälle wechselstromseitig vernachlässigen wollen, nehmen wir an, daß im Fall der Sternschaltung der magnetische Widerstand der Luft unendlich groß sei, so daß der

Streufluß der erzwungenen Magnetisierung verschwindet. Der Anodenstrom verläuft dann nach der im Bild 2 dargestellten rechteckigen Form. Einzig beim 3-Phasengleichrichter mit Sternschaltung hat die erzwungene Magnetisierung keinen Einfluß auf den Verlauf der Ströme, da sie dauernd nach Größe und Richtung erhalten bleibt. Der Primärstrom stimmt bei Sternschaltung mit dem Netzstrom überein.

Tabelle 1.

Phasenzahl		Einsphasig	Dreiphasig					
	Primär / Sekundär	2	3	3	6 ohne Saugdrosselspule	6 ohne Saugdrosselspule	6 mit Saugdrosselspule	6 mit Saugdrosselspule
Schaltungs-Schema								
Anodenstrom								
Scheitelwert		J	J	J	J	J	$\frac{J}{2}$	$\frac{J}{2}$
Mittelwert		$\frac{J}{2}$	$\frac{J}{3}$	$\frac{J}{3}$	$\frac{J}{6}$	$\frac{J}{6}$	$\frac{J}{6}$	$\frac{J}{6}$
Effektivwert		$\frac{J}{\sqrt{2}} = \frac{J}{1,41} = 0,71\,J$	$\frac{J}{\sqrt{3}} = \frac{J}{1,73} = 0,58\,J$	$\frac{J}{\sqrt{3}} = \frac{J}{1,73} = 0,58\,J$	$\frac{J}{\sqrt{6}} = \frac{J}{2,45} = 0,41\,J$	$\frac{J}{\sqrt{6}} = \frac{J}{2,45} = 0,41\,J$	$\frac{J}{2\sqrt{3}} = \frac{J}{3,46} = 0,29\,J$	$\frac{J}{2\sqrt{3}} = \frac{J}{3,46} = 0,29\,J$
Primärstrom								
Effektivwert		J	$\frac{J}{\sqrt{3}} = \frac{J}{1,73} = 0,58\,J$	$\frac{J\sqrt{2}}{3} = \frac{J}{2,12} = 0,47\,J$	$\frac{J}{\sqrt{3}} = \frac{J}{1,47} = 0,58\,J$	$\frac{J\sqrt{2}}{3} = \frac{J}{2,12} = 0,47\,J$	$\frac{J}{\sqrt{6}} = \frac{J}{2,45} = 0,41\,J$	$\frac{J}{\sqrt{6}} = \frac{J}{2,45} = 0,41\,J$
Netzstrom								
Effektivwert		J	$J\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{J}{1,23} = 0,82\,J$	$\frac{J\sqrt{2}}{3} = \frac{J}{2,12} = 0,47\,J$	$J\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{J}{1,23} = 0,82\,J$	$\frac{J\sqrt{2}}{3} = \frac{J}{2,12} = 0,47\,J$	$\frac{J}{\sqrt{2}} = \frac{J}{1,41} = 0,71\,J$	$\frac{J}{\sqrt{6}} = \frac{J}{2,45} = 0,41\,J$
Leistungsfaktor im Netz		$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = \frac{1}{1,11} = 0,90$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{1}{1,21} = 0,83$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{1}{1,21} = 0,83$	$\frac{3}{\pi} = \frac{1}{1,05} = 0,955$	$\frac{3}{\pi} = \frac{1}{1,05} = 0,955$	$\frac{3}{\pi} = \frac{1}{1,05} = 0,955$	$\frac{3}{\pi} = \frac{1}{1,05} = 0,955$
Gleichspannung		$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} E = \frac{E}{0,90} = 1,11\,E$	$\frac{3\sqrt{6}}{2\pi} E = \frac{E}{0,855} = 1,17\,E$	$\frac{3\sqrt{6}}{2\pi} E = \frac{E}{0,855} = 1,17\,E$	$\frac{3\sqrt{2}}{\pi} E = \frac{E}{0,74} = 1,35\,E$	$\frac{3\sqrt{2}}{\pi} E = \frac{E}{0,74} = 1,35\,E$	$\frac{3\sqrt{6}}{2\pi} E = \frac{E}{0,855} = 1,17\,E$	$\frac{3\sqrt{6}}{2\pi} E = \frac{E}{0,855} = 1,17\,E$
Transformator-Scheinleistung	sekundär	$\frac{\pi}{2} P = 1,57\,P$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{3} P = 1,48\,P$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{3} P = 1,48\,P$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}} P = 1,81\,P$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}} P = 1,81\,P$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{3} P = 1,48\,P$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{3} P = 1,48\,P$
	primär	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} P = 1,11\,P$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{3} P = 1,48\,P$	$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} P = 1,21\,P$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}} P = 1,28\,P$	$\frac{\pi}{3} P = 1,05\,P$	$\frac{\pi}{3} P = 1,05\,P$	$\frac{\pi}{3} P = 1,05\,P$
	im Mittel	$1,34\,P$	$1,48\,P$	$1,35\,P$	$1,55\,P$	$1,43\,P$	$1,26\,P$	$1,26\,P$

Stromspannungsverhältnisse verschiedener Gleichrichterschaltungen bei Vernachlässigung aller Spannungsabfälle wechselstromseitig und mit unendlich großer Kathodendrosselspule.
J = Gleichstrom. P = Gleichleistung. E = effektive Phasenspannung.

Bei **Dreieckschaltung** würde ein magnetischer Fluß von Joch zu Joch durch das bei dieser Schaltung vorhandene Dreieck, das für ihn bei Vernachlässigung der Streureaktanzen in den Primärphasen des Transformators eine vollkommene Dämpferwicklung darstellt, unterdrückt. Erzwungene Magnetisierung kann unter diesen Umständen nicht auftreten. Auf einem Weg, der vom einen Joch durch einen Schenkel zum andern Joch und von dort über die Luft und das Gehäuse zum Ausgangspunkt zurückkehrt, muß folglich die Summe aller umschlungenen Ampèrewindungen Null sein, da ja die magnetische Spannung im Innern des Eisens nach Voraussetzung verschwindet. Deshalb muß bei Dreieckschaltung die Summe aller Ampèrewindungen auf jedem Schenkel für sich Null sein. Diese Bedingung gestattet den Verlauf der

Primärströme aus den Anodenströmen zu ermitteln. Die Netzströme folgen durch Anwendung der ersten Kirchhoffschen Regel auf die Ecken des Dreieckes.

Aus dem so ermittelten oszillographischen Verlauf der Primär- und Netzströme sind ihre in der Tabelle I angegebenen Effektivwerte berechnet.

Da an der Drosselspule im Gleichstromkreis nur eine reine Wechselspannung vom Mittelwerte Null bestehen kann, berechnet sich die Gleichspannung G als zeitlicher Mittelwert der Spannung zwischen Kathode und sekundärem Sternpunkt des Transformators. Oder, wenn wir den konstanten Lichtbogenabfall zur Gleichspannung dazu schlagen, ist diese der Mittelwert einer Phasenspannung über die Brenndauer $\frac{2\pi}{p}$ der ihr zugehörigen Anode, also

$$G = \frac{E\sqrt{2}}{\frac{2\pi}{p}} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{+\frac{\pi}{p}} \cos x \, dx = E\sqrt{2} \, \frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \tag{1}$$

unabhängig von der Belastung und gleich $E\sqrt{2}$ für $p = \infty$. E bedeutet den Effektivwert der sinusförmigen Phasenspannung. Da

$$P = E\sqrt{2} \, \frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \, J$$

die Gleichleistung ist, so läßt sich die Scheinleistung des Transformators sekundärseitig, die gleich dem Produkte der Phasenzahl und der Effektivwerte von Phasenspannung und Anodenstrom ist

$$P_{II} = p\,E\,\frac{J}{\sqrt{p}} = E\,J\,\sqrt{p}$$

durch die übertragene Leistung ausdrücken.

$$P_{II} = \frac{\sqrt{\frac{p}{2}}}{\frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}}} \, P.$$

In gleicher Weise findet man je nach Phasenzahl und Schaltung verschieden die primäre Scheinleistung des Transformators $P_I = \text{const} \cdot P$. In der Tabelle ist $\frac{1}{2}(P_I + P_{II})$ als mittlere Scheinleistung aufgeführt. P_I und P_{II} sind brauchbar für eine ungefähre Dimensionierung des Transformators. Der Leistungsfaktor des Netzes ist gleich der übertragenen Leistung pro Primärphase, dividiert durch das Produkt der Effektivwerte von Netzstrom und zugehöriger Spannung.

In den Erläuterungen zur Tabelle ist noch ein Wort zu sagen über die Schaltungen des Sechsphasen-Gleichrichters mit sogenannter Saugdrosselspule nach Kübler. Die zwei um 180^0 gegeneinander versetzten Dreiphasensysteme, aus denen man das Sechsphasensystem des Transformators zusammengesetzt denken kann, haben getrennte Nullpunkte. Sie führen an die Enden einer Drosselspule, deren

Mitte mit der negativen Gleichstromklemme verbunden ist (Bild 4). Ist die Drosselspule genügend stark, in der Grenze unendlich stark, so kann kein sie in ihrer ganzen Ausdehnung gleichsinnig durchfließender Wechselstrom auftreten. Die Ströme, die von den Sternpunkten der zwei Dreiphasensysteme nach den Enden der Drosselspule gehen, müssen daher stets gleiche Momentanwerte ihres Wechselanteils haben. Solche Wechselanteile werden aber durch die unendlich große Kathodendrosselspule unterdrückt. Also fließen aus den Sternpunkten der zwei Dreiphasensysteme reine Gleichströme. Die Saugdrosselspule verwandelt also den Sechsphasen-Gleichrichter in zwei parallel geschaltete, um 180^0 gegeneinander phasenverschobene, Dreiphasen-Gleichrichter. Falls diese in allen ihren Verhältnissen übereinstimmen, was wir annehmen wollen, sind beide mit $\frac{J}{2}$ gleich belastet. Die Daten der Tabelle für den Sechsphasen-Gleichrichter mit Saugdrosselspule können also aus denen des Dreiphasen-Gleichrichters hingeschrieben werden. Erzwungene Magnetisierung tritt nicht auf. Der günstige Einfluß der Saugdrosselspule auf die mittlere Scheinleistung des Transformators ist ein Grund ihrer praktischen Bedeutung.

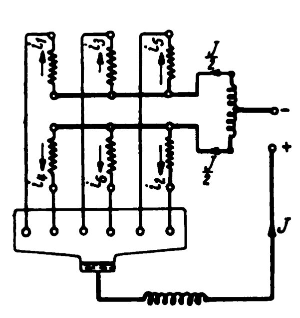


Bild 4. 6-Phasengleichrichter mit Saugdrosselspule.

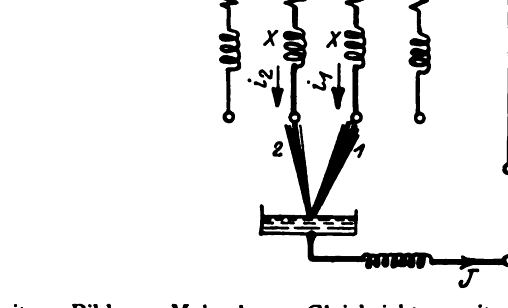


Bild 5. Mehrphasen-Gleichrichter mit Streureaktanzen in den Sekundärphasen des Transformators.

2. Berücksichtigung der Streuung in den Sekundärphasen des Transformators.

Der Gleichstrom werde wieder durch die unendlich große Kathoden-Drosselspule konstant gehalten. Wechselstromseitig seien aber nicht mehr alle Spannungsabfälle Null, sondern es sollen nach Bild 5 die Streureaktanzen $\omega L = X$ der Sekundärphasen des Transformators berücksichtigt werden. $\omega = 2\pi f$ ist die Kreisfrequenz, f die sekundliche Periodenzahl im Wechselstromnetz. Unter diesen Annahmen stellen wir uns die Aufgabe, den zeitlichen Verlauf eines Anodenstromes zu berechnen.

Fließt der ganze Gleichstrom über die Anode 2, so treten an den Streureaktanzen X keine Spannungsabfälle auf und der Momentanwert der Spannung zwischen brennender Anode und Sternpunkt des Transformators stimmt überein mit dem Momentanwert der Phasenspannung e_2 (Bild 6a). Das Zünden der Anode 1 erfolgt im Zeitpunkt, wo Anode 1 das gleiche Potential wie Anode 2 annimmt, also wie früher im Schnittpunkt der Kurven e_2 und e_1, der Leerlaufspannungen der Phasen 2 und 1. Aber im Gegensatz zu früher verhindern nun die Streureaktanzen X ein momentanes Verschwinden des Anodenstromes i_2 und einen momentanen Anstieg des Anodenstromes i_1 auf den Wert J. Diese beiden Vorgänge finden jetzt allmählich statt. Der Strom J in der Reaktanz der erlöschenden Phase repräsentiert eine

magnetische Energie, die in der Zeit, während welcher 2 Anodenströme sich überlappen, abgebaut und in der Reaktanz der zündenden Phase wieder aufgespeichert werden muß.

Zur Berechnung dieses Vorganges haben wir uns folgendes zu überlegen. Vom Zeitpunkt an, wo die Phase 1 zündet, sind die Anoden 1 und 2 unter sich kurzgeschlossen. Da der Strom, welcher dem aus diesen zwei Phasen gebildeten Kurzschlußkreis von außen zugeführt wird, der Gleichstrom J ist, der in den Reaktanzen keine Spannungsabfälle hervorruft, muß in dem geschlossenen Leiterkreis als Wechselanteil der stationäre Kurzschlußstrom k (Bild 6b) zirkulieren. Die treibende elektromotorische Kraft für diesen Kurzschlußstrom ist die Spannungsdifferenz $(e_1 - e_2)$. Diese hat im Zündpunkt $e_1 = e_2$, den wir zum Koordinatenursprung für die Zeitmessung wählen, eine Nullstelle und steigt von dort sinusförmig bis zur Amplitude $2\sqrt{2}\,E \sin\frac{\pi}{p}$ an, wie aus dem Vektordreieck des Bildes 7 abzulesen ist. Da im kurzgeschlossenen Kreise an Widerständen sich nur die Reaktanzen 2 X befinden, hat der Kurzschlußstrom k gegenüber der Spannung $(e_1 - e_2)$ eine Phasennacheilung von 90° und seine Amplitude beträgt $\frac{E\sqrt{2}}{X} \sin\frac{\pi}{p}$. Die Anodenströme selbst, die sich vom Kurzschlußstrom k nur durch Gleichstromanteile a und b unterscheiden, lassen sich durch

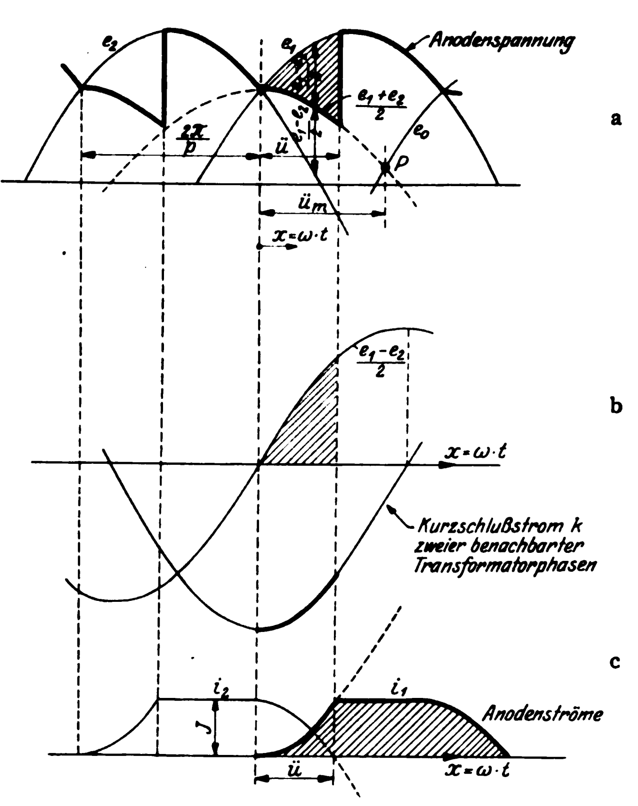


Bild 6. Anodenspannung und Anodenstrom des Mehrphasengleichrichters mit Steuerreaktanzen in den Sekundärphasen des Transformators.

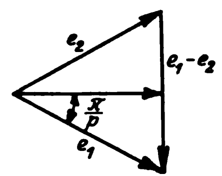


Bild 7. Vektordiagramm der Kurzschlußspannung $e_1 - e_2$.

$$i_1 = k + a$$
$$i_2 = -k + b$$

darstellen. a und b sind so zu bestimmen, daß im Zündpunkt der Phase 1 $i_1 = 0$ und $i_2 = J$ betragen.

Ist $x = \omega t$ die im Winkelmaß gemessene Zeitkoordinate, so wird also:

$$i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{X} \sin\frac{\pi}{p} \cdot (1 - \cos x)$$

$$i_2 = J - \frac{E\sqrt{2}}{X} \sin\frac{\pi}{p} \cdot (1 - \cos x).$$

Dieser Stromverlauf gilt nur bis der Strom i_2 Null wird, denn die Ventilwirkung der Anode verhindert ihn daran, negative Werte anzunehmen. Wird mit ü der Zeitpunkt bezeichnet, wo der Strom in Phase 2 den Wert Null erreicht, so gilt zur Bestimmung dieses Winkels die Gleichung

$$i_2 = J - \frac{E\sqrt{2}}{X} \sin\frac{\pi}{p} \cdot (1 - \cos ü) = 0.$$

ü heiße Überlappungswinkel und berechnet sich aus

$$\cos ü = 1 - \frac{JX}{E\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{p}} \quad \text{oder} \quad \sin\frac{ü}{2} = \sqrt{\frac{JX}{2E\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{p}}}. \tag{2}$$

Speziell wird für

$$p = 3 \qquad \cos ü = 1 - \frac{2XJ}{E\sqrt{6}}, \qquad \sin\frac{ü}{2} = \sqrt{\frac{JX}{E\sqrt{6}}},$$

$$p = 6 \qquad \cos ü = 1 - \frac{2XJ}{E\sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{ü}{2} = \sqrt{\frac{JX}{E\sqrt{2}}}.$$

Der Überlappungswinkel ü wächst mit zunehmender Belastung. Im Zeitpunkt ü hat Phase 1 den vollen Gleichstromwert J erreicht und brennt von da an bis zum Zünden der folgenden Anode allein weiter. Das Oszillogramm des Anodenstromes ist damit bekannt (Bild 6c) und die sich überlappenden Ströme i_1 und i_2 lassen sich schreiben

$$i_1 = J\frac{1-\cos x}{1-\cos ü} = J\,w(x),$$

$$i_2 = J[1 - w(x)].$$

Der Anodenstrom hat also unverändert den Scheitelwert J und den Mittelwert $\frac{J}{p}$. Sein Effektivwert A aber berechnet sich aus dem oszillographischen Verlauf des Bildes 6c durch Integration

$$2\pi A^2 = J^2\left[\int_0^ü w^2\,dx + \left(\frac{2\pi}{p} - ü\right) + \int_0^ü (1-w)^2\,dx\right]$$

$$= J^2\left[\frac{2\pi}{p} - 2\int_0^ü (w - w^2)\,dx\right]$$

oder

$$A = \frac{J}{\sqrt{p}}\sqrt{1 - p\,\psi(ü)}. \tag{3}$$

Der Gang der später oft wiederkehrenden Funktion

$$\psi(ü) = \frac{1}{\pi}\int_0^ü\left\{\left(\frac{1-\cos x}{1-\cos ü}\right) - \left(\frac{1-\cos x}{1-\cos ü}\right)^2\right\}dx$$

$$= \frac{(2+\cos ü)\sin ü - (1+2\cos ü)\,ü}{2\pi(1-\cos ü)^2}, \tag{4}$$

die sich für die Werte von ü zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genügend genau durch die Reihenentwicklung

$$\psi(ü) = \frac{2ü}{15\pi}\left(1 + \frac{ü^2}{84} + \ldots\right)$$

[ü im Bogenmaß]

darstellen läßt, ist in Kurvenblatt Bild 8 aufgezeichnet und nimmt fast linear mit ü zu. Dort sind ferner die Funktionen $\sqrt{1 - p\,\psi(ü)}$ für p = 2, 3 und 6 eingetragen. Die Gleichung (3) gibt für ü = 0 den in Kapitel 1 berechneten Wert und zeigt, daß das Verhältnis des effektiven Anodenstromes A zum Gleichstrom J eine Funktion von ü und p allein ist und mit wachsendem ü um so kleiner wird, je größer die Phasenzahl p ist.

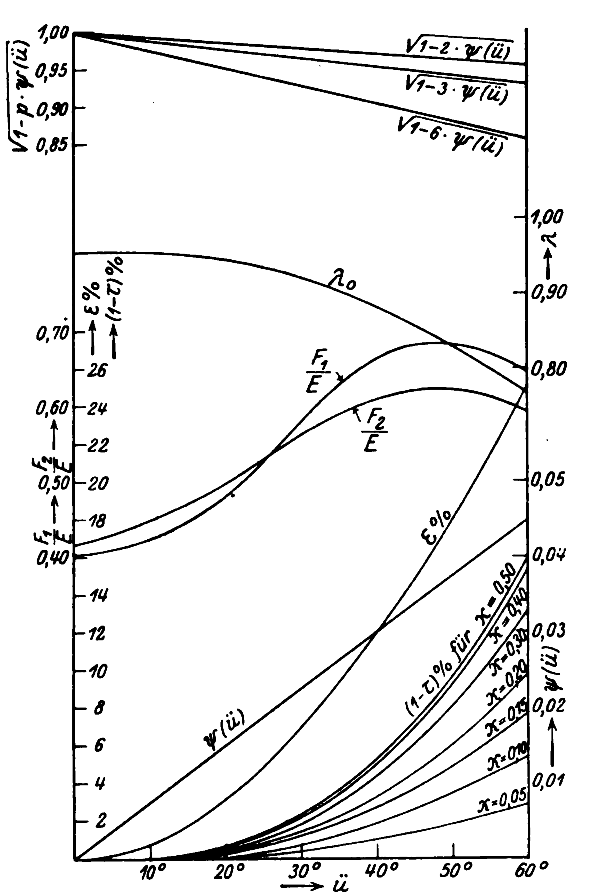


Bild 8. Gleichspannungsabfall ε, Saugdrosselspannungen $\frac{F_1}{E}$ und $\frac{F_2}{E}$, Reduktionsfaktor τ der Klemmenspannung, Leistungsfaktor λ_0 und die Funktionen $\psi(ü)$ und $\sqrt{1 - p\,\psi(ü)}$ in Abhängigkeit der Überlappung ü.

Primärstrom und Netzstrom. Unter den gleichen Annahmen über Magnetisierungsstrom und Übersetzungsverhältnis des Transformators wie im Kapitel 1, lassen sich die Oszillogramme der Primärströme und der Netzströme aus dem Verlauf des Anodenstromes (Bild 6c) konstruieren. Man kann dann ihre Effektivwerte berechnen, und es zeigt sich, daß deren Verhältnis zum Gleichstrom J in allen Fällen eine Funktion der Überlappung ü allein ist. Für zwei Fälle der Tabelle I wollen wir das im einzelnen durchführen:

Für den 6-Phasengleichrichter, ohne Saugdrosselspule, primär in Stern geschaltet — siehe Bild 3 — befolgen die Momentanwerte j_1, j_2, j_3 der Primärströme die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} i_1 - i_4 + j_1 &= j \\ i_3 - i_6 + j_2 &= j \\ i_5 - i_2 + j_3 &= j \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

j bedeutet darin die von Joch zu Joch über die Luft entfallende Amperewindungszahl der erzwungenen Magnetisierung. Da ferner

$$j_1 + j_2 + j_3 = 0$$

ist, berechnet sich

$$j = \frac{1}{3}\left[(i_1 - i_4) + (i_3 - i_6) + (i_5 - i_2)\right],$$

so daß

$$j_1 = -\frac{2}{3}(i_1 - i_4) + \frac{1}{3}(i_3 - i_6) + \frac{1}{3}(i_5 - i_2),$$

$$j_2 = +\frac{1}{3}(i_1 - i_4) - \frac{2}{3}(i_3 - i_6) + \frac{1}{3}(i_5 - i_2),$$

$$j_3 = +\frac{1}{3}(i_1 - i_4) + \frac{1}{3}(i_3 - i_6) - \frac{2}{3}(i_5 - i_2)$$

werden.

Unter Zugrundelegung des Oszillogrammes Bild 6c für p = 6 ergibt sich daraus für j und j_1 der Verlauf von Bild 9. Aus dem Bilde folgt der Effektivwert D der Primärströme j_1, j_2, j_3 — der hier bei Sternschaltung mit dem Effektivwert N der Netzströme übereinstimmt — durch Integration über die Halbwelle von 0 bis π

$$\pi\left(\frac{D}{J}\right)^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\left(\frac{\pi}{3} - ü\right),$$

$$+\int_0^{ü}\left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}w\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}w\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}w\right)^2\right]dx,$$

$$= \frac{2\pi}{9} - \frac{2}{3}\int_0^{ü}(w - w^2)\,dx$$

oder

$$\frac{D}{J} = \frac{N}{J} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1 - 3\,\psi(ü)}. \qquad (6)$$

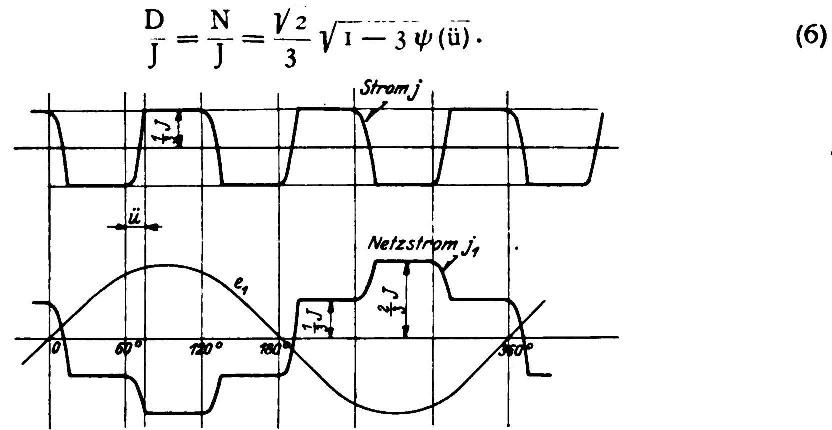


Bild 9. Verlauf der Ströme primärseitig beim 6-Phasengleichrichter ohne Saugdrosselspule mit in Stern geschalteter Primärwicklung.

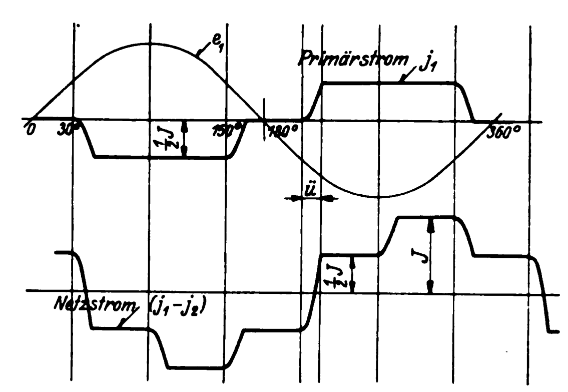


Bild 10. Verlauf der Ströme primärseitig beim 6-Phasengleichrichter mit Saugdrosselspule und mit in Dreieck geschalteter Primärwicklung.

Beim 6-Phasengleichrichter mit Saugdrosselspule und primär in Dreieck geschaltetem Transformator sind unter den gleichen Voraussetzungen wie in Kapitel 1 die Ampèrewindungen auf jedem Transformatorschenkel einzeln Null. Es werden also

$$j_1 = -i_1 + i_4, \qquad j_2 = -i_3 + i_6, \qquad j_3 = -i_5 + i_2.$$

Das führt für j_1 zum Oszillogramm Bild 10. Sein Effektivwert D muß danach $\sqrt{2}$ mal größer sein als der des Anodenstromes A. Man findet A aus Formel (3), indem man $p = 3$ und $\left(\frac{J}{2}\right)$ an Stelle von J einsetzt. Also

$$\frac{D}{J} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1 - 3\,\psi(ü)}.$$

Der Effektivwert N des Netzstromes berechnet sich aus dem Oszillogramm Bild 10 von $(j_1 - j_2)$. Die Durchführung der Integration analog wie im Beispiel der Sternschaltung ergibt

$$\frac{N}{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3\,\psi(\ddot{u})}.$$

Der Netzstrom ist also hier $\sqrt{3}$ mal größer als der Primärstrom, woraus rückwärts folgt, daß in j_1, j_2, j_3 die dritte, die neunte, allgemein die 3nte Oberwelle fehlen.

Die Gleichspannung. Im Überlappungsintervall ü treten an den Reaktanzen X die Spannungsabfälle $\frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ auf. Die Spannung zwischen dem Sternpunkt des Transformators und den brennenden Anoden, die sogenannte Anodenspannung, ist daher das arithmetische Mittel der zwei Phasenspannungen e_1 und e_2. Sie liegt um $\frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ tiefer als die Spannung e_1 und um den gleichen Betrag höher als e_2 (Bild 6a). Diese Erscheinung bewirkt auf der Gleichstromseite einen Spannungsabfall, der mit zunehmender Belastung größer wird. Der Mittelwert der Spannung an der Gleichstromdrosselspule ist wie in Kapitel 1 Null. Deswegen ist der Mittelwert der Gleichspannung inklusive Lichtbogenabfall auch jetzt noch gleich dem Mittelwert der Spannung zwischen dem Sternpunkt des Transformators und den brennenden Anoden. Die im Kapitel 1 berechnete Gleichspannung [Formel (1)] vermindert sich daher um die auf die Basis $\frac{2\pi}{p}$ reduzierte Höhe der in den Bildern 6a und 6b schraffierten Fläche, also um:

$$\frac{1}{\frac{2\pi}{p}} \int_0^{\ddot{u}} \frac{1}{2}(e_1 - e_2)\,dx = E\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}}\,\frac{1}{2}(1 - \cos\ddot{u})$$

oder in Teilen der Leerlaufspannung $E\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}}$ ist der Spannungsabfall

$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \cos\ddot{u}) = \sin^2\frac{\ddot{u}}{2}$ (aufgetragen in Bild 8).

Die Gleichspannung wird also

$$G = E\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2} \tag{7}$$

und speziell für

$$p = 3 \qquad G = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} E\sqrt{2}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2},$$

$$p = 6 \qquad G = \frac{3}{\pi} E\sqrt{2}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2}.$$

Das Verhältnis der Gleichspannung zur Leerlaufspannung ist unabhängig von der Phasenzahl, durch $\cos^2\frac{\ddot{u}}{2}$ gegeben, also eine Funktion von ü allein.

Die Transformatorscheinleistungen. Die Beanspruchung des Transformatoreisens bleibt unabhängig von der Belastung und stimmt überein mit der in Kapitel 1.



Die Streureaktanzen X ändern daran nichts. Maßgebend für die Kupferverluste ist der effektive Phasenstrom. Es ist daher etwa die Scheinleistung der Sekundärwicklung

$$P_{II} = p\,E\,\frac{J}{\sqrt{p}}\sqrt{1 - p\,\psi(\ddot{u})},$$

also auch eine Funktion der Überlappung ü. Bezieht man P_{II} auf die übertragene Gleichleistung P, die nun wegen des induktiven Gleichspannungsabfalles von ü abhängt,

$$P = G\,J = E\,J\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2},$$

so ist

$$\frac{P_{II}}{P} = \frac{\sqrt{\frac{p}{2}}}{\frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}}}\,\frac{\sqrt{1 - p\,\psi(\ddot{u})}}{\cos^2\frac{\ddot{u}}{2}}$$

bei gegebener Phasenzahl nur eine Funktion von ü. In gleicher Weise folgen für die verschiedenen Schaltungen aus den Effektivwerten des Primärstromes die Scheinleistungen P_I der Primärwicklung und ihr Verhältnis $\frac{P_I}{P}$ zur Gleichleistung.

Der Leistungsfaktor im Netz, gemessen an den Primärklemmen des Transformators, ist $\lambda_0 = \frac{\text{Gleichleistung}}{\text{Scheinleistung}}$. Ist K_0 der Effektivwert der primären Klemmenspannung des Transformators, so ist im Fall eines 3-Phasennetzes

$$\lambda_0 = \frac{P}{3\,\frac{K_0}{\sqrt{3}}\,N}, \tag{8}$$

denn wir nehmen ja an, daß primärseitig keine Spannungsabfälle auftreten, so daß K_0 auch bei Belastung seinen Wert beibehält. Beschränken wir uns auf die zwei Beispiele, für die wir die Netzströme N gerechnet haben, so ist für den 6-Phasengleichrichter ohne Saugdrosselspule, primär in Stern geschaltet

$$P = E\,J\,\frac{3\sqrt{2}}{\pi}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2},$$

$$\frac{K_0}{\sqrt{3}} = E,$$

$$N = J\,\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1 - 3\,\psi(\ddot{u})}.$$

Also

$$\lambda_0 = \frac{3}{\pi}\,\frac{\cos^2\frac{\ddot{u}}{2}}{\sqrt{1 - 3\,\psi(\ddot{u})}}. \tag{9}$$

Im Fall des 6-Phasengleichrichters mit Saugdrosselspule und primär in Dreieck geschaltetem Transformator ist

$$P = E J \frac{3\sqrt{6}}{2\pi} \cos^2 \frac{ü}{2}$$
$$K_0 = E$$
$$N = \frac{J}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - 3\psi(ü)}.$$

Also

$$\lambda_0 = \frac{3}{\pi} \frac{\cos^2 \frac{ü}{2}}{\sqrt{1 - 3\psi(ü)}}$$

gleich wie im ersten Fall.

Die Stromspannungscharakteristik, die die Gleichspannung G in Funktion des Gleichstromes darstellt, folgt durch Elimination von ü aus den beiden Gleichungen (2) und (7) und ist eine mit der Belastung abfallende Gerade.

$$G = E\sqrt{2} \frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \left[1 - \frac{J X}{2 E\sqrt{2} \sin\frac{\pi}{p}}\right] = E\sqrt{2} \frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} - \frac{J X}{\frac{2\pi}{p}} \tag{10}$$

speziell für

$$p = 3 \qquad G = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} E\sqrt{2} \left[1 - \frac{J X}{E\sqrt{6}}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} E\sqrt{2} - \frac{3}{2\pi} J X$$

$$p = 6 \qquad G = \frac{3}{\pi} E\sqrt{2} \left[1 - \frac{J X}{E\sqrt{2}}\right] = \frac{3}{\pi} E\sqrt{2} - \frac{3}{\pi} J X.$$

Das erste Glied rechts stellt jeweils die Leerlaufspannung dar, das zweite gibt den Spannungsabfall an. Der Spannungsabfall ist also um so größer, je größer die Netzfrequenz und die Phasenzahl p sind. Das ist ein weiterer Grund für die praktische Bedeutung der Saugdrosselspule. Sie reduziert den Gleichspannungsabfall für gleichen Vollaststrom auf den vierten Teil, da bei Betrieb mit Saugdrosselspule im Ausdruck für G bei $p = 3$ der Strom J durch $\frac{J}{2}$ zu ersetzen ist.

Der pro Transformatorphase auftretende effektive Kurzschlußstrom ist $\frac{E}{X}$. Bezeichnet man mit J_k den p-fachen Scheitelwert des Kurzschlußstromes einer Phase

$$J_k = \frac{p E \sqrt{2}}{X}$$

— er ist, wie wir zeigen werden, der ideelle Kurzschlußstrom im Gleichstromkreis — so läßt sich $\frac{E}{X}$ in Gleichung (2) durch J_k ausdrücken und man findet

$$\cos ü = 1 - \frac{p}{\sin\frac{\pi}{p}} \frac{J}{J_k}.$$

Im Falle, daß nur in den Sekundärphasen des Transformators Streureaktanzen X vorkommen, ist also bei gegebener Phasenzahl p die Überlappung ü allein eine Funktion des Verhältnisses $\frac{J}{J_k}$. Also gilt das Gleiche von allen Größen, die wir berechnet haben und die Funktionen von ü allein sind. Z. B. ist

$$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} \left[1 - \frac{p}{2\sin\frac{\pi}{p}} \frac{J}{J_k}\right].$$

Aber auch $\frac{A}{J_k}$ hängt nur von p und $\frac{J}{J_k}$ ab. So sind in dem Kurvenblatt Bild 11 ü, $\frac{G}{E\sqrt{2}}$ und $\frac{A}{J_k}$ für p = 2, 3 und 6 in Funktion von $\frac{J}{J_k}$ aufgetragen und durch Kurven dargestellt, die erhalten bleiben, welches auch die Werte von E und X seien.

Dieses Kurvenblatt, wie überhaupt die Ergebnisse dieses Kapitels gelten aber nicht bis zu beliebig großen Werten von ü. Es bezeichne in Bild 6a P den Schnittpunkt der Spannungskurven $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ und e_0 und $ü_m$ die Abszisse von P. Dann gelten die abgeleiteten Formeln nur so lange, als $ü < ü_m$ ist. Denn bei Werten $ü > ü_m$ würde im Punkte P die Phase e_0 zünden, bevor e_2 erlöscht, es würden also von $ü_m$ an gleichzeitig 3 Phasen brennen, was die Betrachtungen dieses Kapitels überschreitet. Wie sich die Strom- und Spannungsverhältnisse gestalten bei 3 und mehr gleichzeitig brennenden Phasen, wird später untersucht werden. Nach Bild 6a bestimmt sich $ü_m$ aus

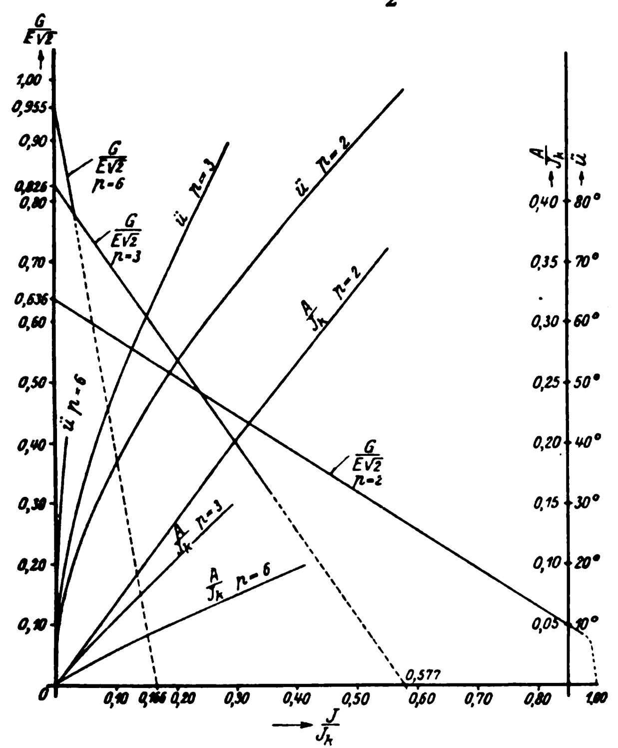


Bild 11. Überlappung ü, Gleichspannung $\frac{G}{E\sqrt{2}}$ und Effektivwert $\frac{A}{J_k}$ des Anodenstromes in Funktion der Belastung $\frac{J}{J_k}$ für den 2-, 3- und 6-Phasengleichrichter.

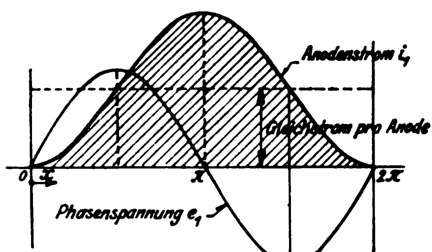


Bild 12. Anodenstrom eines Gleichrichters im vollkommenen stationären Kurzschluß.

$$\operatorname{tg} ü_m = \frac{\cos\frac{\pi}{p} - \cos\frac{3\pi}{p}}{\sin\frac{3\pi}{p}}$$

und man findet für

$$p = 6 \qquad \operatorname{tg} ü_m = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad ü_m = 40^0\,54',$$

$$p = 3 \qquad \operatorname{tg} ü_m = \infty \qquad ü_m = 90^0.$$

p = 3 entspricht auch dem 6-Phasengleichrichter mit Saugdrosselspule. Diese Werte für $ü_m$ werden wesentlich verändert, sobald auch auf der Primärseite des Transformators Reaktanzen vorhanden sind.

Die Berechnungen dieses Kapitels müßten nun spezialisiert werden auf die verschiedenen Fälle der Tabelle I. Wir sehen aber hier davon ab und schieben

diese Aufgabe hinaus auf das nächste Kapitel, wo wir zugleich die Reaktanzen primärseitig mitberücksichtigen werden. Was aber hier noch durchgeführt werden soll, ist die Berechnung des Kurzschlußstromes im Gleichstromnetz und die Berechnung der Saugdrosselspule.

Mit wachsender Belastung nimmt auch ü über $ü_m$ hinaus fortgesetzt zu und erreicht, wie wir später zeigen werden, im stationären, vollkommenen Kurzschluß den Wert 2π, d. h. jeder Anodenstrom brennt über das ganze Periodenintervall, also alle p-Ströme dauernd gleichzeitig und alle Anoden haben dauernd das gleiche Potential. Der Wechselanteil im Anodenstrom ist daher gleich dem stationären Kurzschlußstrom pro Phase vom Scheitelwert $\frac{E\sqrt{2}}{X}$. Um die Ventilbedingung an der Anode zu erfüllen, muß diesem ein Gleichstrom $\frac{E\sqrt{2}}{X}$ überlagert werden. Bild 12 ist daher das Oszillogramm des Anodenstromes im stationären vollkommenen Kurzschluß. Der totale Gleichstrom im Kurzschluß hat den p-fachen Wert

$$J_k = p\,\frac{E\sqrt{2}}{X},$$

von dem wir bereits oben Gebrauch gemacht haben.

Die Saugdrosselspule: In Bild 13 sind die Ordinaten der schraffierten Fläche die Spannungsdifferenz zwischen den Sternpunkten zweier um 180^0 phasenverschobener 3-Phasengleichrichter, deren brennende Anoden gleiches Potential haben. Diese Spannungsdifferenz ist eine reine Wechselspannung und enthält nur Wellen 3n-ter Netzfrequenz. Sie wird bei einem 6-Phasengleichrichter mit Saugdrosselspule gerade durch die Spannung an dieser balanciert.

Bild 13.
Verlauf der Spannung an der Saugdrosselspule.

Für die Dimensionierung des Eisens der Drosselspule ist maßgebend der Maximalwert des magnetischen Flusses oder bei bekannter Frequenz und Windungszahl der Mittelwert $\bar{F}$ der Spannung, gebildet über die positive Halbwelle.

Aus Bild 13b folgt dafür:

$$\frac{\pi}{3}\left(\frac{\bar{F}}{E\sqrt{2}}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,dx + \frac{1}{2}\sqrt{3}\int_0^{ü} \sin x\,dx \qquad \text{für } ü < \frac{\pi}{6}$$

und

$$\frac{\pi}{3}\left(\frac{\bar{F}}{E\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{ü} \cos x\,dx + \int_{ü-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,dx \qquad \text{für } ü > \frac{\pi}{6}$$

Die Auswertung der Integrale ergibt:

$$\frac{\bar{F}}{E} = \frac{6\sqrt{2}}{\pi}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \cos ü)\right] \qquad \text{für } ü < \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\bar{F}}{E} = \frac{6\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin ü - \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(1 - \cos ü)\right] \qquad \text{für } ü > \frac{\pi}{6}.$$

Oder, falls man unter $F_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\bar{F}$ den Effektivwert derjenigen Sinusspannung versteht, die das Eisen gleich beansprucht wie $\bar{F}$, so ist auch

$$\frac{F_1}{E} = 3\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \cos ü)\right] \qquad \text{für } ü \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{F_1}{E} = 3\left[\frac{1}{2}\sin ü - \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \cos ü)\right] \qquad \text{für } \frac{\pi}{6} \leq ü \leq \frac{\pi}{3}.$$

Außer diesem für die Dimensionierung des Eisens maßgebenden Spannungswerte F_1 ist noch der der Messung direkt zugängliche quadratische Mittelwert oder Effektivwert F_2 der Drosselspannung von Bedeutung.

Nach Bild 13b ist

$$\frac{\pi}{3}\left(\frac{F_2}{E\sqrt{2}}\right)^2 = \int_0^{a}\left[\frac{1}{2}\cos x\right]^2 dx + \int_{-\frac{\pi}{6}+a}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\, dx,$$

woraus sich für den ganzen Bereich von ü ergibt

$$\frac{F_2}{E} = \sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\left[2(1 + \cos 2ü) + \sqrt{3}\,(2ü - \sin 2ü)\right]}.$$

Die Funktionen $\frac{F_1}{E}$ und $\frac{F_2}{E}$ sind im Kurvenblatt Bild 8 dargestellt.

Die Annahme einer Saugdrosselspule unendlich großer Induktivität ist praktisch nicht realisierbar. Es fragt sich, mit was für Umständen wir zu rechnen haben, wenn die Eigenreaktanz jeder Spulenhälfte den endlichen, wenn auch großen Wert S, die ganze Spule also die Reaktanz 4 S hat. Die Leerlaufspannung muß die des 6-Phasengleichrichters sein, also $\frac{3}{\pi}E\sqrt{2}$. Für ganz kleine Belastungen, wo abwechslungsweise eine oder zwei Anoden gleichzeitig brennen, folgt der Spannungsabfall der Gleichung (10) für $p = 6$, nur geht der Kurzschlußstrom zweier sich überlappender Phasen nicht bloß über die Streureaktanzen 2 X, sondern damit in Serie auch über die Reaktanz 4 S der Saugdrosselspule. Es ist also für kleine Werte von J

$$G = \frac{3}{\pi}E\sqrt{2} - \frac{3}{2\pi}(2X + 4S)J.$$

Wegen der Größe von S bedeutet das einen sehr steilen Abfall der Spannung. Für große Werte von J gilt die Charakteristik des Dreiphasen-Gleichrichters, wenn an Stelle von J der Wert $\frac{J}{2}$ gesetzt wird, also

$$G = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}E\sqrt{2} - \frac{3}{4\pi}JX.$$

Ohne genauere Überlegung ist nicht zu sagen, wie der Übergang von der ersten zur zweiten Charakteristik vor sich geht. Der Versuch und die spätere theoretische Betrachtung der Betriebszustände, wo 3 und mehr Phasen gleichzeitig brennen, zeigt, daß die erste Gerade gilt bis zum Schnittpunkt mit der zweiten und die zweite von diesem Schnittpunkt an, so daß die Charakteristik verläuft nach

Bild 14, d. h. die Spannung fällt vom Leerlaufwert $\frac{3}{\pi} E \sqrt{2} = 0{,}955\, E \sqrt{2}$ sehr steil ab und erreicht für die noch immer kleine Stromstärke J_s im Schnittpunkt praktisch den Leerlaufwert $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} E \sqrt{2} = 0{,}826\, E \sqrt{2}$ des Dreiphasengleichrichters. Von da an gilt die Charakteristik des 3-Phasenbetriebes. Für J_s muß gelten

$$\frac{3}{\pi} E \sqrt{2} - \frac{3}{2\pi}(2X + 4S) J_s = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} E \sqrt{2} - \frac{3}{4\pi} X J_s$$

oder

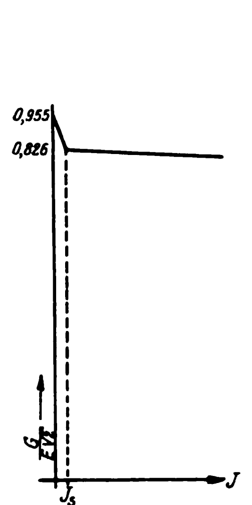


Bild 14. Strom- und Spannungscharakteristik eines 6-Phasengleichrichters mit Saugdrosselspule.

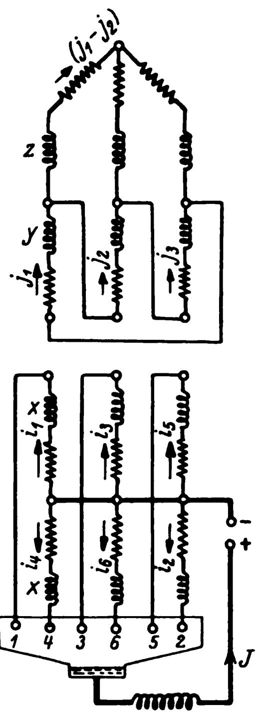


Bild 15. 6-Phasengleichrichter ohne Saugdrosselspule, mit primär in Dreieck geschalteter Transformatorwicklung und Streureaktanzen in allen Transformatorphasen und im Netz.

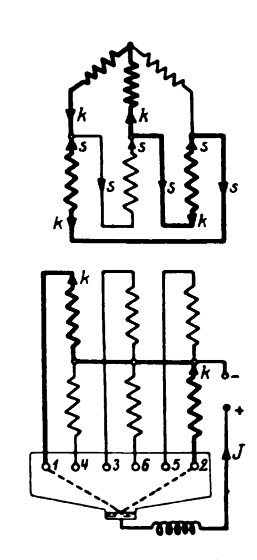


Bild 16. Stromverlauf während der Überlappung der Phasen 1 und 2.

$$(2 - \sqrt{3}) E \sqrt{2} = \left(4S + \frac{3}{2} X\right) J_s .$$

Vernachlässigt man $\frac{3}{2} X$ gegenüber $4S$, so folgt

$$4S = (2 - \sqrt{3}) \frac{E\sqrt{2}}{J_s} = 0{,}379 \frac{E}{J_s} .$$

Damit sind die Unterlagen für die Berechnung der Drosselspule gegeben, denn die Kupferquerschnitte der Wicklung sind für den halben Gleichstrom $\frac{J}{2}$ bei Vollast zu bemessen.

3. Berücksichtigung der Reaktanzen primärseitig und im Netz.

Wir betrachten sogleich einen bestimmten Fall: den 6-Phasengleichrichter ohne Saugdrosselspule und mit primär in Dreieck geschalteter Transformatorwicklung (Bild 15). Das Übersetzungsverhältnis sei 1 : 1, der Generator dreiphasig in Stern geschaltet.

Anodenstrom. Die Anode 2 brenne allein, dann fließt über sie der durch die unendlich große Kathodendrosselspule konstant gehaltene Gleichstrom J. Er hat weder an den Reaktanzen X in den Sekundärphasen des Transformators, noch an den neu hinzugekommenen Y und Z in den Primär- bzw. den Generatorphasen Spannungsabfälle zur Folge. Die Spannungen der Anoden zum Sternpunkte verlaufen daher in Zeitintervallen, wo nur eine Anode brennt — trotz Y und Z gleich wie im Leerlauf. Die Phase 1 wird folglich unverändert im Schnittpunkt der zwei Leerlaufs-Phasenspannungen e_1 und e_2 — vom Scheitelwerte $E\sqrt{2}$ — zünden, also beim 6-Phasengleichrichter 60° nach Beginn der positiven Halbwelle ihrer Spannung. Vom Zündpunkte an sind die 2 Anoden kurzgeschlossen, und es fließt wieder unter dem Einfluß der Differenzspannung $e_1 - e_2$ der Kurzschlußstrom k, aber diesmal wird er nicht allein begrenzt durch die Reaktanz 2 X sekundärseitig, denn der durch die Magnetisierungsbedingungen geforderte Gegenstrom zu k auf der Primärseite hat in Y und Z Spannungsabfälle zur Folge, die die Feldspannungen des Transformators herabsetzen. Welches ist die resultierende Reaktanz, die k limitiert? Wegen der vorausgesetzten vollkommenen magnetischen Leitfähigkeit des Eisens muß die Differenz der Primär- und Sekundärströme auf allen 3 Transformatorschenkeln in jedem Momente bekanntlich den gleichen Wert j haben. [Vergleiche die Formeln (5) von Kapitel 2.] Während der Überlappung der Phasen 1 und 2 heiße $j = s$. Die Stromverteilung primärseitig ist dann die des Schemas Bild 16. Im Dreieck herum fließt der Strom s und in den Phasen 1 und 3 ihm überlagert der über das Netz sich schließende Gegenstrom $-k$. In den Bezeichnungen des Bildes 15 ist also $j_1 = j_3 = -k + s$ und $j_2 = s$.

Die Hauptanteile der magnetischen Flüsse in den 3 Schenkeln schließen sich durch die Joche. Sie haben in jedem Moment die Summe Null. Ein für jeden Schenkel gleicher Nebenanteil, nämlich der Jochstreufluß, geht von Joch zu Joch durch die Luft. Die Hauptanteile induzieren in den Sekundärphasen 1, 3, 5 und in den Primärphasen 1, 2, 3 richtig bezogen die Feldspannungen f_1, f_2, f_3, in den Sekundärphasen 4, 6, 2 aber $-f_1$, $-f_2$, $-f_3$. Es gilt in jedem Moment die Beziehung $f_1 + f_2 + f_3 = 0$.

Die Nebenanteile der Schenkelflüsse haben pro Phase Reaktanzspannungsabfälle zur Folge, die sich $S_0 \frac{dj}{dx}$ schreiben lassen. S_0 ist also die Reaktanz pro Phasenwicklung gegenüber dem Strome j. In abgekürzter Schreibweise — wir setzen in der Folge nun immer s, k etc. an Stelle von $\frac{ds}{dx}, \frac{dk}{dx}$ etc. — resultiert aus der Anwendung der 2. Kirchhoffschen Regel auf die geschlossenen Strombahnen sekundärseitig und im Netz

$$f_1 + f_3 = 2 S_0 s + 2 X k \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 - e_1 &= S_0 s + Y(-k + s) + Z(-k) \\ f_2 - e_3 &= S_0 s + Y s + 2 Z k \\ f_3 - e_5 &= S_0 s + Y(-k + s) + Z(-k) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

e_1, e_2 etc. bis e_6 sind die sekundären Phasenspannungen des Transformators im Leerlauf, e_1, e_3, e_5 also die verketteten EMKe des Generators.

Da $e_1 + e_3 + e_5 = 0$ ist, folgt durch Addition der 3 letzten Gleichungen

$$s = \frac{2}{3} \frac{k}{1 + \frac{S_0}{Y}}.$$

Andererseits ist

$$f_1 + f_3 - (e_1 + e_5) = 2(S_0 + Y)s - 2(Y + Z)k.$$

f_1 und f_3 aus der ersten Gleichung eingesetzt:

$$\frac{1}{2}(e_1 + e_5) = (X + Y + Z)k - Ys.$$

Hierin der obige Wert von s eingeführt liefert

$$k\left(X + Y + Z - \frac{2}{3}\frac{Y}{1 + \frac{S_0}{Y}}\right) = \frac{1}{2}(e_1 + e_5).$$

Damit ist k und folglich auch das Oszillogramm des Anodenstromes bestimmt. Es ist gegenüber Kapitel 2 unverändert, nur tritt in der Formel für die Überlappung ü an Stelle von X die Reaktanz $X + Y + Z - \frac{2}{3}\frac{Y}{1 + \frac{S_0}{Y}}$, so daß also nach Formel (2) für $p = 6$ ohne Saugdrosselspule und in Dreieck geschalteter Primärwicklung gilt

$$\cos ü = 1 - \left[X + \left(1 - \frac{2}{3}a\right)Y + Z\right]\frac{2J}{E\sqrt{2}}, \tag{13}$$

falls wir unter a verstehen $\frac{1}{1 + \frac{S_0}{Y}}$.

Der Effektivwert A des Anodenstromes berechnet sich aus ü gleich wie in Kapitel 2 nach Formel (3).

Primärstrom und Netzstrom. Deren Oszillogramme ergeben sich aus dem Verlauf der Anodenströme. Allgemein folgt aus den Magnetisierungsbedingungen und an Hand von Bild 15

$$j_1 = -(i_1 - i_4) + j$$
$$j_2 = -(i_3 - i_6) + j$$
$$j_3 = -(i_5 - i_2) + j.$$

Die 2. Kirchhoffsche Regel liefert in Verallgemeinerung der Gleichungen (12)

$$\left.\begin{aligned} f_1 - e_1 &= S_0 j + Y j_1 + Z(j_1 - j_2) - Z(j_3 - j_1) \\ f_2 - e_3 &= S_0 j + Y j_2 + Z(j_2 - j_3) - Z(j_1 - j_2) \\ f_3 - e_5 &= S_0 j + Y j_3 + Z(j_3 - j_1) - Z(j_2 - j_3) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Durch ihre Addition ergibt sich wegen $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ und $e_1 + e_3 + e_5 = 0$

$$j = -\frac{Y}{S_0}\cdot\frac{1}{3}(j_1 + j_2 + j_3). \tag{15}$$

Setzt man hierin die obigen Ausdrücke für j_1, j_2, j_3 ein, so berechnet sich der Strom j endgültig zu

$$j = \frac{a}{3}[(i_1 - i_4) + (i_3 - i_6) + (i_5 - i_2)]. \tag{16}$$

Damit ist nun auch das Oszillogramm des Primärstromes bestimmt

$$j_1 = -(i_1 - i_4) + \frac{a}{3}[(i_1 - i_4) + (i_3 - i_6) + (i_5 - i_2)].$$

Vgl. Bild 17. Aus ihm bestimmt sich sein Effektivwert D

$$\pi\left(\frac{D}{J}\right)^2 = \int_0^{ü}\left\{\left[-\frac{a}{3} + \frac{2a}{3}w(x)\right]^2 + \left[\frac{a}{3} + \left(1 - \frac{2a}{3}\right)w(x)\right]^2 + \left[\left(1 - \frac{a}{3}\right) - \left(1 - \frac{2a}{3}\right)w(x)\right]^2\right\}dx$$
$$+ \left[\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right]\left(\frac{\pi}{3} - ü\right).$$

$$\frac{D}{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a^2\right) - 6\left(1 - \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}a^2\right)\psi(ü)}.$$

$\frac{D}{J}$ hängt nun nicht mehr von der Überlappung ü allein ab. Da S_0 im allgemeinen gegen Y überwiegt, liegt a in der Nähe von Null und $\frac{D}{J}$ ist angenähert gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-6\,\psi(\ddot{u})}$. Ist umgekehrt $\frac{S_0}{Y}$ sehr klein, so wird $a = 1$ und $\frac{D}{J}$ stimmt überein — wie es sein muß — mit seinem Werte $\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-3\,\psi(\ddot{u})}$ im Fall der Sternschaltung [vgl. Kap. 2 Formel (6)]. Der Strom im Netz

$$j_1 - j_2 = -(i_1 - i_4) + (i_3 - i_6)$$

hat das Oszillogramm Bild 17, und sein Effektivwert $\frac{N}{J}$ ist unabhängig von a, wieder eine Funktion von ü allein.

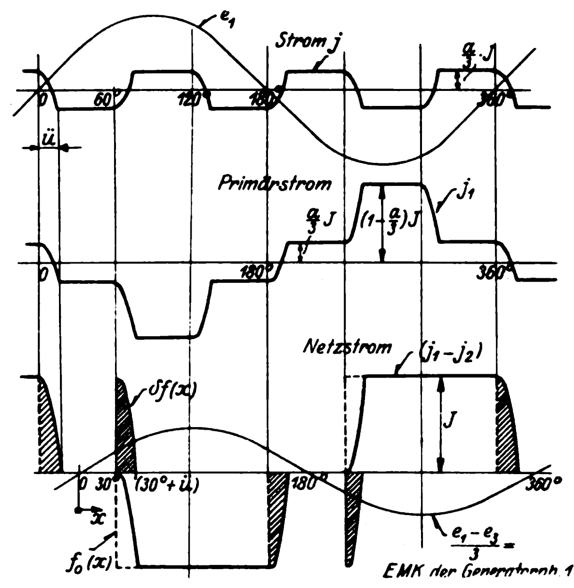


Bild 17. Verlauf der Ströme primärseitig beim 6-Phasengleichrichter ohne Saugdrosselspule mit primär in Dreieck geschalteter Transformatorwicklung.

Die Gleichspannung. Im Überlappungsintervall der Anoden 1 und 2 wird nach Gleichung (11) die Spannung $f_1 + f_3$ durch die Spannungsabfälle in den Reaktanzen X und S_0 balanciert. Die Spannung zwischen Sternpunkt der Sekundärwicklung und brennenden Anoden ist daher

$$f_1 - \frac{1}{2}(f_1 + f_3) =$$

$$-f_3 + \frac{1}{2}(f_1 + f_3) = \frac{1}{2}(f_1 - f_3)\,.$$

Nach den Gleichungen (12) ist aber

$$\frac{1}{2}(f_1 - f_3) = \frac{1}{2}(e_1 - e_5) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

in Übereinstimmung mit dem Werte von Kapitel 2. Folglich bleiben auch die reduzierte Gleichspannung $\frac{G}{E\sqrt{2}}$ und der Spannungsabfall ε in ihrer Abhängigkeit von der Überlappung ü unverändert bestehen.

Die Transformatorscheinleistungen. Für den Maximalwert des magnetischen Flusses pro Schenkel ist maßgebend der Mittelwert f aus der Summe der Feldspannung f_1 und der Jochstreuspannnng $(-S_0 j)$, gebildet über ihre positive Halbwelle. Nach Gleichung (14) ist die total pro Schenkel induzierte Spannung:

$$f_1' = f_1 - S_0 j = e_1 + Y j_1 + Z(2 j_1 - j_2 - j_3)\,.$$

Die Oszillogramme der Ströme j_1 und $(2 j_1 - j_2 - j_3)$ sind in den Bildern 17 und 18 eingetragen. Der gesuchte Mittelwert

$$f = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_1'\,dx$$

wird danach

$$f = \bar{e}_1 + \frac{1}{\pi} Y \int_0^\pi \frac{d j_1}{dx} dx + \frac{1}{\pi} Z \int_0^\pi \frac{d}{dx} (2 j_1 - j_2 - j_3) dx$$

$$= \bar{e}_1 + \frac{1}{\pi} Y [j_1]_0^\pi + \frac{1}{\pi} Z [2 j_1 - j_2 - j_3]_0^\pi$$

$$= \bar{e}_1 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{3} Y + Z \right) 2 J .$$

Im Leerlauf ist $f = e_1 = \frac{2}{\pi} E \sqrt{2}$. Der Faktor

$$\sigma = 1 - \left(\frac{a}{3} Y + Z \right) \frac{J}{E \sqrt{2}}$$

gibt also an, wievielmal kleiner die Beanspruchung des Eisens bei Belastung als im Leerlauf ist. Die Ableitung gilt nur so lange, als f_1 zwischen 0 und π keine Nullstelle hat. Dies kann aber nie eintreten, denn im Intervall 0 bis ü hat f_1' infolge

$$j_1 = \frac{a}{3} J - \frac{2 a}{3} J \frac{1 - \cos x}{1 - \cos ü} ;$$

$$\frac{d j_1}{dx} = - \frac{2 a}{3} J \frac{\sin x}{1 - \cos ü}$$

$$2 j_1 - j_2 - j_3 = J - 2 J \frac{1 - \cos x}{1 - \cos ü} ;$$

$$\frac{d}{dx} (2 j_1 - j_2 - j_3) = - 2 J \frac{\sin x}{1 - \cos ü}$$

den Wert

$$f_1' = e_1 - \left(\frac{a}{3} Y + Z \right) 2 J \frac{\sin x}{1 - \cos ü} .$$

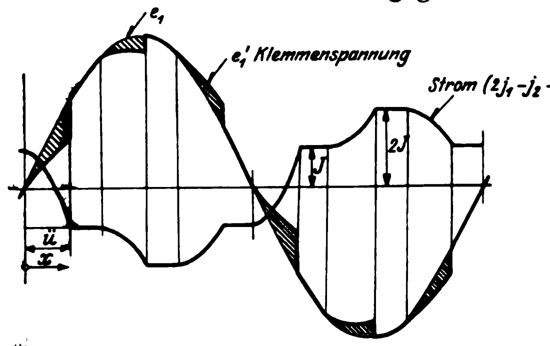


Bild 18. Verlauf der Ströme und Spannungen zur Berechnung der Beanspruchung des Transformatoreisens im Fall des 6-Phasengleichrichters ohne Saugdrosselspule mit primär in Dreieck geschalteter Transformatorwicklung.

Berücksichtigt man Gleichung (13), so ergibt sich schließlich

$$f_1' = E \sqrt{2} \sin x \frac{X + (1 - a) Y}{X + \left(1 - \frac{2}{3} a\right) Y + Z} .$$

Da a höchstens Eins sein kann, ist f_1' stets positiv.

Die Beanspruchung des Transformatorkupfers ist bekannt, da wir die Effektivwerte von Anodenstrom und Primärstrom berechnet haben. Definieren wir die Scheinleistungen primär und sekundär als Leerlaufspannung mal Vollaststrom, so sind die Faktoren $\frac{P_I}{P}$ und $\frac{P_{II}}{P}$ gegenüber Kapitel 2 insofern verändert, als für $\frac{P_I}{P}$ an Stelle einer Funktion von ü nun eine Funktion von a und ü tritt. Wird aber nach der tatsächlichen kVA-Zahl bei Vollast gefragt, so sind die aus Leerlaufspannung und Vollaststrom gerechneten Verhältniszahlen $\frac{P_I}{P}$ und $\frac{P_{II}}{P}$ jeweilen noch mit dem Faktor σ zu multiplizieren. Von großer Bedeutung ist aber diese Korrektur nicht, denn allerdings wird der Maximalwert des Flusses pro Schenkel im Verhältnis σ kleiner, aber anderseits haben die Reaktanzen Oberwellen in der zeitlichen Änderung der magnetischen Induktion zur Folge, welche die Wirbelstromverluste vergrößern. Für die Dimensionierung wird es sich empfehlen, wenn nicht ungewöhnlich große Reaktanzen im Spiele sind, die Korrektur σ zu vernachlässigen.



Der Leistungsfaktor im Netz ändert sich gegenüber seinem Werte in Kapitel 2, denn der Effektivwert K der Klemmenspannung des Transformators primärseitig verkleinert sich gegenüber dem Werte K_0 im Leerlauf, der hier gleich E ist, um die Spannungsabfälle des Netzstromes in den Reaktanzen Z. Diese Klemmenspannung z. B. an der Phase 1 läuft offenbar nach

$$e_1' = e_1 + Z(2j_1 - j_2 - j_3),$$

so daß

$$\pi K^2 = \int_0^\pi \{e_1 - Z[2j_1 - j_2 - j_3]\}^2 dx.$$

Das Oszillogramm von e_1' sowie das des Stromes in der eckigen Klammer sind in Bild 18 eingetragen. Wie schon früher ermittelt wurde, läßt sich im Intervall 0 bis ü der Spannungsabfall an den Reaktanzen Z auf die Form

$$Z \frac{2J}{1 - \cos ü} \sin x$$

bringen. Nennt man $\frac{JZ}{E\sqrt{2}(1 - \cos ü)} = \varkappa$, so läßt sich der Beitrag zu πK^2 der 2 Intervalle 0 bis ü und ü bis $\frac{\pi}{3}$ auch schreiben

$$\int_0^ü (E\sqrt{2}\sin x - 2\varkappa E\sqrt{2}\sin x)^2 dx + \int_ü^{\frac{\pi}{3}} (E\sqrt{2}\sin x)^2 dx.$$

Für die Intervalle $\frac{\pi}{3}$ bis $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$ bis π folgen analoge Ausdrücke. Verlegt man den Ursprung von x jeweilen an den Anfang des betreffenden Intervalls, also nach $\frac{\pi}{3}$ bzw. $\frac{2\pi}{3}$, so findet man

$$\pi\left(\frac{K}{E\sqrt{2}}\right)^2 = (1 - 2\varkappa)^2 \int_0^ü \sin^2 x\, dx + \int_ü^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, dx$$

$$+ \int_0^ü \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \varkappa \sin x\right]^2 dx + \int_ü^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx$$

$$+ \int_0^ü \left[\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \varkappa \sin x\right]^2 dx + \int_ü^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) dx,$$

oder nach Potenzen von $\varkappa$ geordnet

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] dx$$

$$- \varkappa \int_0^ü \left[4\sin^2 x + 2\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin x \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] dx$$

$$+ 6\varkappa^2 \int_0^ü \sin^2 x\, dx.$$

Das erste Integral ist nichts anderes als $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$, das zweite läßt sich wegen

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin x$$

reduzieren auf $-6\varkappa \int\limits_0^{ü} \sin^2 x\,dx$, so daß

$$\pi\left(\frac{K}{E\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2} - 6\varkappa(1 - K)\left(-\frac{1}{4}\sin 2ü + \frac{ü}{2}\right)$$

oder da bei Dreieckschaltung $E = K_0$ die Klemmenspannung im Leerlauf ist, wird

$$\tau = \frac{K}{K_0} = \sqrt{1 - \frac{3}{\pi}\varkappa(1 - \varkappa)(2ü - \sin 2ü)}\,. \tag{17}$$

Nach Formel (13) ist darin

$$\varkappa = \frac{JZ}{E\sqrt{2}\,(1 - \cos ü)} = \frac{Z}{2\left[X + (1 - \frac{2}{3}a)Y + Z\right]}$$

eine nur von den Reaktanzen abhängige Konstante.

Der Leistungsfaktor im Netz schreibt sich folglich analog der Formel (8)

$$\lambda = \frac{P}{3\frac{K}{\sqrt{3}}N} = \frac{P}{\sqrt{3}\,K_0 N}\cdot\frac{1}{\tau}\,.$$

Da weder die Wattleistung P noch der effektive Netzstrom N sich gegenüber Kapitel 2 geändert haben, ist in Übereinstimmung mit Formel (9) Kapitel 2 zu setzen

$$\frac{P}{\sqrt{3}\,K_0 N} = \lambda_0 = \frac{3}{\pi}\,\frac{\cos^2\frac{ü}{2}}{\sqrt{1 - 3\psi(ü)}}\,.$$

Die Rechnungen, die wir hier ausführlich wiedergegeben haben für den Fall des 6-Phasengleichrichters ohne Saugdrosselspule mit in Dreieck geschalteter Primärwicklung wurden ebenso durchgeführt für die 3 andern 6-Phasen-Schaltungen der Tabelle 1.

Die Ergebnisse sind für alle 4 Schaltungen in der Tabelle II zusammengetragen. Die unwesentliche Beschränkung, daß das Übersetzungsverhältnis ν des Transformators gleich eins sei, ist fallen gelassen. Bedeuten auch dann noch E die sekundäre Phasenspannung, K_0 die primäre Klemmenspannung des leerlaufenden Transformators, so ist $\nu = \frac{K_0}{E\sqrt{3}}$ für die 2 Fälle mit sterngeschalteter Primärwicklung und $\nu = \frac{K_0}{E}$ für die 2 Fälle mit Dreieckschaltung. Y und Z sind dann die auf den Sekundärkreis reduzierten Primärreaktanzen, nämlich

$$Y = \frac{1}{\nu^2}Y_1, \qquad Z = \frac{1}{\nu^2}Z_1\,.$$

Y_1 und Z_1 bedeuten die wahren Werte dieser Reaktanzen.

Auch S_0, die Phasenreaktanz der erzwungenen Magnetisierung, ist auf die Sekundärseite bezogen einzuführen. An Stelle von D und N treten in den Formeln, die wir abgeleitet haben, νD und νN.



In den Kurvenblättern Bilder 19 und 20 sind für die 4 Hauptschaltungen des 6-Phasengleichrichters $\frac{A}{J}$, $\frac{\nu D}{J}$, $\frac{\nu N}{J}$, $\frac{G}{E\sqrt{2}}$, $\frac{P_I}{P}$, $\frac{P_{II}}{P}$ als Funktionen von ü bzw. von ü und $a = \frac{1}{1 + \frac{S_0}{Y}}$ aufgetragen. Die im Kapitel 2 eingeführten und in Bild 8 dargestellten Funktionen von ü, nämlich ε in %, $\lambda_0 = \lambda\tau$, $\frac{F_1}{E}$ und $\frac{F_2}{E}$ gelten unverändert

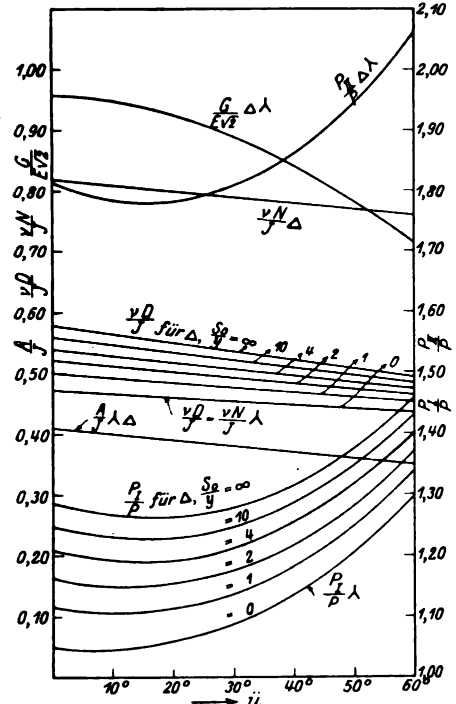


Bild 19. 6-Phasengleichrichter ohne Saugdrosselspule. Gleichspannung $\frac{G}{E\sqrt{2}}$, Effektivwerte von Anodenstrom $\frac{A}{J}$, Primärstrom $\frac{\nu D}{J}$, Netzstrom $\frac{\nu N}{J}$ und die Scheinleistungen $\frac{P_I}{P}$, $\frac{P_{II}}{P}$ in Abhängigkeit der Überlappung ü.

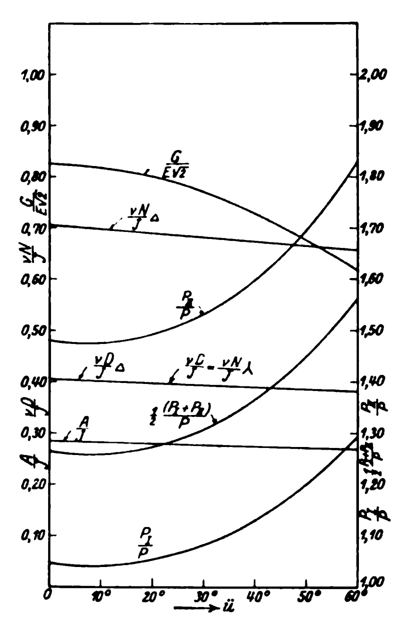


Bild 20. 6-Phasengleichrichter mit Saugdrosselspule. Gleichspannung $\frac{G}{E\sqrt{2}}$, Effektivwerte von Anodenstrom $\frac{A}{J}$, Primärstrom $\frac{\nu D}{J}$, Netzstrom $\frac{\nu N}{J}$ und die Scheinleistungen $\frac{P_I}{P}$, $\frac{P_{II}}{P}$, $\frac{1}{2}\frac{P_I+P_{II}}{P}$ in Abhängigkeit der Überlappung ü.

auch bei Anwesenheit von Primärreaktanzen S_0, Y und Z. Der Reduktionsfaktor τ ist in Bild 8 ebenfalls eingetragen.

Auffallend ist, wie die auf die Wattleistung bezogenen Scheinleistungen (Leerlaufspannung mal Vollaststrom) $\frac{P_I}{P}$ und $\frac{P_{II}}{P}$ zuerst leicht abnehmen und erst dann anwachsen. Mit zunehmender Überlappung verbessert sich die Kurvenform der Ströme, der Gleichspannungsabfall aber wächst zugleich. Der erste Einfluß steckt im Zähler der Form $\sqrt{A - B\,\psi(ü)}$ und bedingt die anfängliche Abnahme, der zweite im Nenner $\cos^2\frac{ü}{2}$ und bedingt den darauffolgenden Anstieg der Quotienten $\frac{P_I}{P}$ und $\frac{P_{II}}{P}$. Der Leistungsfaktor für Z = 0 zeigt aus den gleichen Gründen den reziproken Verlauf. Der Gleichspannungsabfall $(G_0 - G)$ von Leerlauf bis Belastung ist direkt

Tabelle II.

Strom-Spannungsverhältnisse für vier Hauptschaltungen des 6-Phasengleichrichters bei Berücksichtigung der Streureaktanzen in sämtlichen Transformatorphasen und im speisenden Netz. Unendlich große Drosselspule im Gleichstromkreis.

Schaltung				
$\cos \ddot{u}$	$1 - \frac{2\left[\frac{2}{3}S_0 + X + \frac{1}{3}(Y+Z)\right]J}{E\sqrt{2}}$	$1 - \frac{2\left[X + \left(1-\frac{2}{3}a\right)Y + Z\right]J}{E\sqrt{2}}$	$1 - \frac{(X+Y+Z)J}{E\sqrt{6}}$	$1 - \frac{[X+Y+3Z]J}{E\sqrt{6}}$
$\sin^2 \frac{\ddot{u}}{2}$	$\frac{\left[\frac{3}{2}S_0 + X + \frac{1}{3}(Y+Z)\right]J}{E\sqrt{2}}$	$\frac{\left[X + \left(1-\frac{2}{3}a\right)Y + Z\right]J}{E\sqrt{2}}$	$\frac{(X+Y+Z)J}{2E\sqrt{6}}$	$\frac{[X+Y+3Z]J}{2E\sqrt{6}}$
$\mathrm{tg}\, \ddot{u}_m$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\frac{2}{3}S_0 + X + \frac{1}{3}(Y+Z)}{S_0 + X}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{X + \left(1-\frac{2}{3}a\right)Y + Z}{X + \left(1-\frac{2}{3}a\right)Y}$	$\ddot{u}_m = 60^0$	$\ddot{u}_m = 60^0$
$\frac{G_0}{E}$	$\frac{3\sqrt{2}}{\pi} = 1{,}350\ldots$	$\frac{3\sqrt{2}}{\pi} = 1{,}350\ldots$	$\frac{3\sqrt{6}}{2\pi} = 1{,}170\ldots$	$\frac{3\sqrt{6}}{2\pi} = 1{,}170\ldots$
$\frac{G}{E\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\pi}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2}$	$\frac{3}{\pi}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2}$	$\frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2}$	$\frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\frac{\ddot{u}}{2}$
$G_0 - G$	$\frac{3}{\pi}\left[\frac{2}{3}S_0 + X + \frac{1}{3}(Y+Z)\right]J$	$\frac{3}{\pi}\left[X + \left(1-\frac{2}{3}a\right)Y + Z\right]J$	$\frac{3}{4\pi}(X+Y+Z)J$	$\frac{3}{4\pi}(X+Y+3Z)J$
$\frac{A}{J}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-6\psi(\ddot{u})}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-6\psi(\ddot{u})}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{1-3\psi(\ddot{u})}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{1-3\psi(\ddot{u})}$

$\frac{\nu D}{J}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-3\psi(ü)}$	[1]	$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-3\psi(ü)}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-3\psi(ü)}$
$\frac{\nu N}{J}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-3\psi(ü)}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-3\psi(ü)}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-3\psi(ü)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-3\psi(ü)}$
$\frac{P_{II}}{P}$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1-6\psi(ü)}}{\cos^2\frac{ü}{2}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1-6\psi(ü)}}{\cos^2\frac{ü}{2}}$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1-3\psi(ü)}}{\cos^2\frac{ü}{2}}$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1-3\psi(ü)}}{\cos^2\frac{ü}{2}}$
$\frac{P_I}{P}$	$\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{1-3\psi(ü)}}{\cos^2\frac{ü}{2}}$	[2]	$\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{1-3\psi(ü)}}{\cos^2\frac{ü}{2}}$	$\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{1-3\psi(ü)}}{\cos^2\frac{ü}{2}}$
σ	$1-\frac{(S_0+Y+Z)J}{3E\sqrt{2}}$	$1-\frac{\left(\frac{a}{3}Y+Z\right)J}{E\sqrt{2}}$	1 für $ü \leqq 30^0$	1 für $ü \leqq 30^0$
$\varkappa$	$\frac{Z/3}{2\left[\frac{2}{3}S_0+X+\frac{1}{3}(Y+Z)\right]}$	$\frac{Z}{2\left[X+\left(1-\frac{2}{3}a\right)Y+Z\right]}$	$\frac{Z}{2(X+Y+Z)}$	$\frac{3Z}{2(X+Y+3Z)}$
J_k	$\frac{6E\sqrt{2}}{X+2Y+2Z}$	$\frac{6E\sqrt{2}}{X+2Y+6Z}$	$\frac{6E\sqrt{2}}{X+2Y+2Z}$	$\frac{6E\sqrt{2}}{X+2Y+6Z}$
$\frac{J_k}{\nu N_k}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$

[1] $\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a^2\right)-6\left(1-\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}a^2\right)\psi(ü)}$

[2] $\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a^2\right)-6\left(1-\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}a^2\right)\psi(ü)}}{\cos^2\left(\frac{ü}{2}\right)}$

Gemeinsam für alle vier Schaltungen (Schluß von Tabelle II):

$$x = \sin^2 \frac{ü}{2} \qquad \psi(ü) = \frac{(2 + \cos ü) \sin ü - (1 + 2 \cos ü)\, ü}{2\pi (1 - \cos ü)^2}$$

$$\lambda_0 = \frac{N_w}{N} = \frac{3}{\pi} \frac{\cos^2 \frac{ü}{2}}{\sqrt{1 - 3\psi(ü)}} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2 ü - \sin 2 ü}{1 - \cos 2 ü}$$

$$\frac{N_B}{N} = \lambda_0 \operatorname{tg} \varphi \qquad \frac{N_0}{N} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\cos \varphi}\right)^2}$$

$$\imath = \sqrt{1 - \frac{3}{\pi} x (1 - x)(2 ü - \sin 2 ü)} \qquad a = \frac{1}{1 + \frac{S_0}{y}}$$

Saugdrosselspule:

$$4 S = (2 - \sqrt{3}) \frac{E \sqrt{2}}{J_s} = 0{,}379 \frac{E}{J_s}$$

$$\frac{F_1}{E} = 3 \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \cos ü)\right] \qquad \text{für} \quad ü < \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{F_1}{E} = 3 \left[\frac{1}{2} \sin ü - \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - \cos ü)\right] \qquad \text{für} \quad \frac{\pi}{6} \leq ü \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{F_2}{E} = \sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \left[2 (1 + \cos 2 ü) + \sqrt{3}\, (2 ü - \sin 2 ü)\right]}$$

proportional dem Gleichstrom J und die Stromspannungscharakteristik ist infolge davon in allen 4 Fällen eine gerade Linie. Bei den Schaltungen mit Saugdrosselspule erfolgt aber unterhalb des Knies bei $J = J_s$ der Anstieg vom Leerlaufswerte $\frac{G_0}{E} = 1{,}170$ des 3-Phasengleichrichters auf $\frac{G_0}{E} = 1{,}350$ des 6-Phasengleichrichters.

Für große Belastungen haben die gradlinige Strom-Spannungs-Charakteristik mit dem Abfall $G_0 - G$ und überhaupt sämtliche Formeln in Tabelle II nur Geltung bis zur Überlappung $ü = ü_m$. $ü_m$ bei Anwesenheit von Reaktanzen X, Y, Z, S_0 werden wir erst berechnen, wenn wir Belastungszustände mit mehr als 2 sich überlappenden Phasen betrachten, was im zweiten Teil dieser Arbeit geschehen soll. Das Resultat dieser Rechnungen nehmen wir voraus. Es ist folgendes: Wegen der magnetischen Kopplung, welche die Reaktanzen Y und Z zwischen den 2 parallelgeschalteten Dreiphasen-Gleichrichtern zur Folge haben, wird in den Fällen mit Saugdrosselspule $ü_m = 60^0$. Für die 2 andern Fälle folgt $ü_m$ aus den Ausdrücken für $\operatorname{tg} ü_m$ der Tabelle II, doch nur so lange, als das so berechnete $ü_m < 60^0$ ausfällt, sonst gilt auch für diese 2 Schaltungen $ü_m = 60^0$.

Einfach zu berechnen sind noch die Verhältnisse im vollkommenen Kurzschluß. Es fließen dabei im Transformator und im Netz als Wechselanteile die Ströme, die auftreten würden, wenn sämtliche Anoden untereinander kurzgeschlossen werden. Die Anodenströme i_1 bis i_6 sind dann rein sinusförmige Ströme eines 6-Phasensystems. Im Fall ohne Saugdrosselspule mit in Dreieck geschalteter Primärwicklung, der uns in diesem Kapitel immer als Beispiel diente, ist nach Formel (16) $j = 0$, infolgedessen

$$f_1 = X i_1$$

und

$$f_1 - e_1 = Y j_1 + Z (2 j_1 - j_2 - j_3).$$

oder da

$$j_1 = -2\, i_1$$
$$j_2 = -2\, i_3$$
$$j_3 = -2\, i_5$$

und

$$i_3 + i_5 = -i_1$$

sind, folgt

$$f_1 - e_1 = 2\, Y i_1 - 6\, Z i_1\,,$$

oder

$$e_1 = (X + 2\, Y + 6\, Z)\, i_1.$$

Der wirkliche Anodenstrom im vollkommenen Kurzschluß ergibt sich aus i_1 wie früher durch Überlagern eines Gleichstromanteils, der übereinstimmt mit dem Scheitelwert $\frac{E\sqrt{2}}{X + 2\, Y + 6\, Z}$ von i_1 selbst. Der Kurzschlußstrom im Gleichstromkreis ist das 6-fache

$$J_k = \frac{6\, E\sqrt{2}}{X + 2\, Y + 6\, Z}. \tag{18}$$

Der Effektivwert N_k des Netzstromes im Kurzschluß ist offenbar $\sqrt{3}$ mal größer als der des Primärstromes $(-i_1 + i_4)$. Also im Fall des Übersetzungsverhältnisses $\nu = 1$

$$N_k = \sqrt{3}\, \frac{2}{\sqrt{2}}\, \frac{J_k}{6}$$

also

$$\frac{I_k}{N_k} = \sqrt{6}\,.$$

In Kapitel 2 war es möglich, die Überlappung ü und damit alle von ihr allein abhängenden Größen durch $\frac{J}{J_k}$ und unabhängig von der Reaktanz X auszudrücken. Das geht nun nicht mehr, denn nach Gleichung (18) ist

$$\frac{J}{J_k} = (X + 2\, Y + 6\, Z)\, \frac{J}{6\, E\sqrt{2}}.$$

Führt man daraus $\frac{J}{E\sqrt{2}}$ in (13) für cos ü ein, so resultiert

$$\cos ü = 1 - 12\, \frac{X + \left(1 - \frac{2}{3}\, a\right) Y + Z}{X + 2\, Y + 6\, Z}\, \frac{J}{J_k}\,,$$

ein Ausdruck, der für $Y = Z = 0$ degeneriert zum früheren Zusammenhang zwischen ü und $\frac{J}{J_k}$, der von den Reaktanzen X unabhängig war.

Die Rechnungen, die wir bis dahin angestellt haben, lassen sich auch auf kompliziertere Fälle als die 4 Schaltungen dieses Kapitels übertragen. Erwähnt sei nur noch der in praxi häufig vorkommende Fall, daß der Gleichrichtertransformator nicht direkt, sondern über einen dreiphasigen Zwischentransformator vom Generator gespiesen werde. Bedeutet μ dessen Übersetzungsverhältnis von primär nach sekundär und sind

Z_2 die Reaktanz pro Sekundärphase,
Z_3 pro Primärphase des Zwischentransformators,
Z_4 die einer Generatorphase,

so sind die Resultate dieses Kapitels ohne weiteres auch auf diesen komplizierteren Fall anwendbar, falls wir nur Z_1 durch

$$Z_2 + \frac{1}{\mu^2}(Z_3 + Z_4) \qquad \text{bei } \curlywedge\curlyvee\text{-Schaltung,}$$

$$\frac{1}{3}\left[Z_2 + \frac{1}{\mu^2}(Z_3 + Z_4)\right] \qquad \text{bei } \curlywedge\triangle\text{-Schaltung,}$$

$$Z_2 + \frac{1}{\mu^2}(Z_3 + 3\,Z_4) \qquad \text{bei } \triangle\curlyvee\text{-Schaltung,}$$

$$\frac{1}{3}\left[Z_2 + \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{3}\,Z_3 + Z_4\right)\right] \qquad \text{bei } \triangle\triangle\text{-Schaltung}$$

des Zwischentransformators ersetzen.

4. Berücksichtigung der Verluste.

Bis jetzt haben wir nur von verlustlosen Anlagen mit Transformatoren ohne Magnetisierungsstrom gehandelt. Die in Wirklichkeit davon abweichenden Verhältnisse bedingen zusätzliche Spannungsabfälle, Änderungen im Leistungsfaktor und einen Wirkungsgrad, der kleiner als eins ist.

Eine exakte Berechnung ist, wie wir in der Einleitung auseinander gesetzt haben, schwierig durchzuführen und ihre praktische Verwendbarkeit zweifelhaft. Wir begnügen uns daher mit der folgenden Näherung. Es werden zuerst nach Kapitel 3 die Strom- und Spannungsverhältnisse der verlustlosen Anlage gerechnet. Führt man hierauf die Widerstände und den Lichtbogenabfall ein, so ändern sich natürlich sowohl die Ströme wie die Spannungen. Wir nehmen aber an, daß die Ströme völlig ungeändert bleiben, so daß dann auch die Spannungsabfälle über die als bekannt vorausgesetzten Widerstände berechenbar werden. Unsere Annahme wird um so genauer zutreffen, je kleiner die Widerstände im Verhältnis zu den vorhandenen Reaktanzen sind. Um hierüber eine Abschätzung vorzunehmen, betrachten wir eine Reaktanz X, die vom Gleichstrome i_0 durchflossen sich plötzlich über einen Widerstand R entlädt. Der Strom klingt bekanntlich exponentiell ab nach

$$i = i_0\, e^{-\frac{R}{X}\omega t}.$$

Bedeuten nun X und R die Streureaktanz und den Widerstand einer Transformatorphase, deren Kupferverlust beim Vollaststrom J 0,5 % der Scheinleistung P und deren Streuspannung 5 % der Nennspannung betragen, so wird

$$\frac{X}{R} = \frac{X\,J \cdot J}{R\,J^2} = \frac{0{,}05\,P}{0{,}005\,P} = 10.$$

Die Zeit, in der i auf den e^{ten} Teil abfällt, ist also

$$\frac{X}{\omega R} = \frac{10}{2\pi}\,T,$$

wo T die Dauer einer Periode bedeutet, d. h. diese Zeit ist in vorliegendem Beispiel 1,6 mal größer als die Periode des Wechselstromes. Da nun die Brenndauer einer Anode $\frac{1}{6}$ bis ca. $\frac{1}{2}$ von T beträgt, folgt daraus, daß mit unserer Annahme wir allerdings einen Fehler begehen, den man nicht in allen Fällen wird vernachlässigen dürfen, daß im allgemeinen aber — da es sich nur um eine Korrektur der Betrachtungen des vorausgehenden Kapitels handelt — die Annäherung eine genügende sein wird. Endgültig läßt sich darüber erst entscheiden, wenn für eine größere Anzahl von Gleichrichteranlagen die Strom- und Spannungsverhältnisse gerechnet und durch Versuche nachgeprüft worden sind.

Die Gleichspannung G der verlustlosen Anlage — wir nennen sie in Zukunft die ideelle Gleichspannung — geht durch Hinzufügen der Ohmschen Ver-



luste und des Lichtbogenabfalles ζ über in die wirkliche Gleichspannung G_1. Wegen der vorausgesetzten Unveränderlichkeit der Ströme folgt aus dem Energiesatz:

$$P = G J = G_1 J + \zeta J + P_{Cu}.$$

P_{Cu} sind die Kupferverluste der ganzen Anlage. Es ist also

$$G_1 = G - \zeta - \frac{P_{Cu}}{J}. \tag{19}$$

Berücksichtigt man auch den Magnetisierungsstrom, dessen Wattkomponente die Eisenverluste des Transformators deckt, so ändert er nichts an G_1, denn seine Kupferverluste sind vernachlässigbar klein.

Der Leistungsfaktor im Netz. Er ist definiert als Wattleistung durch Scheinleistung gemessen an den Primärklemmen des Transformators.

Die Wattleistung T ist gleich der ideellen Gleichleistung $P = G J$, vermehrt um die Eisenverluste P_{Fe} im Transformator und vermindert um die Kupferverluste im Generator und den Zuleitungen zu den Primärklemmen des Transformators. Also

$$T = P + P_{Fe} - 3 r N_t^2.$$

Darin bedeuten r den Ohmschen Widerstand einer Generatorphase inklusive Zuleitung zum Transformator und N_t der Effektivwert des resultierenden Netzstromes.

Die Scheinleistung aber berechnet sich als das $\sqrt{3}$-fache Produkt der Effektivwerte des resultierenden Netzstromes N_t und der verketteten Primärklemmenspannung K des Transformators bei Belastung. Diese Definition ist richtig für alle 4 Schaltungen, die wir im vorangehenden Kapitel betrachtet haben, während die Bezeichnung der Scheinleistung als das dreifache Produkt der Effektivwerte von Netzstrom und Phasenspannung des Transformators im Falle der Sternschaltung ohne Saugdrosselspule versagt, weil in diesem Falle wegen der erzwungenen Magnetisierung des Transformators eine Wechselspannung zwischen dem primären Sternpunkt des Transformators und dem des Generators auftritt.

Der Leistungsfaktor ist also

$$\lambda = \frac{P + P_{Fe} - 3 r N_t^2}{\sqrt{3}\, K N_t}.$$

Was nun noch einer genaueren Berechnung bedarf, sind N_t und K.

Der resultierende Netzstrom vom Effektivwert N_t ergibt sich aus der Überlagerung des sinusförmig vorausgesetzten Magnetisierungsstromes M über den Netzstrom N, wie er bei verlustloser Anlage auftritt. Die Zusammensetzung ist in einem Vektordiagramm möglich, sobald die Grundwelle von N bekannt ist. Die Wattkomponente N_W dieser Grundwelle berechnet sich aus dem Energiesatze

$$P = 3 \frac{K_0}{\sqrt{3}} N_W \quad \text{zu} \quad N_W = \frac{P}{\sqrt{3}\, K_0};$$

denn da K_0 die primäre Leerlaufklemmenspannung bedeutet, ist $\frac{K_0}{\sqrt{3}}$ nichts anderes als die EMK. pro Generatorphase, und da diese frei von Oberwellen vorausgesetzt wird, überträgt allein die Grundwelle des Netzstromes Wattleistung. Dem für alle 4 Schaltungen gültigen Ausdruck für $\operatorname{tg} \varphi$ in Tabelle II entnimmt man den Phasenwinkel φ, welchen diese Grundwelle mit ihrer Wattkomponente N_W einschließt. Auf die Herleitung dieser Formel für $\operatorname{tg} \varphi$ werden wir am Schlusse dieses Kapitels zurückkommen. In Bild 21 ist der Vektor der Generator-Phasen-EMK. in vertikaler Lage eingetragen. Die Wattkomponente $N_W = \overline{OA}$ des Stromes ist damit in Phase. Macht man $\sphericalangle BOA = \varphi$ und zieht $\overline{BA} \perp \overline{AO}$, so sind nach Größe und Phase $\overline{OB}$ die Grundwelle und $\overline{AB} = N_B$ die Blindkomponente des Netzstromes. Der

Effektivwert N des Netzstromes bei verlustloser Anlage ist größer als der Effektivwert der Grundwelle. Denn der Netzstrom enthält Oberwellen. Nach einem bekannten Satze über nicht rein sinusförmige Ströme ist das Quadrat seines Effektivwertes gleich dem Quadrat des Effektivwertes der Grundwelle vermehrt um die Summe der Quadrate der Effektivwerte der Oberwellen. Konstruieren wir deshalb in Bild 21 über $\overline{OB}$ ein rechtwinkliges Dreieck OBC mit der Hypotenuse $\overline{OC} = N$, so stellt $\overline{BC} = N_O$ den von den Oberwellen herrührenden Anteil dar. Das Quadrat von $\overline{BC}$ ist also gleich der Summe der Quadrate der Effektivwerte der Oberwellen. Bei größeren Überlappungswinkeln ist $\overline{BC}$ verhältnismäßig klein. Wir reihen nun in Bild 21 an $\overline{OB}$ den totalen Magnetisierungsstrom M nach Größe und Phase an und erhalten in $\overline{OD}$ die totale Grundwelle des Netzstromes. Die Wattkomponente des Magnetisierungsstromes berechnet sich in bekannter Weise aus den Eisenverlusten P_{Fe} des Transformators. Da die Oberwellen durch den Magnetisierungsstrom nach unserer Voraussetzung nicht beeinflußt werden, finden wir den Effektivwert N_t des gesamten Netzstromes als Hypotenuse $\overline{OE}$ im rechtwinkligen Dreieck ODE, dessen Kathete $\overline{DE}$ ebenso groß wie $\overline{BC}$ ist.

Um bei praktischen Rechnungen das Vektordiagramm Bild 21 nicht entwerfen zu müssen, entnehmen wir ihm ein für allemal die analytischen Ausdrücke für $\frac{N_B}{N}$ und $\frac{N_O}{N}$. Bedenkt man, daß

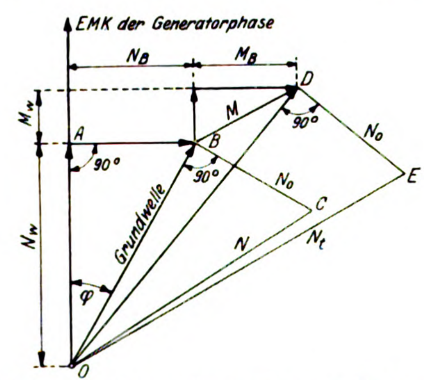


Bild 21. Vektordiagramm der Ströme im Netz.

Bild 22. 6-Phasengleichrichter. Wattkomponente $\frac{N_w}{N}$, Blindkomponente $\frac{N_B}{N}$, Oberwellenkomponente $\frac{N_O}{N}$ des Netzstromes N und [im Fall der Dreieckschaltung ohne Saugdrosselspule] Oberwellenkomponente $\frac{D_O}{N}$ des Dreieckstromes in Abhängigkeit der Überlappung ü.

$$\frac{N_W}{N} = \lambda_O$$

ist, so folgt aus dem Bild 21

$$\frac{N_B}{N} = \lambda_O \operatorname{tg} \varphi$$

und

$$\frac{N_O}{N} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_O}{\cos \varphi}\right)^2}.$$

Alle drei Verhältnisse sind Funktionen von ü allein und sind in Bild 22 als als solche aufgetragen. Der totale Netzstrom, inklusive Magnetisierungsstrom mit Watt- und Blindkomponente M_W bzw. M_B berechnet sich nun aus

$$N_t^2 = (N_W + M_W)^2 + (N_B + M_B)^2 + N_O^2. \tag{20}$$

Der Effektivwert K der primären Klemmenspannung des Transformators ist aus 2 Ursachen bei Belastung kleiner als im Leerlauf, denn es bedingen sowohl die Reaktanzen Z als auch die zwischen Transformatorklemmen und Generatorsternpunkt gelegenen Ohmschen Widerstände r Spannungsabfälle. Da die Ohmschen Spannungsabfälle klein vorausgesetzt werden, darf man mit hinreichender Genauigkeit die beiden Ursachen getrennt behandeln. Die effektive Leerlaufspannung K_O wird so zunächst vermindert um den Ohmschen Abfall der Wattkomponente N_W des Stromes. Der Spannungsverlust der wattlosen Komponente der Grundwelle kann für die Bestimmung des Effektivwertes K vernachlässigt werden, und weiter vernachlässigen wir auch den Einfluß der Oberwellen im Strom. Die nun noch an den Primärklemmen des Transformators verbleibende Spannung $[K_O - N_W \sqrt{3}\, r]$ ist infolge der Reaktanzen Z im Verhältnis τ — siehe Formel (17) und Kurvenblatt Bild 8 — zu reduzieren, so daß

$$K = [K_O - N_W \sqrt{3}\, r]\, \tau \tag{21}$$

wird.

Der Wirkungsgrad η ist das Verhältnis der abgegebenen Gleichleistung $J G_1$ zur Leistung, die an den Primärklemmen des Transformators zugeführt wird, und diese ist offenbar

$$T = J G + P_{Fe} - 3\, r\, N_t^2$$

also

$$\eta = \frac{J G_1}{J G + P_{Fe} - 3\, r\, N_t^2} = \frac{J G - J \zeta - P_{Cu}}{J G + P_{Fe} - 3\, r\, N_t^2}$$

oder

$$\eta = \frac{1 - \frac{\zeta}{G} - \frac{P_{Cu}}{P}}{1 + \frac{P_{Fe}}{P} - 3 r \frac{N_t^2}{P}}.$$

Die primäre Scheinleistung des Transformators erfährt durch den Magnetisierungsstrom einen Zuwachs. Um ihn berechnen zu können, müssen wir auch die primären Phasenströme zerlegt in ihre Watt-, Blind-, und Oberwellenkomponenten angeben. Im Falle von Sternschaltung sind sie mit den Netzströmen identisch. Bei Dreieckschaltung mit Saugdrosselspule aber gilt

$$\frac{D_w}{N_w} = \frac{D_B}{N_B} = \frac{D_0}{N_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Im Falle der Dreieckschaltung ohne Saugdrosselspule tritt im Dreieck ein gewöhnlicher Oberwellenstrom auf, so daß allerdings noch immer

$$\frac{D_w}{N_w} = \frac{D_B}{N_B} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

gilt, aber D_0 kann nun nicht mehr direkt aus N_0 berechnet werden. Aber offenbar gilt

$$(\sqrt{3} D_0)^2 = (\sqrt{3}\, D)^2 - \left(\frac{N_w}{\cos\varphi}\right)^2$$

also

$$\sqrt{3}\frac{D_0}{N} = \sqrt{3\left(\frac{D}{N}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\cos\varphi}\right)^2}.$$

Der Tabelle II entnimmt man

$$3\left(\frac{D}{N}\right)^2 = \chi^2(\ddot{u}, a) = \frac{3}{2}\,\frac{\left(1-\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a^2\right)-6\left(1-\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}a^2\right)\psi(\ddot{u})}{1-3\,\psi(\ddot{u})},$$

so daß resultiert

$$\sqrt{3}\,\frac{D_0}{N} = \sqrt{\chi^2(\ddot{u}, a) - \left(\frac{\lambda_0}{\cos\varphi}\right)^2}.$$

Für $a = 1$, nämlich $\frac{Y}{S_0} = \infty$ wird $\chi^2 = 1$ und — wie es sein muß —

$$\frac{D_0}{N_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\frac{\sqrt{3}\,D_0}{N}$ ist für verschiedene Werte von a in Bild 22 eingetragen. Genau gleich wie N_t aus Formel (20) berechnet sich

$$D_t^2 = \left(D_w + \frac{M_w}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(D_B + \frac{M_B}{\sqrt{3}}\right)^2 + D_0^2.$$

Zum Schlusse soll die Berechnung der Phasenverschiebung φ zwischen Grundwelle und Wattkomponente des Netzstromes für den in Kapitel 3 ausführlich behandelten Fall „6-Phasengleichrichter ohne Saugdrosselspule und mit primär in Dreieck geschalteter Transformatorwicklung" nachgetragen werden.

Bild 17 zeigt das Oszillogramm f(x) des Netzstromes in seiner Orientierung zur Phasen-EMK. des Generators. Sind a_1 der Scheitelwert der Wattkomponente, b_1 der der wattlosen Komponente der Grundwelle von f(x), so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b_1}{a_1}.$$

Für die Fourierkoeffizienten a_1 und b_1 gilt

$$\pi a_1 = 2\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx$$

$$\pi b_1 = 2\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx.$$

Wir setzen $f(x) = f_0(x) + \delta f(x)$. Darin bedeute $f_0(x)$ den Verlauf des Netzstromes unter den Voraussetzungen des Kapitels 1, d. h. beim Fehlen aller Spannungsabfälle wechselstromseitig. $\delta f(x)$ ist also das, was zur rein rechteckförmigen Kurve $f_0(x)$ dazu kommt, infolge des endlichen Überlappungswinkels ü: die zwei schraffierten Zwickel des Bildes 17. Es ist also

$$\pi a_1 = 2\int_0^\pi f_0(x)\sin x\,dx + 2\int_0^\pi \delta f(x)\sin x\,dx.$$

Das erste Integral beträgt

$$J\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin x\,dx = J\sqrt{3},$$

so daß

$$\pi a_1 = 2J\sqrt{3} + 2\int_0^\pi \delta f(x)\sin x\,dx.$$

Analog ist

$$\pi b_1 = 2\int_0^\pi \delta f(x)\cos x\,dx.$$



Dem Bild 17 ist leicht zu entnehmen, daß

$$\int_0^{\pi} \delta f(x) \sin x \, dx = \int_0^{ü} \delta f(\xi) \left[-\sin\left(\xi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\xi + \frac{5\pi}{6}\right)\right] d\xi$$

sein muß, denn für die Integration über den 1[ten] Zwickel wurde einfach die neue Koordinate $\xi = x - \frac{\pi}{6}$, für den 2[ten] Zwickel $\xi = x - \frac{5\pi}{6}$ eingeführt.

Ferner ist

$$-\sin\left(\xi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\xi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} \sin \xi$$

und nach früher

$$\delta f(\xi) = J \left| 1 - \frac{1 - \cos \xi}{1 - \cos ü} \right| .$$

Also

$$\int_0^{\pi} \delta f(x) \sin x \, dx = -J\sqrt{3} \int_0^{ü} \left[1 - \frac{1 - \cos \xi}{1 - \cos ü} \right] \sin \xi \, d\xi$$

$$= -\frac{J\sqrt{3}}{1 - \cos ü} \int_0^{ü} (\cos \xi - \cos ü) \sin \xi \, d\xi$$

$$= -\frac{J}{2} \sqrt{3} (1 - \cos ü) .$$

Es ist also

$$\pi a_1 = J\sqrt{3} [2 - (1 - \cos ü)]$$
$$= J\sqrt{3} (1 + \cos ü) .$$

In analoger Weise findet man

$$\pi b_1 = -J\sqrt{3} \frac{2ü - \sin 2ü}{2(1 - \cos ü)} .$$

Das negative Vorzeichen bedeutet Phasennacheilung des Stromes gegenüber der Spannung. Wir lassen es fort und schreiben endgültig:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2ü - \sin 2ü}{1 - \cos 2ü} .$$

Für die andern 3 Schaltungen der Tabelle II hat $\mathrm{tg}\,\varphi$ denselben Wert. Mit sehr guter Annäherung ergibt die Reihenentwicklung von $\mathrm{tg}\,\varphi$

$$\varphi \sim \frac{2}{3} ü .$$

5. Berechnung einer 6-Phasen-Gleichrichteranlage.

Da die zur Vorausberechnung einer Gleichrichteranlage nötigen Unterlagen in den Kapiteln 1 bis 4 eingehend entwickelt wurden, soll der Berechnungsgang jetzt direkt an Hand eines Beispiels erläutert werden.

Bekannt:

Ein 6-Phasengleichrichter von

1500 kW Nutzleistung
1500 Volt Gleichspannung bei Vollast
1000 Amp. Vollaststrom und
25 Volt Lichtbogenabfall

werde über einen 3- auf 6-Phasen-Transformator gespiesen im

Fall I durch ein unendlich starkes Dreiphasennetz von 15000 Volt verketteter Spannung und der Frequenz 50.

Fall II durch einen Drehstromgenerator mit 15000 Volt verketteter EMK.
15% induktivem Spannungsabfall.
1% Kupferverlusten und der Frequenz 50.

Um den Gleichspannungsabfall von Leerlauf gegenüber Vollast klein zu halten, soll eine Saugdrosselspule in Anwendung kommen. Der Transformator werde in Stern/Stern geschaltet.

Gesucht:

1. die für die Dimensionierung notwendigen Daten des Transformators wie der Saugdrosselspule und
2. in Funktion der Belastung die für den Betrieb wichtigen Größen der wirklichen Gleichspannung, des Wirkungsgrades und des Leistungsfaktors im Netz.

Berechnung von Fall I.

Aus der Gleichspannung bei Vollast $G = 1500$ Volt
dem Lichtbogenabfall $\xi = 25$ „
und den bei unendlich starkem, also verlustlosem Netz zu 1% geschätzten Kupferverlusten der gesamten Anlage

$$P_{Cu} = 1\,500\,000 \cdot 0{,}01 = 15\,000 \text{ Watt}$$

folgen nach Gleichung (19) die ideelle Gleichspannung G bei Vollast zu

$$G = 1500 + 25 + \frac{15\,000}{1000} = 1540 \text{ Volt}$$

und die ideelle Gleichleistung zu

$$P = G\,J = 1540 \text{ kW}.$$

Um eine vernünftige Annahme über die Streureaktanzen X und Y machen zu können, ist nötig, durch eine ungefähre Vorausberechnung von Übersetzungsverhältnis und Scheinleistungen die Transformatorentype vorläufig festzulegen. Zu diesem Zwecke wählen wir auf Grund der Erfahrungen an ähnlichen Anlagen den induktiven Gleichspannungsabfall zu

$$\varepsilon = 4\%.$$

Es folgen dann aus Tabelle II oder Kurvenblatt Bild 8 und Bild 20

$$ü = 22{,}5^0$$

$$\frac{G}{E\sqrt{2}} = 0{,}79 \qquad E = 1380 \text{ Volt}$$

$$\frac{P_I}{P} = 1{,}06 \qquad P_I = 1630 \text{ kVA}$$

$$\frac{P_{II}}{P} = 1{,}50 \qquad P_{II} = 2310 \text{ kVA}$$

$$\frac{P_I + P_{II}}{2P} = 1{,}28 \qquad \frac{1}{2}(P_I + P_{II}) = 1970 \text{ kVA}$$

$$\nu = \frac{K_0}{E\sqrt{3}} = \frac{15\,000}{1380\sqrt{3}} = 6{,}3.$$

Mit diesen Daten ist die Transformatortype vorläufig festgelegt. Aus der nun vorzunehmenden Durchführung ihrer Konstruktion mögen sich ergeben

die Streureaktanzen $X = 0{,}12$ Ohm,
$Y_1 = 6{,}00$ Ohm,
für das Übersetzungsverhältnis $= 6{,}3$,
die Kupferverluste und die Eisenverluste zu je 1% der Nutzleistung,
der Magnetisierungsstrom zu 6% des Vollaststromes.

Ist der Transformator aus einer Serie listenmäßig festgelegter Typen auszuwählen, so müssen diese Daten entweder auch durch Konstruktion und Berechnung



oder durch Versuche an bereits ausgeführten Exemplaren bestimmt sein und der Liste entnommen werden können.

Damit ist die Vorausberechnung beendet, und es ist mit den so bestimmten Daten des Transformators nun möglich, die genaue Berechnung der Gleichrichteranlage vorzunehmen und den zu 4% geschätzten induktiven Gleichspannungsabfall genau zu ermitteln.

Die ideelle Gleichspannung G bei Vollast und die Gleichleistung P bleiben unverändert.

Aus Tabelle II folgt der Absolutwert des Gleichspannungsabfalles

$$G_0 - G = \frac{3}{\pi}\frac{(X+Y)J}{4}$$

zu

$$G_0 - G = \frac{3}{\pi}\frac{\left(0{,}12 + \frac{6{,}0}{6{,}32^2}\right)1000}{4} = 66 \text{ Volt},$$

also die Gleichspannung im Leerlauf

$$G_0 = 1540 + 66 = 1606 \text{ Volt}.$$

Daraus folgt

$$\varepsilon = \frac{G_0 - G}{G_0} = 4{,}1\%$$

in befriedigender Übereinstimmung mit der der Vorausberechnung zugrunde gelegten Annahme $\varepsilon = 4\%$.

Aus

$$\frac{G_0}{E} = \frac{3\sqrt{6}}{2\pi} = 1{,}170$$

ergibt sich der Effektivwert der sekundären Phasenspannung zu

$$E = 1372 \text{ Volt}$$

und somit das Übersetzungsverhältnis zu

$$\nu = 6{,}32.$$

Der Berechnung von $\varepsilon = 4{,}1\%$ lag noch der Wert $\nu = 6{,}3$ der angenäherten Vorausberechnung des Übersetzungsverhältnisses zugrunde. Wenn nun der neue Wert von ν stark vom alten abweichen würde, so müßte mit dem neuen Werte $\nu = 6{,}32$ die exakte Berechnung nochmals wiederholt werden. Hier ist es nicht nötig.

Aus Kurvenblatt Bild 8 oder aus

$$\varepsilon = \sin^2 \frac{ü}{2}$$

folgt

$$ü = 23^0\,24'.$$

Dieser Wert ist kleiner als $ü_m = 60^0$, der ja nicht überschritten werden darf. Mit diesem Werte von ü folgen aus Kurvenblatt Bild 20 oder aus Tabelle II

$$\frac{A}{J} = 0{,}281 \qquad \frac{\nu N}{J} = \frac{\nu D}{J} = 0{,}396$$

$$\frac{P_I}{P} = 1{,}062 \qquad \frac{P_{II}}{P} = 1{,}502 \qquad \frac{P_I + P_{II}}{2P} = 1{,}282$$

und folglich:

der Effektivwert des Anodenstromes $A = 281$ Amp.,
der Effektivwert des Primär- und Netzstromes $D = N = 62{,}8$ Amp.,
die primäre Transformatorscheinleistung $P_I = 1635$ kVA,
die sekundäre Transformatorscheinleistung $P_{II} = 2315$ kVA,
die mittlere Transformatorscheinleistung $\frac{1}{2}(P_I + P_{II}) = 1975$ kVA.

Dem Primärstrom N ist noch der Magnetisierungsstrom des Transformators zu überlagern. Im selben Verhältnis wie $\frac{N_t}{N}$ vergrößert sich auch die primäre kVA-Zahl P_I. Zu $\dot{u} = 23^0 24'$ entnimmt man dem Kurvenblatt Bild 22

$$\frac{N_w}{N} = 0{,}941 \qquad \frac{N_B}{N} = 0{,}260 \qquad \frac{N_0}{N} = 0{,}215.$$

Daraus ergeben sich als Watt-, Blind- und Oberwellenkomponente des Primärstromes

$$D_w = N_w = 59{,}2 \text{ Amp.} \qquad D_B = N_B = 16{,}3 \text{ Amp.} \qquad D_0 = N_0 = 13{,}5 \text{ Amp.}$$

Da ferner der Magnetisierungsstrom die Komponenten

$$M_w = 0{,}01\, N_w = 0{,}6 \text{ Amp.}$$
$$M_B = 0{,}06\, N = 3{,}8 \text{ Amp.}$$

hat, ergibt sich der totale Netzstrom nach Formel (20) zu

$$N_t = 64{,}5 \text{ Amp.}$$

Er ist um 2,7% größer wie N, so daß P_I infolge des Magnetisierungsstromes sich erhöht auf

$$P_I = 1635 \cdot 1{,}027 = 1680 \text{ kVA.}$$

Da der Einfluß des Magnetisierungsstromes der Saugdrosselspule auf P_{II} vernachlässigt werden kann, ist unverändert

$$P_{II} = 2315 \text{ kVA}$$

und

$$\frac{1}{2}(P_I + P_{II}) = 2000 \text{ kVA.}$$

Die für die Dimensionierung des Eisens der Saugdrosselspule bedeutsame Spannung F_1 und der Effektivwert der an ihren Klemmen auftretenden Spannung F_2 folgen nach Tabelle II oder aus Kurvenblatt Bild 8 aus

$$\frac{F_1}{E} = 0{,}510 \qquad \frac{F_2}{E} = 0{,}520$$

zu

$$F_1 = 700 \text{ Volt} \qquad F_2 = 714 \text{ Volt.}$$

Die Reaktanz S der Saugdrosselspule soll so bestimmt werden, daß das Knie der Strom-Spannungs-Charakteristik bei $J_S = 50$ Amp. auftritt.

Es folgt also

$$4\,S = 0{,}379 \frac{E}{J_S} = 0{,}379 \frac{1372}{50} = 10{,}4 \text{ Ohm}.$$

Damit sind definitiv die Daten des Transformators und der Saugdrosselspule ermittelt.

Wir gehen jetzt dazu über, für verschiedene Belastungen, und zwar für $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, $^4/_4$ und $^6/_4$ des Vollaststromes, die für den Betrieb wichtigen Größen wie die wirkliche Gleichspannung G_1, den Wirkungsgrad η und den Leistungsfaktor λ der Anlage zu berechnen. In Tabelle III sind die Werte in der Reihenfolge, in der sie am zweckmäßigsten ermittelt werden, zusammengestellt. Wir beschränken uns darauf, zu dieser Tabelle einige ergänzende Erläuterungen zu geben.

Die ideelle Gleichspannung G folgt aus der Leerlaufspannung $G_0 = 1606$ Volt durch Subtraktion des induktiven Gleichspannungsabfalles

$$G = 1606 - 66 \frac{J}{1000}.$$

Die wirkliche Gleichspannung G_1 ist um den Lichtbogenabfall $\zeta = 25$ Volt und die Ohmschen Spannungsabfälle kleiner. Nimmt man an, was recht genau zutrifft, daß die Kupferverluste mit dem Quadrate der Gleichstromstärke J variieren, so folgt



$$G_1 = G - 25 - 15 \frac{J}{1000}.$$

Aus G und G_1 ergeben sich die ideelle und die wirkliche Gleichleistung $P = G J$ bzw. $G_1 J$. Vermehrt man P um die im ganzen Belastungsintervall konstanten Eisenverluste P_{Fe}, so ergibt sich die den primären Transformatorklemmen der Gleichrichteranlage zugeführte Leistung. Der Wirkungsgrad ist also

$$\eta = \frac{G_1 J}{P + P_{Fe}}.$$

Für die Berechnung des Leistungsfaktors im Netz muß zunächst die Überlappung ü für die verschiedenen Teillasten ermittelt werden. Sie folgt nach Tabelle II aus dem induktiven Gleichspannungsabfall ε, der proportional dem Gleichstrom sich ändert, also in unserem Beispiel

$$\varepsilon = 4{,}1 \frac{J}{1000} \%.$$

Genau wie bei der Berechnung der Daten des Transformators entnimmt man den Kurvenblättern Bild 20 und Bild 21 für die einzelnen Werte von ü die Größen

$$\frac{\nu N}{J}, \quad \frac{N_w}{N}, \quad \frac{N_B}{N}, \quad \frac{N_0}{N}$$

aus denen

$$N, \quad N_w, \quad N_B, \quad N_0$$

selbst folgen.

Zur Wattkomponente N_w schlägt man dazu die Wattkomponente $M_w = 0{,}6$ Amp. des Magnetisierungsstromes und verfährt ebenso mit den Blindkomponenten N_B und $M_B = 3{,}8$ Amp.

Da das Netz unendlich groß angenommen wurde und infolge davon die primäre Klemmenspannung des Transformators sich nicht ändert, folgt für den Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{N_w + M_w}{N_t},$$

wo der Effektivwert N_t des resultierenden Stromes sich wie oben ergibt aus Formel (20). Die Werte J_k und N_k des Gleichstromes und des Netzstromes im stationären Kurzschluß folgen aus den Formeln der Tabelle II zu

$$J_k = \frac{6 \cdot 1372 \sqrt{2}}{0{,}12 + 2 \cdot 0{,}15} = 27\,700 \text{ Amp.},$$

$$N_k = \frac{27\,700}{3 \sqrt{2} \cdot 6{,}32} = 1033 \text{ Amp.}$$

Berechnung von Fall II:

Der vorläufigen Dimensionierung des Transformators legen wir hier die Reaktanzen

$$X = 0{,}12 \text{ Ohm} \qquad Y_1 = 6{,}00 \text{ Ohm}$$

und das Übersetzungsverhältnis

$$\nu = 6{,}32$$

des Falles I zugrunde.

Aus dem induktiven Spannungsabfall im Generator (15%) läßt sich bei $\frac{15\,000}{\sqrt{3}} = 8660$ Volt Phasenspannung und einem Phasenstrom $N = 64{,}5$ Amp. [übernommen von Fall (1)] auf eine Generatorreaktanz

$$Z_1 = \frac{0{,}15 \cdot 8660}{64{,}5} = 20{,}2 \text{ Ohm}$$

pro Phase schließen.

Somit ist der auf die Sekundärseite reduzierte Wert

$$Z = 0{,}504 \text{ Ohm}.$$

Nach Tabelle II ist ferner

$$G_0 - G = \frac{3}{\pi} \frac{(X + Y + Z) J}{4} = 185 \text{ Volt}.$$

Die Kupferverluste sind nun gegenüber Fall (1) um die zu 1 % angenommenen Kupferverluste des Generators größer, so daß G aus der wirklichen Gleichspannung $G_1 = 1500$ Volt sich ergibt zu

$$G = 1500 + 25 + \frac{30000}{1000} = 1555 \text{ Volt}.$$

Daraus finden sich die ideelle Leerlaufgleichspannung G_0 zu

$$G_0 = 1555 + 185 = 1740 \text{ Volt},$$

die sekundäre Phasenspannung E zu

$$E = \frac{1740}{1{,}170} = 1488 \text{ Volt}$$

und das Übersetzungsverhältnis des Transformators zu

$$\nu = \frac{15000}{\sqrt{3} \cdot 1488} = 5{,}82.$$

Zu dem induktiven Spannungsabfall

$$\varepsilon = 100 \cdot \frac{185}{1740} = 10{,}6 \%$$

gehört der Überlappungswinkel $ü = 38^0 06'$ und daraus erhält man in gewohnter Weise zu der ideellen Gleichleistung

$$P = 1555 \text{ kW}$$

die Scheinleistungen

$$P_I = 1744 \text{ kVA}$$

$$P_{II} = 2466 \text{ kVA}$$

$$\frac{1}{2} (P_I + P_{II}) = 2105 \text{ kVA}$$

und zum Gleichstrom $J = 1000$ Amp. den Netzstrom $N = 67$ Amp.

Der für das Übersetzungsverhältnis gefundene Wert $\nu = 5{,}82$ weicht beträchtlich von dem früheren Wert $\nu = 6{,}32$ ab. Der Grund hierfür liegt in dem durch die Reaktanzen Z bedingten größeren Gleichspannungsabfall $(G_0 - G) = 185$ Volt gegenüber 66 Volt im Falle 1.

Durch die Scheinleistungen und das Übersetzungsverhältnis ist die Transformertype festgelegt. In gleicher Weise wie oben sind damit auch die Reaktanzen X und Y gegeben und sollen die Werte annehmen

$$X = 0{,}14 \text{ Ohm}$$

$$Y_1 = 6{,}0 \text{ Ohm} \qquad \text{und} \qquad Y = \frac{Y_1}{\nu^2} = \frac{6{,}0}{5{,}82^2} = 0{,}177 \text{ Ohm}.$$

Da der Netzstrom $N = 67$ Amp. sich gegenüber Fall 1 um etwa 7 % vergrößert hat, wird die Generatorreaktanz Z_1 entsprechend kleiner

$$Z_1 = 20{,}2 \cdot 0{,}93 = 18{,}8 \text{ Ohm}$$

und

$$Z = \frac{Z_1}{\nu^2} = \frac{18{,}8}{5{,}82^2} = 0{,}565 \text{ Amp}.$$

Mit diesen Werten von X, Y und Z wird

$$G_0 - G = 211 \text{ Volt},$$

also



$$G_0 = 1555 + 211 = 1766 \text{ Volt}$$

und

$$E = \frac{1766}{1{,}17} = 1509 \text{ Volt.}$$

Für das Übersetzungsverhältnis ν ergibt sich so der bessere Wert

$$\nu = \frac{15000}{\sqrt{3} \cdot 1509} = 5{,}74.$$

Er liegt nun schon so nahe am Wert $\nu = 5{,}82$, von dem wir ausgegangen sind, daß wir an den Reaktanzen X, Y_1 und Z_1 unverändert festhalten, dagegen erhält man mit dem verbesserten Werte $\nu = 5{,}74$ die neuen Werte

$$Y = 0{,}182$$
$$Z = 0{,}570$$

und den Spannungsabfall

$$G_0 - G = 213 \text{ Volt,}$$

also

$$G_0 = 1768 \text{ Volt}$$

und

$$E = 1511 \text{ Volt.}$$

Daraus folgt nun als endgültiger Wert:

$$\nu = 5{,}72.$$

Zum induktiven Spannungsabfall

$$\varepsilon = 100 \frac{213}{1768} = 12{,}04\,\%$$

gehört der Überlappungswinkel

$$ü = 40^0\,40'.$$

Mit diesem Werte von ü folgen mit Hilfe der Kurvenblätter Bild 20 und 22 oder der Tabelle II

$$A = 276 \text{ Amp.} \qquad N = D = 68{,}0 \text{ Amp.}$$

$$D_W = 59{,}8 \text{ Amp.} \qquad D_B = 30{,}2 \text{ Amp.} \qquad D_O = 10{,}7 \text{ Amp.}$$

$$P_I = 1765 \text{ kVA} \qquad P_{II} = 2495 \text{ kVA} \qquad \frac{1}{2}(P_I + P_{II}) = 2130 \text{ kVA.}$$

Unter Berücksichtigung des Magnetisierungsstromes mit den Komponenten

$$M_W = 0{,}01\, N_W = 0{,}6 \text{ Amp.}$$
$$M_B = 0{,}06\, N \quad = 4{,}1 \text{ Amp.}$$

erhält man für den totalen Netzstrom den Wert

$$N_t = 70{,}3 \text{ Amp.}$$

und damit die Transformatorscheinleistungen endgültig zu

$$P_I = 1765 \frac{70{,}3}{68{,}0} = 1825 \text{ kVA}$$

$$P_{II} = 2495 \text{ kVA}$$

$$\frac{1}{2}(P_I + P_{II}) = 2160 \text{ kVA.}$$

Endlich findet man für die die Saugdrosselspule bestimmenden Größen F_1, F_2 die Werte

$$F_1 = 1005 \text{ Volt}$$
$$F_2 = 924 \text{ Volt}$$

und für deren Reaktanz

$$4\,S = 0{,}379 \cdot \frac{1511}{50} = 11{,}5 \text{ Ohm}$$

mit $J_s = 50$ Amp.

Damit sind alle zur Dimensionierung nötigen Größen bekannt. Bei der Ermittlung der wirklichen Gleichspannung, des Wirkungsgrades und des Leistungsfaktors in Abhängigkeit vom Gleichstrom J verfährt man ähnlich wie im Fall 1. Die Resultate sind in Tabelle IV zusammengestellt, zu der wir nur noch einige ergänzende Bemerkungen zu machen haben. Ideelle und wirkliche Gleichspannung berechnen sich nach

$$G = 1768 - 213 \frac{J}{1000} \text{ Volt}$$

$$G_1 = G - 25 - 30 \frac{J}{1000} \text{ Volt.}$$

Die Nutzleistung ist $G_1 J$, die Generatorleistung beträgt $(G J + P_{Fe})$. Zieht man von dieser die Kupferverluste im Generator ab — sie gehen quadratisch mit dem Belastungsstr m und betragen bei Vollast 1 % der Generatorleistung — so erhält man die dem Transformator zugeführte Wattleistung T. Der Wirkungsgrad η von Transformator und Gleichrichterzylinder ist also $\frac{G_1 J}{T}$.

Der Leistungsfaktor λ an den Primärklemmen des Transformators ist gleich T geteilt durch die diesen zugeführte Scheinleistung $\sqrt{3}\, K N_t$. Der totale Netzstrom N_t wird genau wie in Fall 1 ermittelt. K berechnet sich nach Formel (21) Kapitel 4 zu

$$K = \left[1 - 0{,}01 \frac{J}{1000}\right] K_0 \tau,$$

wo τ für die verschiedenen Werte von ü und

Tabelle III.

Fall I	Einheit	1/4	2/4	3/4	4/4	6/4
J	Amp.	250	500	750	1000	1500
G	Volt	1589	1573	1556	1540	1507
G_1	Volt	1561	1540	1520	1500	1459
$P = JG$	kW	397	786	1167	1540	2260
JG_1	kW	390	770	1140	1500	2189
$P + P_{Fe}$	kW	412	801	1182	1555	2275
η	%	94,3	95,9	96,3	96,5	96,1
ε	%	1,03	2,06	3,09	4,12	6,18
ü	—	11° 40′	16° 30′	20° 16′	23° 24′	28° 46′
$\frac{\nu N}{J}$	—	0,403	0,401	0,399	0,397	0,395
$\frac{N_w}{N}$	—	0,955	0,952	0,946	0,942	0,927
$\frac{N_B}{N}$	—	0,130	0,185	0,226	0,260	0,316
$\frac{N_0}{N}$	—	0,255	0,238	0,225	0,215	0,198
N	Amp.	15,9	31,7	47,3	62,8	93,7
N_w	Amp.	15,2	30,2	44,8	59,2	87,0
N_B	Amp.	2,1	5,9	10,7	16,3	29,6
N_0	Amp.	4,1	7,5	10,6	13,5	18,5
$N_w + M_w$	Amp.	15,8	30,8	45,4	59,8	87,6
$N_B + M_B$	Amp.	5,9	9,7	14,5	20,1	33,4
N_t	Amp.	17,4	33,2	48,8	64,5	95,6
λ	%	91,2	93,0	93,1	92,7	91,7



$$\varkappa = \frac{Z}{2(X+Y+Z)} = 0{,}32$$

der Tabelle II oder Kurvenblatt Bild 8 zu entnehmen ist. Für den stationären Kurzschluß ergibt sich nach Tabelle II

$$J_K = \frac{6 \cdot 1511 \cdot \sqrt{2}}{0{,}14 + 2 \cdot 0{,}18 + 2 \cdot 0{,}57} = 7820 \text{ Amp.}$$

und

$$N_K = \frac{7820}{3 \cdot 2 \cdot 5{,}72} = 323 \text{ Amp.}$$

Die begrenzende Wirkung der Generatorstreuung macht sich an diesen Werten gegenüber Fall I deutlich bemerkbar.

In Bild 23 sind zur vergleichenden Betrachtung G_1, η, λ, $\frac{K}{K_0}$ der beiden Fälle in Funktion der Belastung aufgetragen.

Die Reaktanz Z_1 bedingt in Fall II eine gegenüber Fall I größere Überlappung und infolge davon in unserem Beispiel auch einen etwa dreimal größeren induktiven Spannungsabfall $(G_0 - G)$, wie in der größeren Neigung der Geraden G_1 Fall II gegenüber Fall I zum Ausdruck kommt.

Tabelle IV.

Fall II	Einheit	1/4	2/4	3/4	4/4	6/4
J	Amp.	250	500	750	1000	1500
G	Volt	1715	1661	1608	1555	1448
G_1	Volt	1682	1621	1561	1500	1378
$P = JG$	kW	429	831	1206	1555	2173
JG_1	kW	421	811	1171	1500	2068
T	kW	443	842	1213	1555	2154
η	%	95,0	96,3	96,5	96,5	96,0
ε	%	3,01	6,02	9,03	12,04	18,06
ü	—	20°	28° 26′	35°	40° 40′	50° 20′
$\frac{\nu N}{J}$	—	0,399	0,395	0,392	0,389	0,384
$\frac{N_w}{N}$	—	0,947	0,927	0,905	0,881	0,831
$\frac{N_B}{N}$	—	0,223	0,316	0,385	0,445	0,545
$\frac{N_0}{N}$	—	0,227	0,198	0,177	0,158	0,127
N	Amp.	17,4	34,5	51,4	68,0	100,5
N_w	Amp.	16,5	32,0	46,5	59,8	83,6
N_B	Amp.	3,9	10,9	19,8	30,2	54,8
N_0	Amp.	4,0	6,8	9,1	10,7	12,8
$N_w + M_w$	Amp.	17,1	32,6	47,1	60,4	84,2
$N_B + M_B$	Amp.	8,0	15,0	23,9	34,3	58,9
N_t	Amp.	19,3	36,5	53,6	70,3	103,5
τ	—	0,995	0,985	0,969	0,954	0,917
$\frac{K}{K_0}$	—	0,992	0,980	0,962	0,944	0,902
K	Volt	14 880	14 700	14 430	14 160	13 530
$\sqrt{3}\, K N_t$	kVA	498	931	1340	1722	2428
λ	%	89,0	90,5	90,7	90,4	88,7

Der Wirkungsgrad wurde berechnet als

$$\eta = \frac{J G_1}{J G_1 + V},$$

wobei V die gesamten Verluste bedeutet zwischen Primärklemmen des Transformators und Gleichspannungsklemmen. Bei Vollast haben $J G_1$, V und daher auch η in Fall I und II dieselben Werte.

Nimmt die Belastung ab, so nehmen die Verluste V für beide Fälle genau gleich ab, während $J G_1$ in Fall I rascher abnimmt als in Fall II. η ist daher für Teillast in Fall II größer als in Fall I, für Überlast gilt das Umgekehrte.

Der Leistungsfaktor λ zeigte bei verlustloser Anlage ein Maximum zwischen ü = 5° bis 10°. Durch die Anwesenheit des Magnetisierungsstromes wird er bei kleiner Belastung wesentlich herabgesetzt und nähert sich für Überlast dem Verlauf bei verlustloser Anlage, so daß das Maximum im Beispiel ungefähr nach ü = 20° verschoben wird.

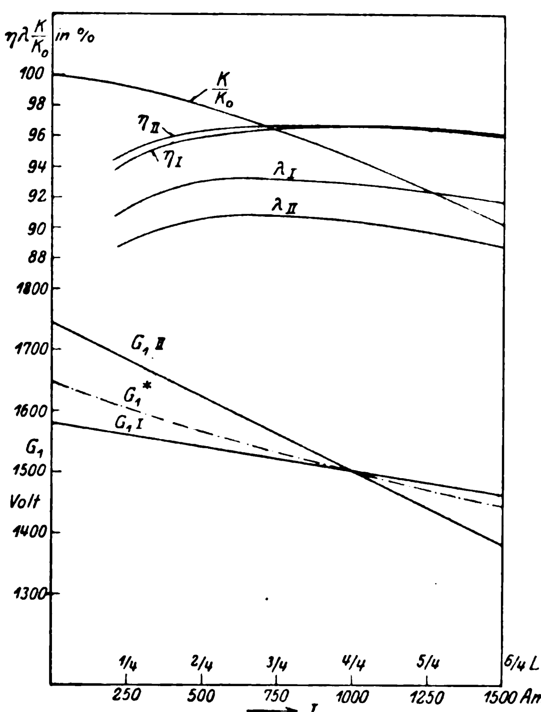


Bild 23. Wirkliche Gleichspannung G_1 in Volt, Abfall der Klemmenspannung $\frac{K}{K_0}$ in %, Leistungsfaktor λ und Wirkungsgrad η der zwei Fälle I und II in Abhängigkeit der Belastung.

Fall II hat, an den Primärklemmen des Transformators gemessen, einen um etwa 2% kleineren Leistungsfaktor als Fall I.

Das erscheint sehr merkwürdig, da ja die den Fall II von Fall I unterscheidende Generatorreaktanz Z vor dem Transformator gelegen ist. Es ist aber klar, wie diese Wirkung zustande kommt. Die Reaktanz Z vergrößert den Überlappungswinkel ü, und die größere Überlappung hat erhöhte Spannungsabfälle in den Reaktanzen X und Y zur Folge. Im Gegensatz zu dem, was für Maschinenanlagen mit sinusförmiger Stromaufnahme gilt, hängt beim Gleichrichter der Leistungsfaktor nicht von der Gleichrichteranlage allein ab, sondern wird mitbestimmt durch die Reaktanzen im speisenden Netz. Dieser Umstand ist überall da von praktischer Bedeutung, und es muß bei Garantieabgaben auf ihn Rücksicht genommen werden, wo das speisende Netz eine mit der Leistung der Gleichrichteranlage vergleichbare Größe hat, oder wo im Netz Reaktanzen vorkommen, die vergleichbar sind mit den Streureaktanzen des Gleichrichter-Transformators, oder diese in ihrer Größe sogar übertreffen (Zwischentransformator, Induktionsregler, Schutzdrosselspulen).

Eine weitere Tatsache, die den Erfahrungen an Maschinen mit sinusförmigem Stromverbrauch widerspricht und für Garantieabgabe unter denselben Bedingungen wie oben von praktischer Bedeutung wird, ist die folgende:

In Fall II bedingt die Reaktanz Z an den Primärklemmen des Transformators einen nicht linear mit dem Gleichstrom J ansteigenden Spannungsabfall; er beträgt bei Vollast 5,6%. Im Gegensatz dazu läuft die Zunahme des Gleichspannungsabfalles infolge von Z linear und erreicht bei Vollast den Wert 12,04 — 4,12 = 7,92%. Also beträchtlich mehr als die 5,6% primärseitig. D. h. im Gleichspannungsabfall würden sich Reaktanzen im Netz auch dann deutlich bemerkbar machen,

wenn durch Regulieren der Generator-EMK. der Effektivwert der primären Klemmenspannung des Transformators konstant gehalten würde, während Maschinen mit sinusförmiger Stromaufnahme bei konstant gehaltener primärer Klemmenspannung vom Netz unabhängige Verhältnisse zeigen. Die Kurve G_1^* (Bild 23) stellt im Fall II den Verlauf der Gleichspannung dar, wenn die primäre Klemmenspannung im ganzen Belastungsbereich durch Regulieren der Generator-EMK. auf ihrem Vollastwert 14160 Volt konstant gehalten würde. Die Ursache dieses abweichenden Verhaltens der Gleichrichteranlage liegt darin, daß die Spannungsabfälle an den Reaktanzen X, Y, Z durch quadratische Mittelwertsbildung in den Effektivwert der primären Klemmenspannung eingehen, während der Gleichspannungsabfall linear von ihnen abhängt. Es ist zu ersehen, wie G_1^* von der Strom-Spannungscharakteristik bei konstanter Generator-EMK. sowohl des Falles II wie des Falles I abweicht.

Das Bild 23 zeigt auch, wie bei der relativ hohen Gleichspannung von 1500 Volt der Wirkungsgrad η im ganzen Belastungsbereich ziemlich konstant ist und hohe Werte hat. Dasselbe gilt dank der Saugdrosselspule, welche die Überlappung herabsetzt, für den Leistungsfaktor λ. Einen Einfluß von praktischer Bedeutung haben die Reaktanzen im Netz auch auf die Daten des Transformators und der Saugdrosselspule. Das geht am besten hervor aus der folgenden Zusammenstellung:

	Einheit	Fall I	Fall II	Zuwachs in % von II gegen I
ν	—	6,32	5,72	— 9,5 %
P_I	kVA	1680	1825	+ 8,8 %
P_{II}	kVA	2315	2495	+ 7,8 %
$\frac{1}{2}(P_I + P_{II})$	kVA	2000	2160	+ 8,0 %
F_1	Volt	700	1005	+ 43,6 %
F_2	Volt	714	924	+ 29,5 %
4 S	Ohm	10,4	11,5	+ 10,5 %

Für viele Fälle dürfte damit die Notwendigkeit der Mitberücksichtigung des Netzes bewiesen sein.

6. Experimentelle Untersuchung der Stromspannungsverhältnisse von Leerlauf bis Kurzschluß.

Bisher haben wir den stationären Kurzschluß und die Belastungsfälle betrachtet, in denen höchstens 2 Phasen gleichzeitig brennen. Bei 6-Phasen-Betrieb ohne Saugdrosselspule und ohne Reaktanzen primärseitig ist das der Fall von Leerlauf bis zu einer Überlappung von $40^0 54'$. Steigert man die Belastung, so erhöht sich die Zahl der gleichzeitig brennenden Anoden, bis im Kurzschluß sämtliche Phasen dauernd Strom führen. Im folgenden wird über einen Versuch berichtet, der an Hand von Oszillogrammen und Kurvenblättern den Übergang vom Leerlauf zum Kurzschluß veranschaulichen und die einschlägigen Rechnungen des zweiten Teiles dieser Arbeit bestätigen soll.

Bild 24 zeigt die Versuchseinrichtung. An einem für die vorliegenden Verhältnisse unendlich großen Netz ist über einen Transformator von 1500 kVA mit einem Effektivwert der sekundären Phasenspannung von 640 Volt ein 6-Phasen-gleichrichter angeschlossen. Die Streuung des Transformators wurde durch Reaktanzen X künstlich erhöht. Die Reaktanzen betrugen bei Wechselstrom von 50 Per. 96,5 Ohm und waren unter sich gleich und innerhalb des ganzen Belastungsbereiches bis auf weniger als 1% genau konstant. Alle anderen Induktivitäten im

Wechselstromkreis, wie die Eigenstreuung des Transformators und der Zentrale, traten ihnen gegenüber vollkommen zurück. Denn beträgt z. B. die Streuspannung des Transformators 4% der effektiven Phasenspannung oder absolut 25 Volt und ist der Normalstrom pro Phase $\frac{1}{6} \cdot \frac{1500000}{640} = 390$ Amp., so folgt die Streureaktanz zu $\frac{25 \text{ V.}}{390 \text{ A.}} = 0{,}064$ Ohm, was gegenüber $X = 96{,}5$ Ohm zu vernachlässigen ist. Der Ohmsche Widerstand pro Phase betrug 1,4 Ohm und ist ebenfalls klein gegenüber den Reaktanzen X.

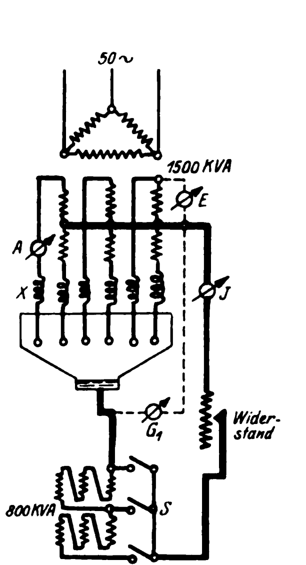


Bild 24. Schaltungsschema der Versuchsanordnung.

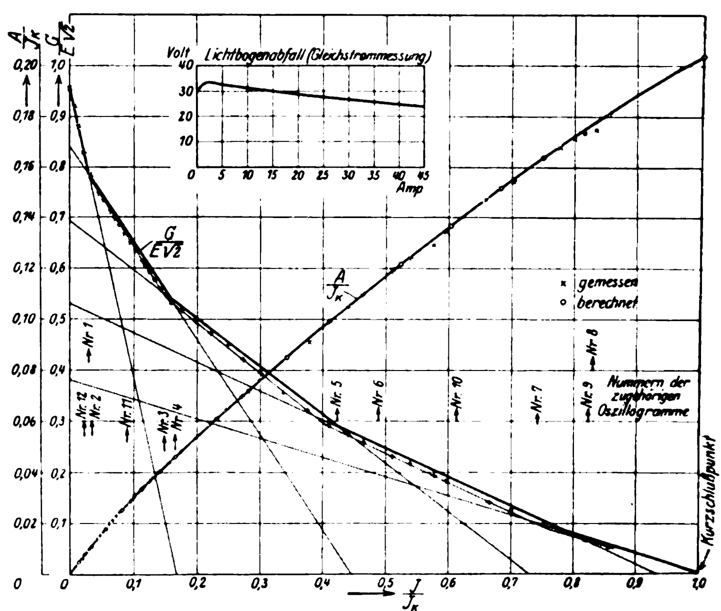


Bild 25. Experimentelle Aufnahme der Gleichspannung $\frac{G}{E\sqrt{2}}$ und des Effektivwertes des Anodenstromes $\frac{A}{J_K}$ in Abhängigkeit der Belastung $\frac{J}{J_K}$ und für den ganzen Bereich von Leerlauf bis Kurzschluß.

Der Gleichstrom wurde durch eine Drosselspule konstant gehalten. Als solche diente ein Gleichrichter-Transformator von 800 kVA. Dessen sämtliche Phasenwicklungen wurden derart in Serie geschaltet, daß sie alle gleichsinnig einen magnetischen Fluß von Joch zu Joch erzeugten, der sich teils durch die Luft, teils über das Gehäuse schloß. Parallel zu diesem Transformator lagen 3 Schalter S, bei deren Betätigung der Transformator ganz oder teilweise ausgeschaltet und so der Einfluß des 800-kVA-Transformators auf die Welligkeit des Gleichstromes im Oszillographen beobachtet werden konnte. Für die Versuche waren also die vereinfachenden Annahmen von Kapitel 2 erfüllt.

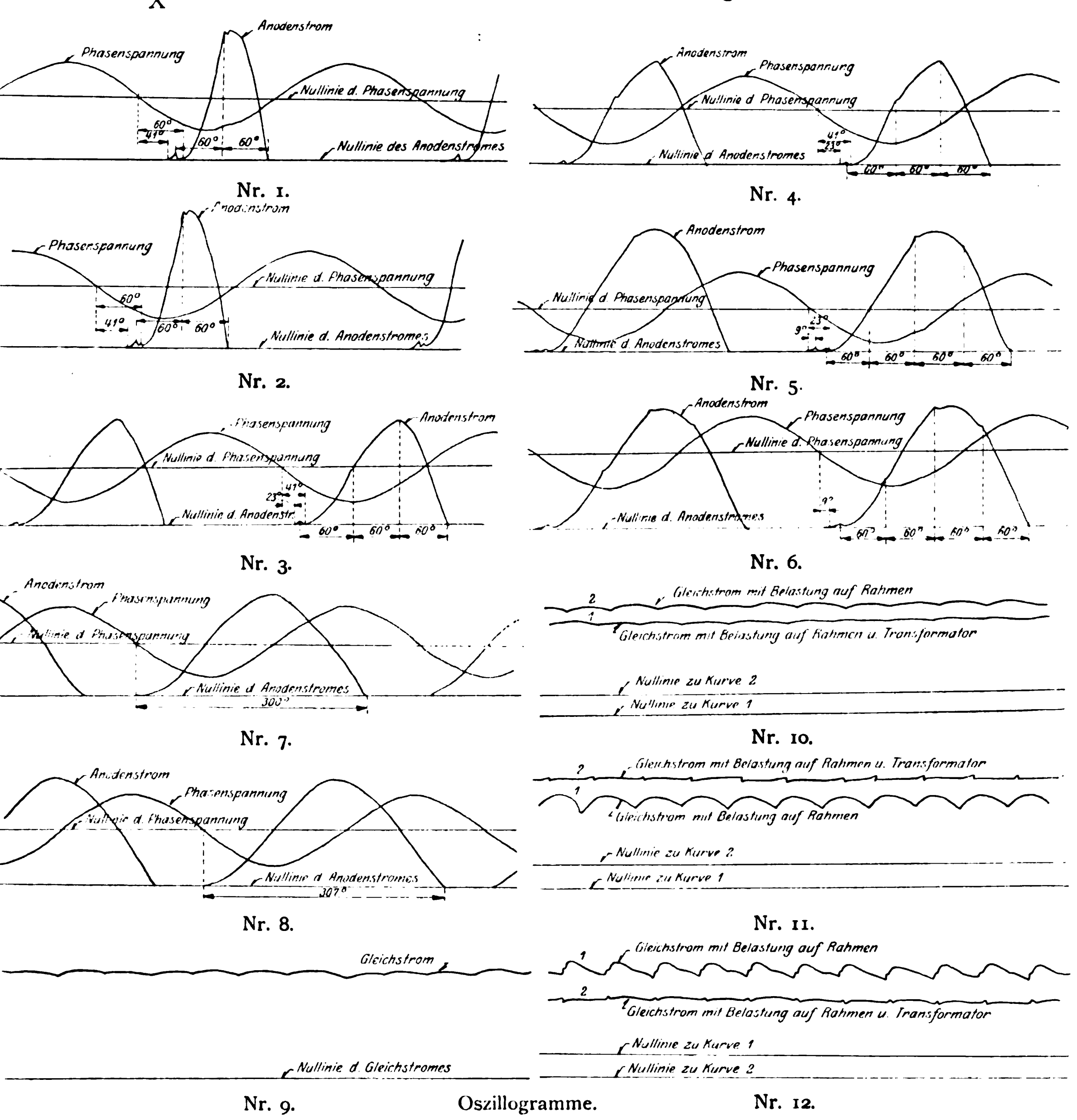
Wegen der künstlich erhöhten Streureaktanzen betrug der Gleichstrom im Kurzschluß nur etwa 60 Amp. Das bedeutet für die Transformatoren und den Gleichrichterzylinder eine sehr geringe Belastung, was für die Durchführung der Versuche von Vorteil war.

Als Belastung im Gleichstromkreis waren Metall- und Wasserwiderstände gewählt worden. Sie erlaubten ein stetiges Regulieren der Belastung von Leerlauf bis Kurzschluß. Dabei wurden gemessen: die sekundäre Phasenspannung E, die Gleichspannung G_1 zwischen Kathode und Sternpunkt des Transformators und der

Effektivwert A des Anodenstromes in Abhängigkeit vom Gleichstrom J. In einer Hilfsmessung wurde mittels Gleichstrom der Lichtbogenabfall ζ in Funktion vom Gleichstrom J aufgenommen, Bild 25. Die Kupferverluste in den sekundären Phasen berechnen sich aus dem Effektivwert A des Anodenstromes zu $6\,r\,A^2$. Schlägt man diese und die Verluste im Gleichrichterzylinder zu der Gleichleistung hinzu, so beträgt die ideelle Gleichspannung G

$$G = G_1 + \zeta + \frac{6\,r\,A^2}{J}.$$

Der totale Kurzschlußstrom im Gleichstromnetz wurde nach der Formel $J_k = \frac{6\,E\,\sqrt{2}}{X}$ von Kapitel 2 berechnet. Kurvenblatt Bild 22 zeigt die auf diese Weise



Oszillogramme.

ermittelte reduzierte Stromspannungscharakteristik, die $\frac{G}{E\sqrt{2}}$ in Funktion von $\frac{J}{J_k}$ darstellt. Ihr Verlauf ist überraschend. Sie setzt sich aus 5 Geraden-Stücken zusammen, wovon das erste der im Kapitel 2 ermittelten Geraden entspricht. Je größer die Belastung ist, um so flacher verläuft die Charakteristik und steht daher in direktem Gegensatz zu den Charakteristiken der Gleichstrommaschinen und der Einankerumformer. Die Versuchspunkte liegen tiefer als die ebenfalls im Kurvenblatt eingetragenen, theoretisch zu erwartenden Geraden, die wir im zweiten Teil berechnen werden. Läßt man zu, daß der dynamische Lichtbogenabfall 5 bis 10 Volt größer ist als der statisch gemessene, so fallen die theoretische und die experimentell ermittelte Charakteristik zusammen.

Um zu erfahren, wodurch sich die den einzelnen Geraden entsprechenden Betriebszustände unterscheiden, gehen wir zur Besprechung der Oszillogramme über. Auf dem Kurvenblatt Bild 25 sind die Abszissenwerte $\frac{J}{J_k}$, für welche Oszillogramme aufgenommen wurden, durch Pfeile hervorgehoben, welche die Nummern der betreffenden Oszillogramme tragen. Vergleicht man die Kurvenformen der Anodenströme der Oszillogramme 1 bis 8 miteinander, so fällt zuerst auf, daß die Brenndauer einer Anode mit wachsender Belastung zunimmt. Infolgedessen steigt auch die Zahl der gleichzeitig brennenden Phasen. Die Löschstellen aufeinanderfolgender Anodenströme folgen sich in Intervallen von 60^0. Im Löschpunkt eines Anodenstromes zeigen die Differential-Quotienten der andern Anodenströme Unstetigkeiten, die sich als Knicke in den Oszillogrammen bemerkbar machen. Die Geraden der Stromspannungscharakteristik unterscheiden sich nun dadurch, daß bei wachsender Belastung die Zahl der sich überlappenden Phasen von Gerade zu Gerade um je eine Einheit zunimmt. Bei der ersten Geraden brennen abwechselnd zwei und eine, bei der zweiten drei und zwei und bei der letzten abwechselnd sechs und fünf Phasen gleichzeitig. Zudem bemerkt man an den Oszillogrammen, daß das Zünden der Anodenströme mit steigender Belastung, bezogen auf den Nullpunkt der Phasenspannung, immer früher erfolgt. Während aber der Löschwinkel mit der Belastung stetig wächst, gehört zu jeder Geraden ein bestimmter Zündwinkel. Dieser muß sich also beim Übergang von einer Geraden zur nächsten um einen endlichen Betrag verkleinern, in einer Weise, über die wir Genaueres erst im zweiten Teil werden aussagen können. Bei der fünften Geraden der Charakteristik erfolgt das Zünden bereits mit dem Einsetzen der positiven Halbwelle der Phasenspannung. Damit ist in großen Zügen der Übergang von dem Stromverlauf des Bildes 6 zu dem von Bild 12 beschrieben.

Der ideelle Kurzschlußpunkt konnte wegen der endlichen Größe des Lichtbogenabfalles nicht erreicht werden, auch mußte mit zunehmender Belastung der 800-kVA-Transformator sukzessive ausgeschaltet werden. Dies hat aber keinen großen Einfluß auf die Resultate, denn im ideellen Kurzschluß ist auch ohne Kathodendrosselspule der Gleichstrom genau zeitlich konstant. Die Oszillogramme 9—12 zeigen, daß bei fehlender Kathodendrosselspule die Welligkeit um so kleiner ist, je größer die Belastung und bestätigen zudem, daß bei den Versuchen die durch die Annahme einer unendlich großen Kathodendrosselspule geforderte Konstanz des Gleichstromes recht genau erfüllt war.

Im Kurvenblatt Bild 25 ist ferner das Verhältnis $\frac{A}{J_k}$ des Effektivwertes A des Anodenstromes zum Kurzschlußstrom J_k aufgetragen. Die Meßpunkte fallen sehr genau auf die nach einem im zweiten Teil geschilderten graphischen Verfahren konstruierte Kurve. Dort wird auch die vollständige Theorie dieser Versuche gegeben werden.



Zweiter Teil.

7. Analytische Theorie der Stromspannungscharakteristik von Leerlauf bis Kurzschluß. Nur auf der Sekundärseite Streureaktanzen.

Gehen wir wieder von den Annahmen des Kapitels 2 aus: Unendlich große Drosselspule im Gleichstromkreis und wechselstromseitig Spannungsabfälle nur an den Streureaktanzen X der Sekundärphasen. Der Anfangspunkt der im Winkelmaß gemessenen Zeitkoordinate $x = \omega t = 2\pi f t$ sei derart gewählt, daß sich die Spannung der ersten Phase schreibt: $e_1 = E\sqrt{2}\sin x$. Die Numerierung der p Phasenspannungen soll so geschehen, daß die mit höherem denen mit kleinerem Zeiger zeitlich vorauseilen, also:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= E\sqrt{2}\sin x \\ e_2 &= E\sqrt{2}\sin\left[x + \frac{2\pi}{p}\right] \\ e_3 &= E\sqrt{2}\sin\left[x + 2\frac{2\pi}{p}\right] \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_p &= E\sqrt{2}\sin\left[x + (p-1)\frac{2\pi}{p}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

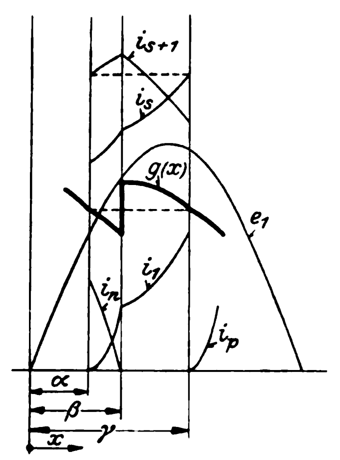


Bild 26. Phasenspannung e_1, Anodenspannung g (x) und n sich überlappende Anodenströme i_1 bis i_n eines p-Phasengleichrichters.

Bild 27. Vektordiagramm der Phasenspannungen zur Berechnung der Zündwinkel.

Die Phase 1 zünde nach Bild 26 im Punkte $x = \alpha$. α heiße der Zündwinkel der ersten Phase. Dann zündet die ihr zeitlich nachfolgende nullte Phase bei $x = \alpha + \frac{2\pi}{p} = \gamma$. In einem bestimmten Zeitmoment des Intervalls α bis γ muß aber eine der brennenden Phasen, etwa die n^{te}, erlöschen. Es sei das an der Stelle $x = \beta$. Das Intervall α bis γ zerfällt also in zwei Teilintervalle: im ersten von α bis β führen von den p Phasen die Phasen 1 bis n Strom, im zweiten von β bis γ nur die Phasen 1 bis $(n-1)$.

Bedeutet g(x) den Momentanwert der Spannung zwischen den brennenden Anoden und dem Nullpunkt des Transformators, die in der Folge Anodenspannung heißen soll, so gilt im Intervall α bis β:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = e_1 - X \dfrac{di_1}{dx} \\ g(x) = e_2 - X \dfrac{di_2}{dx} \\ \dots\dots\dots\dots \\ g(x) = e_n - X \dfrac{di_n}{dx} \end{array}\right\} \quad (23)$$

Addiert man diese Gleichungen und bedenkt, daß in jedem Moment die Summe der Anodenströme den konstanten Gleichstrom J ergeben muß,

$$J = i_1 + i_2 + \dots\dots\dots + i_n, \quad (24)$$

so folgt

$$g(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k. \quad (25)$$

g (x) hängt somit nur von der Zahl der brennenden Phasen ab und ist gleich dem arithmetischen Mittel der Phasenspannungen der beteiligten Phasen. Damit sind auch die Streuspannungen bekannt, und die Veränderung etwa des s^{ten} Anodenstromes ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$X \frac{di_s}{dx} = e_s - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k. \quad (26)$$

Im Intervall β bis γ hat man n durch (n — 1) zu ersetzen.

Wären nun der Zündwinkel α und der Löschwinkel β bekannt, so könnte das Oszillogramm des Anodenstromes ermittelt werden. Denn er verläuft in seiner ganzen Ausdehnung stetig, hat im Zündpunkt den Wert Null und muß in jedem Intervall der Gleichung (26) gehorchen.

Vor allem haben wir uns daher der Bestimmung des Zündwinkels α zuzuwenden. Hierzu sind im Vektordiagramm des Bildes 27 die Vektoren der Phasenspannungen e_1, e_2 . . . . . eingetragen. Deren Projektionen auf die im Gegenuhrzeigersinn sich drehende Zeitachse sollen ihre Momentanwerte darstellen. Wir betrachten den Zustand, wo beispielsweise die Phasen 2 bis 5 gleichzeitig brennen. Der zugehörige Vektor $\overline{OS}$ der Anodenspannung g (x) wird nach der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{4}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5)$$

durch geometrische Addition der Vektoren e_2 bis e_5 und nachträgliche Reduktion dieses Summenvektors auf den vierten Teil gefunden. Denkt man sich in den Endpunkten der Vektoren e_2 bis e_5 gleiche Massenpunkte, so ist S, der Endpunkt des Vektors g (x), deren Schwerpunkt. Zieht man von S aus Vektoren nach den Endpunkten der Vektoren sämtlicher Phasenspannungen, so stellen diese die Differenzen zwischen den letzteren und der Anodenspannung g (x) dar. Bei den nicht brennenden Anoden bedeuten diese Differenzspannungen die Potentialunterschiede zwischen ihnen und den brennenden Anoden; bei den stromführenden Phasen sind sie nach Gleichung (26) gleich den in ihnen auftretenden Streuspannungen.

Anode 1 zündet nun in dem Zeitpunkt, wo sie das Potential der brennenden Anoden erreicht. Zieht man deshalb von O aus die Gerade $\overline{OQ} \perp \overline{AS}$, so ist $\sphericalangle POQ = \alpha$ der Zündwinkel der ersten Phase. Denn die Projektionen der Vektoren $\overline{OS}$ und $\overline{OA}$ auf die Lage $\overline{OQ}$ der Zeitachse sind einander gleich. Von $x = \alpha$ an brennt also mit den Phasen 2 bis 5 auch noch die Phase 1 und der zugehörige Vektor $\overline{OS_1}$ der Gleichspannung g (x) folgt aus



$$g(x) = \frac{1}{5}(e_1 + e_2 + \ldots\ldots + e_5).$$

S_1 ist der Schwerpunkt gleicher Massenpunkte in den Endpunkten der Vektoren e_1 bis e_5 und liegt deshalb auf der Geraden $\overline{AS}$, welche den Massenpunkt A mit dem Schwerpunkt S der 4 Massenpunkte von e_2 bis e_5 verbindet. Die Streuspannungen werden jetzt durch die Vektoren von S_1 aus nach den Endpunkten der Vektoren e_1 bis e_5 dargestellt. In Phase 1 ist diese zur Zeit $x = \alpha$ gleich Null, demnach auch $\frac{di_1}{dx} = 0$ und deshalb setzt i_1 mit horizontaler Tangente ein. Da ferner $\overline{S_1 S} \perp \overline{OQ}$, so ergeben die Streuspannungen der übrigen Phasen kurz vor und kurz nach dem Zeitpunkt $x = \alpha$ auf $\overline{OQ}$ gleiche Projektionen, weshalb die Tangenten der zugehörigen Anodenstromkurven in diesen Zeitpunkten stetig verlaufen. Auch die Anodenspannung g (x) erleidet hier keinen Sprung, wohl aber deren Differentialquotient.

Die Phasen e_1 bis e_5 brennen so lange gleichzeitig, bis e_5 erlöscht. Das geschehe zur Zeit $x = \beta$. Hernach hat der Vektor der Anodenspannung g (x) die Lage $\overline{OS_2}$ in Bild 27; er ist gegenüber $\overline{OS}$ um $\frac{2\pi}{p}$ im Gegenuhrzeigersinn gedreht. Die Punkte S_2, S_1 und der Endpunkt des Vektors e_5 liegen in einer Geraden. Im Gegensatz zum Zünden einer Anode verlaufen beim Erlöschen einer solchen sowohl die Anodenspannung g (x) wie die Differentialquotienten $\frac{di_k}{dx}$ unstetig.

Da in dem Dreieck OS_1A allgemein $\sphericalangle S_1OA = (n-1)\frac{\pi}{p}$ und $\sphericalangle S_1AO = \alpha$ sind, so folgt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{DS_1}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OS_1}\sin(n-1)\frac{\pi}{p}}{\overline{OA} - \overline{OS_1}\cos(n-1)\frac{\pi}{p}},$$

wo $\overline{DS_1} \perp \overline{AO}$. $\overline{OS_1}$ berechnet sich aber nach Gleichung (25) zu

$$\overline{OS_1} = E\sqrt{2}\,\frac{\sin n\frac{\pi}{p}}{n\sin\frac{\pi}{p}},$$

woraus für den Zündwinkel α folgt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{p}\sin n\frac{\pi}{p}}{n\sin\frac{\pi}{p} - \sin n\frac{\pi}{p}\cos(n-1)\frac{\pi}{p}}. \tag{27}$$

Daraus erkennt man, daß der Zündwinkel α direkt nur von der Phasenzahl p und der Zahl n der brennenden Anoden und nicht von der Größe der Ströme und Spannungen abhängt. Er hängt allerdings mit letzteren indirekt zusammen, indem die Zahl n mit der Belastung verknüpft ist. Die umstehende Tabelle gibt die Auswertung der Gleichung (27) für $p = 3$ und $p = 6$.

Wir bezeichnen von nun an den Zündwinkel α für n brennende Phasen mit α_n. Dann brennen also vor dem Zeitpunkt $x = \alpha_n$ die Phasen 2 bis n und nachher die Phasen 1 bis n. Die Tabelle zeigt, daß die Zündwinkel um so kleiner sind, je größer die Zahl n der gleichzeitig stromführenden Phasen ist, ein Resultat, das für beliebige Phasenzahlen richtig ist. Man kann den Beweis für diese Behauptung geometrisch erbringen, indem man bedenkt, daß in dem Dreieck AOS_1 des Bildes 27

der $\sphericalangle OS_1A$ höchstens 90^0 betragen kann und mit wachsendem n der $\sphericalangle AOS_1$ zu- und die Strecke $\overline{OS_1}$ abnehmen.

p	n	tg α	sin α	cos α	α
3	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	30^0
3	3	0	0	1	0^0
6	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	60^0
6	3	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\frac{2}{\sqrt{7}}$	$40^0 54'$
6	4	$\frac{1}{4}\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{3}{19}}$	$\frac{4}{\sqrt{19}}$	$23^0 25'$
6	5	$\frac{1}{11}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{31}}$	$\frac{11}{2\sqrt{31}}$	$8^0 57'$
6	6	0	0	1	0^0

Nachdem nun der Zündwinkel α_n bekannt ist, läßt sich der oszillographische Verlauf des Anodenstromes i_1 konstruieren. Denn zur Zeit $x = \alpha_n$ hat er den Wert Null und von da an ist in jedem Augenblick sein erster Differentialquotient nach Gleichung (26) durch die Streuspannung gegeben. Letztere ist in jedem Intervall eine rein sinusförmige Funktion. Deshalb verlaufen die Anodenströme in den einzelnen Intervallen, von einem konstanten Gleichstromanteil abgesehen, ebenfalls rein sinusförmig, wie es das Integral der Gleichung (26)

$$i_s = \frac{1}{X}\int [e_s - g(x)]\,dx + \text{konstant} \qquad (28)$$

zum Ausdruck bringt. Die Wechselanteile der Anodenströme werden danach ebenfalls durch die Vektoren $[e_s - g(x)]$ der Streuspannungen dargestellt, insofern wir nur die Nullstellung der Zeitachse im Uhrzeigersinn um 90^0 zurückdrehen und den Faktor $\frac{1}{X}$ durch eine entsprechende Änderung des Maßstabes berücksichtigen. Zur Ermittlung des oszillographischen Verlaufes eines Anodenstromes mit Hilfe der Gleichung (28) muß aber noch der Löschwinkel β bekannt sein. Dieser ist um so größer, je größer der totale Gleichstrom ist, je länger also eine Anode brennt. Nimmt man umgekehrt β an, so ist damit J gegeben. β ist aber nur innerhalb gewisser Grenzen frei wählbar, denn es muß die Bedingung erfüllt sein, daß von α bis β stets n und von β bis γ stets $(n - 1)$ Anoden Strom führen.

Die Konstruktion werde an dem Beispiel $p = 6$ und $n = 3$ in den Bildern 28 bis 32 durchgeführt. Das erste zeigt die Vektoren der 6-Phasenspannungen, deren Endpunkte mit $s = 1$ bis $s = 6$ numeriert sind. Die von O aus nach den Nummern $n = 2$ bis $n = 6$ gezogenen Vektoren stellen die Vektoren der Anodenspannung $g(x)$ dar unter der Annahme, daß jeweils die Phasen 1 bis n gleichzeitig brennen. Die Lage der Zeitachse im Moment $x = 0$ ist für die Vektoren e_1 bis e_6 und $g(x)$ vertikal aufwärts gewählt worden, für die Integrale geht sie dann horizontal nach rechts. Im Polardiagramm Bild 29 setzt bei $x = \alpha_3 = 40^0\,54'$ der Anodenstrom i_1 mit dem Wert Null ein und verläuft nach Formel (28) entsprechend dem Vektor

der Streuspannung, der in dem vorliegenden Falle von dem Punkt $n = 3$ nach der Ecke $s = 1$ weist (Bild 28). Wir zeichnen in Bild 29 die zwei Kreise des Polardiagramms dieses Vektors und ziehen den positiven ganz, den negativen gestrichelt aus. Der jeweilige Sehnenabschnitt des einen oder des andern dieser zwei Kreise

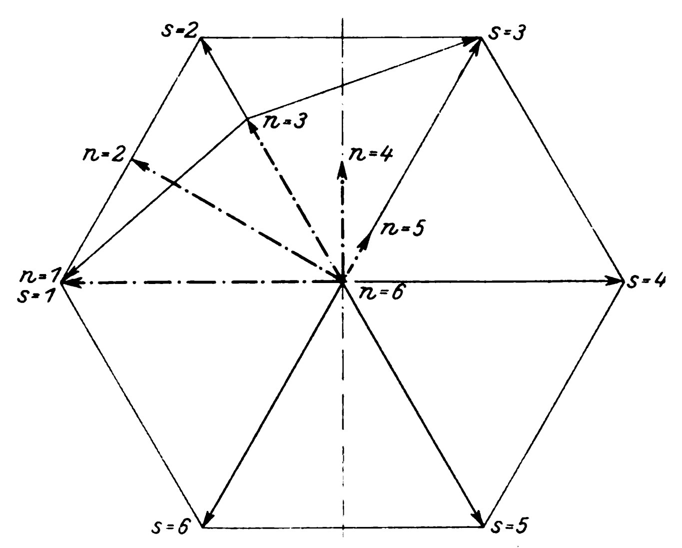


Bild 28. Vektordiagramm der Phasenspannungen und Anodenspannungen.

auf der positiven Zeitachse gibt den Momentanwert an. Für $x = \alpha_3 = \alpha$ (da die Konstruktion für jedes n analog verläuft, lassen wir den Index weg) ist dieser Momentanwert dem Durchmesser $\overline{OA}$ des negativen Kreises gleich. Da der Strom i_1 aber mit dem Wert Null einsetzt, hat man zu dem Momentanwert des Polar-

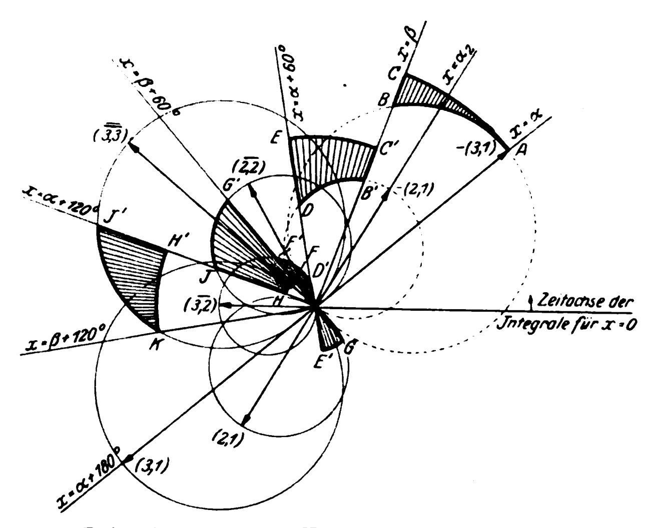


Bild 29. Polardiagramm zur Konstruktion des Anodenstromes.

diagramms noch einen positiven Gleichstromanteil vom Betrage $\overline{OA}$ hinzuzufügen, oder, was dasselbe ist, man schlägt um O mit dem Radius $\overline{OA}$ einen Kreis und erhält im schraffierten Zwickel A B C, in dem zwischen den beiden Kreisen gelegenen Abschnitt auf der Zeitachse den Verlauf des Anodenstromes von α bis β. Um wirklich einen Betriebszustand zu erhalten, bei dem abwechselnd je 3 und 2 Phasen

Strom führen, wählen wir β z. B. 70^0. Vom Zeitpunkt $x = \beta$ an ist der weitere Verlauf der Gleichspannung durch den Vektor von O nach dem Punkt $n = 2$ und der Verlauf von i_1 durch den Vektor der Streuspannung vom Punkte $n = 2$ nach $s = 1$ bestimmt. Das Polardiagramm des letzteren ist in Bild 29 eingetragen. Für $x = \beta$ ist der Momentanwert gleich der negativ genommenen Strecke $\overline{OB'}$. Der Strom i_1 war aber positiv und gleich $\overline{BC}$. Man macht daher $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ und erhält in dem im schraffierten Zwickel B'C'ED gelegenen Abschnitt der Zeitachse den Verlauf von i_1 im Intervall β bis γ. Von jetzt an verläuft der Strom i_1 genau so wie der Strom i_2 im Intervall α bis β. Der Verlauf des letzteren ist durch den Vektor von $n = 3$ nach $s = 2$ gegeben. Drehen wir diesen Vektor um $+60^0$ und zeichnen den zugehörigen Polarkreis, so ist damit der Verlauf von i_1 im Intervall γ bis $(\beta + 60^0)$ gegeben. Macht man für $x = \gamma$ $\overline{D'E'} = \overline{DE}$ und schlägt um O mit dem Radius $\overline{OE'}$ einen Kreis, so stellen die Sehnen durch O im Zwickel

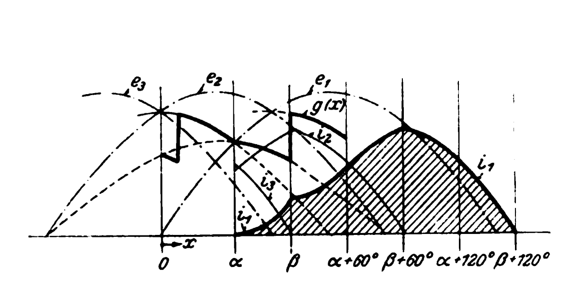


Bild 30. Liniendiagramm der Anodenspannung und des in Bild 29 konstruierten Anodenstromes.

Bild 31. Polardiagramm zur Berechnung des Effektivwertes.

D'FGE' den Verlauf des Momentanwertes von i_1 im Intervall γ bis $(\beta + 60^0)$ dar. In ähnlicher Weise erhält man den Verlauf von i_1 zwischen $(\beta + 60^0)$ und $(\gamma + 60^0)$. Dreht man schließlich den Vektor von $s = 3$ nach $n = 3$ um $+ 120^0$, so ist damit auch der Verlauf von i_1 vom Zeitpunkt $(\alpha + 120^0)$ an bekannt. Zur Probe muß i_1 im Punkte $(\beta + 120^0)$ erlöschen, was in der Zeichnung tatsächlich stimmt.

Die Übertragung ins Liniendiagramm zeigt Bild 30, wo der totale Verlauf von i_1, Teilstücke von i_2 und i_3, die Phasenspannungen e_1, e_2, e_3 und die Anodenspannung g(x) eingetragen sind. Durch Quadrieren der Ordinaten von i_1 könnte man den Effektivwert A des Anodenstromes bestimmen. Einfacher ist der folgende Weg. Man zeichnet sich, wie in Bild 31, das Polardiagramm des Anodenstromes $i_1 = i_1(x)$. Die vom Fahrstrahl total überstrichene Fläche ist

$$F = \int_0^{2\pi} \frac{i^2}{2} \, dx$$

und da

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 dx}$$

ist, folgt

$$A = \sqrt{\frac{F}{\pi}}.$$

Nach dieser Methode ist in Kurvenblatt Bild 25 der Verlauf von $\frac{A}{J_k}$ in Funktion von $\frac{J}{J_k}$ berechnet worden.

Der Beginn A B D des Stromes i_1 ist in Bild 32 nochmals vergrößert skizziert. Wie man aus Bild 29 leicht erkennt, hat der Sinusbogen DBS (Bild 32) ein Minimum bei $x = \alpha_2$. Wir wollen nun untersuchen, in welcher Weise sich die Anodenstromkurve verändert, wenn man den Löschwinkel β kleiner und kleiner werden läßt. Der Punkt B sinkt dann offenbar auf der Sinuskurve A B herunter und der Anodenstrom zeigt sukzessive die Lagen I, II, III. Die Kurven II und III gehen offenbar aus I dadurch hervor, daß man letztere translatorisch vertikal abwärts verschiebt. Denn in jedem Zeitpunkt sind für alle drei Kurven I, II, III die Streuspannungen und damit die Neigung der Tangenten an die Anodenstromkurven die gleichen. III stellt die Grenze dar. Denn nimmt β noch weiter ab, so müßte, wie Kurve IV zeigt, i_1 negative Werte annehmen, was unmöglich ist. Der wirkliche Verlauf ist dann der folgende: Der Anodenstrom zündet bei A mit dem Zündwinkel α_3, beschreibt den schraffierten Vorläufer, erlöscht dann und setzt bei α_2, dem Zündwinkel für $n = 2$, zu seinem Hauptverlauf an.

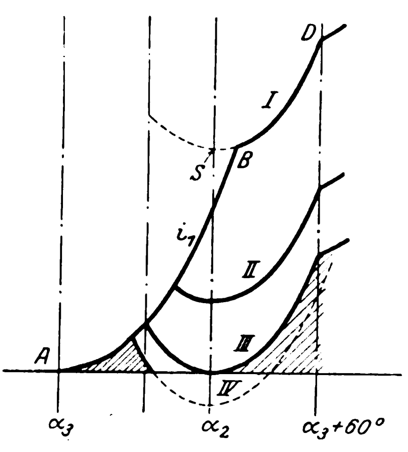


Bild 32. Der Vorläufer. Übergang von 2 zu 3 sich überlappenden Phasen.

Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, allgemein auszusagen, wie der Übergang von einem Zündwinkel zum nächstfolgenden, kleineren vor sich geht. Gehen wir von einem Belastungszustand aus, bei dem abwechselnd je n und (n — 1) Phasen gleichzeitig Strom führen. Das Zünden der Anode 1 findet so lange bei $x = \alpha_n$ statt, bis der Löschwinkel β des n^{ten} Anodenstromes den Wert $\left(\alpha_{n+1} + \frac{2\pi}{p}\right)$ erreicht hat. Bei noch höheren Belastungen setzt nach Bild 32 i_1 schon bei $x = \alpha_{n+1}$ ein und steigt so lange an, bis i_{n+1} erlöscht. Hierauf nimmt auch i_1 wieder ab und erlöscht ebenfalls. Nun brennen die Phasen 2 bis n so lange allein weiter, bis bei $x = \alpha_n$ Phase 1 abermals zündet. Steigert man die Belastung noch mehr, so nimmt der Löschwinkel des Vorläufers stetig zu und erreicht bei einem bestimmten Gleichstrom J den Wert des Zündwinkels α_n von n Phasen. Die Kurve III des Bildes 32 zeigt diesen Zustand. Bei noch größeren Belastungen liegt der reine Fall von (n + 1) sich überlappenden Phasen vor.

Zur Berechnung der Stromspannungscharakteristik müssen wir den Verlauf des Anodenstromes analytisch erfassen. Hat der s^{te} Anodenstrom (Bild 26) an der Stelle $x = \alpha_n = \alpha$ den Wert $i_s(\alpha)$, so liefert Gleichung (26) dessen Wert $i_s(\beta)$ im Zeitpunkt β zu

$$i_s(\beta) = i_s(\alpha) + \frac{1}{X}\int_{\alpha}^{\beta}\left(e_s - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k\right)dx\,.$$

Ganz analog sind Anfangs- und Endwerte im Intervall β bis γ miteinander verknüpft:

$$i_s(\gamma) = i_s(\beta) + \frac{1}{X}\int_{\beta}^{\gamma}\left(e_s - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} e_k\right)dx\,.$$

Bezeichnet man abkürzend die bestimmten Integrale durch

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{X}\int_{\alpha}^{\beta}\left(e_s - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k\right)dx &= E_s\\ \frac{1}{X}\int_{\beta}^{\gamma}\left(e_s - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} e_k\right)dx &= F_s\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

so gelten die Gleichungen

$$i_s(\beta) = i_s(\alpha) + E_s \qquad \text{für } s = 1 \text{ bis } n, \tag{30}$$

$$i_s(\gamma) = i_s(\beta) + F_s \qquad \text{für } s = 1 \text{ bis } (n-1). \tag{31}$$

Nun bestehen für die Stromwerte i_s in den Zeitpunkten α, β, γ noch die folgenden Bedingungen:

$$i_1(\alpha) = 0\,, \tag{32}$$

$$i_n(\beta) = 0 \tag{33}$$

und da sich alles mit der Periode $\frac{2\pi}{p}$ abspielt:

$$i_{s+1}(\alpha) = i_s(\gamma) \qquad \text{für } s = 1 \text{ bis } (n-1). \tag{34}$$

Aus den Gleichungen (30) bis (34) sind die Stromwerte i_s in den Zünd- und Löschpunkten auf einfache Weise rekursiv zu berechnen. Die folgende Tabelle zeigt den Weg und gibt zugleich das Resultat.

$$\left.\begin{array}{lll} i_1(\alpha) = 0, & i_1(\beta) = E_1, & i_1(\gamma) = E_1 + F_1, \\ i_2(\alpha) = E_1 + F_1, & i_2(\beta) = E_1 + F_1 + E_2, & i_2(\gamma) = E_1 + F_1 + E_2 + F_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ i_n(\alpha) = E_1 + F_1 + \ldots + E_{n-1} + F_{n-1}. & i_n(\beta) = E_1 + F_1 + \ldots + E_{n-1} + F_{n-1} + E_n. & \end{array}\right\} \tag{35}$$

Aus der Definition von E_s und F_s folgt, daß $i_n(\beta)$ in der Tat den Wert Null hat. Wendet man Gleichung (24) speziell auf den Zeitpunkt $x = \alpha$ an, so folgt aus (35)

$$J = \sum_{k=1}^{n} (n-k)(E_k + F_k). \tag{36}$$

Das ist bei gegebenem Gleichstrom J eine Gleichung für den Löschwinkel β, denn β ist die einzige darin vorkommende Unbekannte. Wenn man, wie es für die numerische Berechnung zweckmäßig ist, von β ausgeht, so ist (36) eine Parameterdarstellung des Gleichstromes J.

Zur Berechnung der Stromspannungscharakteristik braucht man aber auf den Zusammenhang zwischen J und β nicht näher einzugehen. Die Gleichspannung G inklusive Lichtbogenabfall ist gleich dem Mittelwert der Anodenspannung g(x) im Intervall α bis γ:

$$G = \frac{1}{\frac{2\pi}{p}} \int_{\alpha}^{\gamma} g(x)\,dx \tag{37}$$

oder, wenn man die Werte von g(x) einsetzt:

$$G = \frac{1}{\frac{2\pi}{p}} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} e_k\,dx \right]. \tag{38}$$

Das Einsetzen der Werte von E_s und F_s in Gleichung (36) ergibt:

$$J X = \sum_{k=1}^{n} (n-k) \left[\int_{\alpha}^{\gamma} e_k\,dx - \frac{1}{n} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{s=1}^{n} e_s\,dx - \frac{1}{n-1} \int_{\beta}^{\gamma} \sum_{s=1}^{n-1} e_s\,dx \right]$$

oder

$$J X = \sum_{k=1}^{n} (n-k) \int_{\alpha}^{\gamma} e_k\,dx - \frac{n(n-1)}{2} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} e_s\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^{n-1} e_s\,dx \right]. \tag{39}$$



Die Integrale in der eckigen Klammer, in denen allein noch der unbekannte Löschwinkel β auftritt, sind aber gerade gleich $\frac{2\pi}{p}$ G, so daß aus (36) und (37) bzw. (38) und (39) β eliminiert werden kann:

$$J X = \sum_{k=1}^{n} (n-k) \int_{\alpha}^{\gamma} e_k \, dx - \frac{2\pi}{p} \frac{n(n-1)}{2} G$$

oder

$$G = \frac{p}{n(n-1)\pi} \left[\int_{\alpha_n}^{\alpha_n + \frac{2\pi}{p}} \sum_{k=1}^{n} (n-k) e_k \, dx - J X \right]. \tag{40}$$

Dies ist die Gleichung der Stromspannungscharakteristik. Sie stellt, wie es die in Kapitel 6 des ersten Teiles dieser Arbeit beschriebenen Versuche ebenfalls ergeben haben, $(p-1)$ gerade Linien dar. Diese verlaufen um so flacher, je größer n ist.

Die reduzierte Stromspannungscharakteristik ist

$$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{p}{n(n-1)\pi} \left\{ \int_{\alpha_n}^{\alpha_n + \frac{2\pi}{p}} \sum_{k=1}^{n} (n-k) \frac{e_k}{E\sqrt{2}} \, dx - p \frac{J}{J_k} \right\} \tag{41}$$

$J_k = \frac{p E \sqrt{2}}{X}$ bedeutet den in Kapitel 2 berechneten Kurzschlußstrom.

Die Gleichungen (40) bzw. (41) werden für $p = 3$ und $p = 6$ unter Berücksichtigung der Tabelle für die Zündwinkel ausgewertet.

Es ergibt sich für

$p = 3$, $n = 2$: $$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left[1 - \sqrt{3} \frac{J}{J_k} \right]$$

$n = 3$: $$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{3}{2\pi} \left[1 - \frac{J}{J_k} \right]$$

$p = 6$, $n = 2$: $$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{3}{\pi} \left[1 - 6 \frac{J}{J_k} \right]$$

$n = 3$: $$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\pi} \left[1 - \frac{6}{\sqrt{7}} \frac{J}{J_k} \right]$$

$n = 4$: $$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{19}}{2\pi} \left[1 - \frac{6}{\sqrt{19}} \frac{J}{J_k} \right]$$

$n = 5$: $$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{31}}{10\pi} \left[1 - \frac{6}{\sqrt{31}} \frac{J}{J_k} \right]$$

$n = 6$: $$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{6}{5\pi} \left[1 - \frac{J}{J_k} \right].$$

Die Geraden für $p = 6$ sind in Kurvenblatt Bild 25 eingetragen. Sie gelten aber nicht in ihrer ganzen Ausdehnung, sondern nur so weit, als sie Betriebszuständen entsprechen, bei welchen wirklich im Intervall α bis β stets n und im Intervall β bis γ stets $(n-1)$ Phasen brennen. Die größte Belastung, die dieser Bedingung gerade noch entspricht, ist durch die Forderung $\beta = \alpha_{n+1} + \frac{2\pi}{p}$ gegeben; denn im Sinne zunehmender Belastung gesprochen, tritt dann gerade der Vorläufer auf. Wir wollen

diesen Belastungspunkt im Falle $p = 6$ und $n = 3$ mit Hilfe der Gleichung (39) ermitteln

$$JX = \int_{\alpha_3}^{\alpha_3+60^\circ} \sum_{k=1}^{2} (3-k) e_k \, dx - 3 \left[\int_{\alpha_3}^{\alpha_4+60^\circ} \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{3} e_s \, dx + \int_{\alpha_4+60^\circ}^{\alpha_3+60^\circ} \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2} e_s \, dx \right]$$

$$= \int_{\alpha_3}^{\alpha_3+60^\circ} (2e_1 + e_2) \, dx - \int_{\alpha_3}^{\alpha_4+60^\circ} (e_1 + e_2 + e_3) \, dx - \frac{3}{2} \int_{\alpha_4+60^\circ}^{\alpha_3+60^\circ} (e_1 + e_2) \, dx$$

$$= E\sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (\sin \alpha_3 + \sin \alpha_4) + (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_4) \right]$$

$$\frac{J}{J_k} = 0{,}125 \ldots$$

Dieser Wert liegt aber v o r dem Schnittpunkt der 2 Charakteristiken $n = 3$ und $n = 4$. Denn dessen Belastung bestimmt sich aus

$$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\pi} \left[1 - \frac{6}{\sqrt{7}} \frac{J}{J_k} \right] = \frac{\sqrt{19}}{2\pi} \left[1 - \frac{6}{\sqrt{19}} \frac{J}{J_k} \right]$$

zu

$$\frac{J}{J_k} = \frac{1}{6} \left[2\sqrt{7} - \sqrt{19} \right] = 0{,}155 \ldots$$

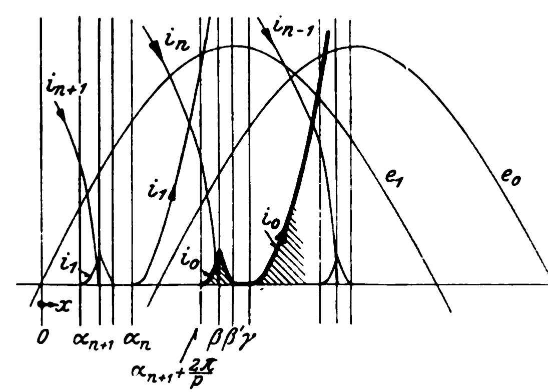


Bild 33. Anodenströme mit Vorläufer beim Übergang von n zu (n + 1) überlappenden Phasen.

In den Gebieten, wo Vorläufer existieren, ist es daher bis jetzt noch ungeklärt, wie die Stromspannungscharakteristik verläuft.

Zu deren Ermittlung haben wir an Stelle der früheren Intervalle α bis β und β bis γ über die Dauer einer Periode $\frac{2\pi}{p}$ deren 4 zu unterscheiden (Bild 33), und zwar brennen

von α bis α' die Ströme i_1 bis i_n
„ α' „ β „ „ i_0 „ i_n
„ β „ β' „ „ i_0 „ i_{n-1}
„ β' „ γ „ „ i_1 „ i_{n-1}.

Die Integration der Differentialgleichungen für die Anodenströme liefert genau wie oben zwischen den Stromwerten an den Grenzen der 4 Teilintervalle die folgenden (30) und (31) entsprechenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} i_s(\alpha') &= i_s(\alpha) + E_s && \text{für } s = 1 \text{ bis } s = n \\ i_s(\beta) &= i_s(\alpha') + F_s && \text{für } s = 0 \text{ bis } s = n \\ i_s(\rho') &= i_s(\beta) + G_s && \text{für } s = 0 \text{ bis } s = n - 1 \\ i_s(\gamma) &= i_s(\beta') + H_s && \text{für } s = 1 \text{ bis } s = n - 1. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten in Analogie zu (29)

$$E_s = \frac{1}{X} \int_{\alpha}^{\alpha'} \left[e_s - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k \right] dx \qquad (42)$$

$$\left.\begin{aligned}
F_s &= \frac{1}{X}\int\limits_{\alpha'}^{\beta}\left[e_s - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_k\right]dx \\
G_s &= \frac{1}{X}\int\limits_{\beta}^{\beta'}\left[e_s - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e_k\right]dx \\
H_s &= \frac{1}{X}\int\limits_{\beta'}^{\gamma}\left[e_s - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} e_k\right]dx
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Zu diesen aus den Differentialgleichungen gewonnenen Beziehungen treten die (32), (33), (34) entsprechenden Grenzbedingungen hinzu:

$$\begin{aligned}
i_1(\alpha) &= 0 \\
i_0(\alpha') &= 0 \\
i_n(\beta) &= 0 \\
i_0(\beta') &= 0 \\
i_s(\gamma) &= i_{s+1}(\alpha)\,.
\end{aligned}$$

α ist dabei gleich dem Zündwinkel α_n für n Phasen, α' ist um $\frac{2\pi}{p}$ größer als der Zündwinkel α_{n+1} für $(n+1)$ Phasen. Wie früher sei $\gamma = \alpha + \frac{2\pi}{p}$. Unbekannt sind noch die Löschwinkel β und β'. Wenn wir sie zunächst als bekannt voraussetzen, so genügen die aufgestellten Gleichungen zur rekursiven Berechnung der Anfangs- und Endwerte der Ströme in den 4 Teilintervallen der Periode $\frac{2\pi}{p}$. Es ist also möglich, das den Gleichungen (35) entsprechende Schema aufzustellen.

	$i_0(\alpha') = 0$	$i_0(\beta) = F_0$	$i_0(\beta') = F_0 + G_0$	
$i_1(\alpha) = 0$	$i_1(\alpha') = E_1$	$i_1(\beta) = E_1 + F_1$	$i_1(\beta') = E_1 + F_1 + G_1$	$i_1(\gamma) = E_1 + F_1 + G_1 + H_1$

usw. bis schließlich:

$$i_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} E_k + \sum_{k=1}^{n-1} F_k + \sum_{k=1}^{n-1} G_k + \sum_{k=1}^{n-1} H_k \quad\Big|\quad i_n(\alpha') = \sum_{k=1}^{n} E_k + \sum_{k=1}^{n-1} F_k + \sum_{k=1}^{n-1} G_k + \sum_{k=1}^{n-1} H_k$$

$$i_n(\beta) = \sum_{k=1}^{n} E_k + \sum_{k=1}^{n} F_k + \sum_{k=1}^{n-1} G_k + \sum_{k=1}^{n-1} H_k$$

Nun muß in diesem Schema $i_0(\beta') = 0$ sein, also

$$F_0 + G_0 = \int\limits_{\alpha'}^{\beta}\left[e_0 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_k\right]dx + \int\limits_{\beta}^{\beta'}\left[e_0 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e_k\right]dx = 0\,.$$

α' ist bekannt. Wäre β es ebenfalls, so folgte aus dieser Gleichung der Winkel β', und zwar müßte, solange die Voraussetzungen dieser Ableitung erfüllt sind, $\beta' < \gamma$ ausfallen. Auch $i_n(\beta)$ muß verschwinden. Das ist der Fall, denn addieren wir

$$i_n(\beta) = \sum_{k=1}^{n} E_k + \sum_{k=1}^{n} F_k + \sum_{k=1}^{n-1} G_k + \sum_{k=1}^{n-1} H_k$$

und

$$0 = F_0 + G_0,$$

so resultiert

$$i_n(\beta) = \sum_{k=1}^{n} E_k + \sum_{k=0}^{n} F_k + \sum_{k=0}^{n-1} G_k + \sum_{k=1}^{n-1} H_k$$

Jede dieser 4 Summen ist nach (42) identisch Null. Genau wie früher findet man den Gleichstrom J zu

$$J = \sum_{k=1}^{n} i_k(\alpha)$$

$$J = \sum_{k=1}^{n} (n-k)[E_k + F_k + G_k + H_k].$$

Nun ist aber

$$E_k + F_k + G_k + H_k =$$

$$\frac{1}{X}\left[\int_{\alpha}^{\gamma} e_k\,dx - \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k\,dx - \int_{\alpha'}^{\beta} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_k\,dx - \int_{\beta}^{\beta'} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e_k\,dx - \int_{\beta'}^{\gamma} \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} e_k\,dx\right]$$

oder

$$= \frac{1}{X}\left[\int_{\alpha}^{\gamma} e_k\,dx - \frac{2\pi}{p} G\right],$$

wo G wieder die Gleichspannung bedeutet. Dies in den Ausdruck für J eingesetzt und nach G aufgelöst, liefert

$$G = \frac{1}{n(n-1)\frac{\pi}{p}}\left[\int_{\alpha_n}^{\alpha_n + \frac{2\pi}{p}} (n-k)\, e_k\,dx - J X\right]$$

in genauer Übereinstimmung mit (41). Daraus folgt nun, in welcher Weise der Übergang von n zu (n + 1) brennenden Phasen vonstatten geht. Sobald β den Wert $\left(\alpha_{n+1} + \frac{2\pi}{p}\right)$ erreicht hat, setzt der Vorläufer des Anodenstromes ein. Die geradlinige Stromspannungscharakteristik für n brennende Phasen bleibt aber unverändert in Geltung, wie wir soeben bewiesen haben. Wie lange? Offenbar so lange, bis der Löschwinkel des Vorläufers den Wert $\left(\alpha_n + \frac{2\pi}{p}\right)$ erreicht, d. h. bis zu der Belastung mit dem Anodenstromverlauf III des Bildes 32. Von dieser Belastung an muß aber unbedingt die gradlinige Charakteristik für (n + 1) brennende Phasen gelten. Der Schnittpunkt der Geraden n und (n + 1) entspricht folglich dem Betriebszustand der Kurve III in Bild 32. Die in Wirklichkeit durchlaufene Charakteristik ist also einfach der durch die Geraden n = 2 bis p bestimmte Polygonzug, wie er für den 6-Phasengleichrichter im Kurvenblatt Bild 25 eingetragen ist. Hiermit sind unter den gemachten Voraussetzungen die Verhältnisse von Leerlauf bis Kurzschluß geklärt.

Die hier gegebene Theorie wird durch den in Kapitel 6 des ersten Teiles beschriebenen Versuch bestätigt. Die im Kurvenblatt Bild 25 eingetragenen Meßpunkte der Stromspannungscharakteristik liegen recht genau auf den 5 berechneten Geradenstücken. Die kleinen Differenzen dürften, wie schon früher erwähnt wurde, auf den Unterschied zwischen dem dynamischen und dem statisch gemessenen Lichtbogenabfall zurückzuführen sein. Andererseits fallen die gemessenen Werte



von $\frac{A}{J_k}$, wo A der Effektivwert des Anodenstromes bedeutet, sehr genau auf die nach dem in diesem Kapitel beschriebenen graphischen Verfahren ermittelten Kurve. Auch die Oszillogramme sind ein Beweis für die Richtigkeit der Theorie. Die der Tabelle dieses Kapitels entnommenen Zündwinkel sind in sie eingetragen. Man sieht, daß sie recht gut mit den oszillographierten Werten übereinstimmen. Die Oszillogramme bestätigen ferner das Auftreten der Vorläufer beim Übergang von einer Geraden der Stromspannungscharakteristik zur nächsten. Die Belastungen der Oszillogramme sind derart gewählt worden, daß sie abwechselnd je einen Belastungspunkt kurz vor und kurz nach dem Übergang von einer Geraden zur nächsten veranschaulichen. Um die Oszillogramme auf das Kurvenblatt Bild 25 beziehen zu können, sind dort die Abszissenwerte $\frac{J}{J_k}$, für welche Oszillogramme aufgenommen wurden, durch Pfeile und Nummern kenntlich gemacht worden. Oszillogramm 1 zeigt den beim Übergang von der Geraden $n = 2$ zu $n = 3$ auftretenden Vorläufer. Dessen Spitze liegt genau um 120^0 vom zweiten Löschpunkt des Anodenstromes entfernt. Beim Oszillogramm 2 befinden wir uns bereits auf der Geraden $n = 3$; die Anodenstromkurve weist während einer vollen Periode 2π nur einen Zünd- und einen Löschpunkt auf. Die weiteren Oszillogramme zeigen Betriebszustände bei sukzessiv wachsender Belastung, das eine Oszillogramm jeweilen solche mit, das nächste solche ohne Vorläufer.

In der Folge sollen nun die analytischen Betrachtungen dieses Kapitels ausgedehnt werden auf den allgemeineren Fall, daß auch im Primärnetz Reaktanzen vorhanden sind und zwischen den verschiedenen Phasen magnetische Kopplungen bestehen.

8. Allgemeine Betrachtungen über die Stromspannungsverhältnisse.

Die Gleichrichteranlage, welche wir den ziemlich allgemein gehaltenen Überlegungen dieses Kapitels zugrunde legen wollen, besteht aus einem speisenden Mehrphasennetz mit Generator, dem Gleichrichtertransformator und einem p-Phasengleichrichter. Wir machen folgende vereinfachende Annahmen:

1. Die ganze Anordnung sei vollkommen symmetrisch bezüglich der p-Phasen des Gleichrichters.
2. Die Anlage sei mit Einschluß des Generators bis zu den Klemmen des Gleichstromnetzes verlustlos.
3. An allen Reaktanzen bestehe Proportionalität zwischen Strom und Spannung.
4. Die Anlage sei kapazitätsfrei.
5. Die Magnetisierungsströme des Transformators seien vernachlässigbar klein.
6. Der Gleichstrom werde durch eine unendlich große Kathoden-Drosselspule zeitlich konstant gehalten.

Mit Ausnahme von 1. werden also insbesondere über die Schaltung des Transformators und über evtl. vorhandene zusätzliche Reaktanzen und magnetische Kopplungen keine Annahmen gemacht. Transformatoren mit Zickzack- oder Polygonschaltung, Anlagen mit Anoden- und Saugdrosselspulen fallen somit unter die gegenwärtigen Betrachtungen.

Bedeutet s_k den Momentanwert der Spannung der k^{ten} Anode gegenüber der negativen Klemme des Gleichstromnetzes und schreiben wir an Stelle von $\frac{d\,i_k}{dx}$ abkürzend wie früher i_k, so gilt offenbar das folgende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} i_k &= 0 \\ s_k + \sum_{l=1}^{p} a_{kl}\, i_l &= e_k \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Denn e_k sind die sinusförmig vorausgesetzten Werte der Spannungen s_k im Leerlauf. Sie sind also bestimmt durch die EMKe des Generators. Und die Spannungsabfälle

$$\sum_{l=1}^{p} a_{kl}\, i_l$$

pro Phase sind zufolge der Annahmen 2 bis 5 lineare homogene Funktionen der Änderungsgeschwindigkeiten der Ströme. a_{kk} ist, reduziert auf die Sekundärseite, die resultierende Eigenreaktanz der k^{ten} Phase der gesamten Anlage, $a_{kl} = a_{lk}$ ebenso die resultierende magnetische Kopplung zwischen den Phasen k und l. Wegen Annahme 1 sind alle $a_{kk} = a_{ll}$ unter sich gleich und ferner gilt

$$a_{kl} = a_{k+r,\, l+r}.$$

Brennen zur Zeit x allein die Anoden 1 bis n, so sind die Ströme i_{n+1} bis i_p vernachlässigbar kleine Rückströme und

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = g(x)$$

ist der Momentanwert der sogenannten Anodenspannung. Das Gleichungssystem (43) reduziert sich daher ausführlich geschrieben auf:

$$\left.\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n &= 0 \\ g + a_{11} i_1 + a_{12} i_2 + a_{13} i_3 + \ldots + a_{1n} i_n &= e_1 \\ g + a_{21} i_1 + a_{22} i_2 + a_{23} i_3 + \ldots + a_{2n} i_n &= e_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ g + a_{n1} i_1 + a_{n2} i_2 + a_{n3} i_3 + \ldots + a_{nn} i_n &= e_n \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

$$\left.\begin{aligned} s_{n+1} + a_{n+1,1} i_1 + a_{n+1,2} i_2 + a_{n+1,3} i_3 + \ldots + a_{n+1,n} i_n &= e_{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ s_p + a_{p1} i_1 + a_{p2} i_2 + a_{p3} i_3 + \ldots + a_{pn} i_n &= e_p \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Die (n + 1) Gleichungen (44) erlauben die Berechnung der (n + 1) Unbekannten $g(x)$, i_1, i_2 bis i_n, die (p — n) Gleichungen (45) dienen zur Berechnung der Ventilspannungen $[s_{n+1} - g(x)]$ bis $[s_p - g(x)]$ der sperrenden Anoden. Diese Ventilspannungen interessieren hier — abgesehen von ihrer Bedeutung für die physikalischen Vorgänge im Gleichrichter — zur Berechnung der Zündmomente, denn eine sperrende Anode r wird dann zünden, wenn ihre Ventilspannung den Wert Null erreicht, oder wenn $s_r = g(x)$ wird.

Numerieren wir die Kolonnen der Determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (46)$$

von 0 bis n und bedeuten Δ_{0n} und Δ_{kn} die Determinanten, die entstehen, wenn in Δ_n die Glieder der 0ten bzw. k^{ten} Kolonne ersetzt werden durch die absoluten Glieder 0, e_1, e_2 .... e_n der (n + 1) Gleichungen (44), so sind



$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \frac{\Delta_{0n}}{\Delta_n} \\ \frac{di_k}{dx} &= \frac{\Delta_{kn}}{\Delta_n} \qquad \text{für } k = 1 \text{ bis } n, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

die zu (25) und (26) des vorhergehenden Kapitels entsprechenden Gleichungen. Entwickelt man Δ_{0n} nach Unterdeterminanten der 0ten Kolonne, so folgt aus den Symmetrieeigenschaften von Δ_n, daß die Zeitvektoren $g(x)$ und $\sum_{k=1}^{n} e_k$ miteinander in Phase sind, aber es gilt nicht mehr die einfache Beziehung (25).

Brennen wie in Bild 26 von α bis β die Anoden 1 bis n, von β bis $\gamma = \alpha + \frac{2\pi}{p}$ die Anoden 1 bis $n-1$, so folgen in gleicher Weise wie in Kapitel 7 der Gleichstrom J und die Gleichspannung G zu

$$\left.\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^{n} (n-k)(E_{kn} + F_{kn}) \\ \frac{2\pi}{p} G &= E_{0n} + F_{0n} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Die Funktionen E_{kn} und F_{kn} haben die zu (29) entsprechende Bedeutung

$$\left.\begin{aligned} E_{kn} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta_n} dx \\ F_{kn} &= \int_{\beta}^{\gamma} \frac{\Delta_{k,n-1}}{\Delta_{n-1}} dx \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Sind die Anzahlen n bzw. $(n-1)$ der brennenden Anoden und der Zündwinkel α innerhalb eines gewissen Belastungsbereiches unverändert, was wir nun annehmen wollen und was wir für die einfachen Verhältnisse des Kapitels 7 bewiesen haben, so ist (48) eine Parameterdarstellung in β von J und G. Wir zeigen nun, daß in einem solchen Belastungsbereich die S t r o m s p a n n u n g s c h a r a k t e r i s t i k noch immer g e r a d l i n i g verläuft.

Ist D_{kn} die Determinante, welche aus

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \tag{50}$$

entsteht, wenn man die Glieder der k^{ten} Kolonne — numeriert von 1 bis n — ersetzt durch 0, 1, 1 . . . . 1, so läßt sich zeigen, daß folgende Identität besteht:

$$\frac{\Delta_{kn}}{\Delta_n} - \frac{\Delta_{k,n-1}}{\Delta_{n-1}} = -\frac{D_{kn}}{D_n}\left[\frac{\Delta_{0n}}{\Delta_n} - \frac{\Delta_{0,n-1}}{\Delta_{n-1}}\right]. \tag{51}$$

Der Beweis ist einfach: Das Gleichungssystem (44) wird einmal angeschrieben für n brennende Anoden mit den Unbekannten $g(x)$, i_1 bis i_n und dann für $n-1$ brennende Anoden mit den Unbekannten $g'(x)$, i_1' bis i_{n-1}'. Berechnet man nun aus diesen Gleichungen i_k und i_k' und damit auch die Differenz $(i_k - i_k')$, so läßt sich $(i_k - i_k')$ anderseits auch so bestimmen, daß man zuerst die 2 Gleichungssysteme entsprechend voneinander subtrahiert und aus dem resultierenden Gleichungssystem die Unbekannten $(i_k - i_k')$ direkt ausrechnet. Die Resultate beider Rechnungen

müssen einander gleich sein, was die Identität (51) nach sich zieht. Damit läßt sich aber für die Gleichungen (48) schreiben:

$$J = \sum_{k=1}^{n} (n-k) \left\{ \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{\Delta_{k,n}}{\Delta_n} dx + \frac{D_{kn}}{D_n} \int_{\beta}^{\gamma} \left(\frac{\Delta_{0\,n}}{\Delta_n} - \frac{\Delta_{0,n-1}}{\Delta_{n-1}} \right) dx \right\}$$

und da

$$\frac{2\pi}{p} G = \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{\Delta_{0\,n}}{\Delta_n} dx - \int_{\beta}^{\gamma} \left(\frac{\Delta_{0\,n}}{\Delta_n} - \frac{\Delta_{0,n-1}}{\Delta_{n-1}} \right) dx$$

folgt die gerade Linie

$$\frac{2\pi}{p} G \sum_{k=1}^{n} (n-k) \frac{D_{kn}}{D_n} = \sum_{k=1}^{n} (n-k) \int_{\alpha}^{\left(\alpha_n + \frac{2\pi}{p}\right)} \left[\frac{\Delta_{k,n}}{\Delta_n} + \frac{D_{kn}}{D_n} \frac{\Delta_{0,n}}{\Delta_n} \right] dx - J \tag{52}$$

als Stromspannungscharakteristik.

Für die Berechnung des Zündwinkels α der Phase 1 betrachten wir zwei Zeitmomente $(\alpha - \delta\alpha)$ und $(\alpha + \delta\alpha)$, die α unmittelbar vorausgehen bzw. nachfolgen. In $(\alpha - \delta\alpha)$ brennen die Anoden 2 bis n und das Gleichungssystem (43) degeniert zu

$$\sum_{k=2}^{n} i_k' = 0$$

$$s_1(x) + \sum_{l=2}^{n} a_{1l}\, i_l' = e_1$$

$$g'(x) + \sum_{l=2}^{n} a_{kl}\, i_l' = e_k \qquad k = 2 \text{ bis } n$$

für die $(n+1)$ Unbekannten $g'(x)$, i_2' bis i_n' und $s_1(x)$.

In $(\alpha + \delta\alpha)$ brennen bereits die Anoden 1 bis n und die entsprechenden Gleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \\ &g(x) + \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, i_l = e_k \qquad k = 1 \text{ bis } n. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Subtrahiert man von diesen Gleichungen für $(\alpha + \delta\alpha)$ die entsprechenden des Systems für $(\alpha - \delta\alpha)$, macht den Grenzübergang $\delta\alpha = 0$ und berücksichtigt, daß dabei, wenn α der Zündpunkt sein soll, $s_1(x) = g'(x)$ werden muß, so resultiert ein System von $(n+1)$ homogenen, linearen Gleichungen in den Unbekannten

$$g(x) - g'(x); \quad i_1; \quad i_2 - i_2'; \quad i_3 - i_3'; \quad \ldots\ldots\ldots \; i_n - i_n'.$$

Diese müssen also identisch verschwinden, woraus für $x = \alpha$ folgt

$$\left.\begin{aligned} &g(x) = g'(x) \\ &\frac{di_1}{dx} = 0; \quad \frac{di_2}{dx} = \frac{di_2'}{dx}; \quad \ldots\ldots\ldots \; \frac{di_n}{dx} = \frac{di_n'}{dx}. \end{aligned}\right| \tag{54}$$

Die Anodenspannung $g(x)$ und die Anodenströme, sowie ihre ersten Differentialquotienten nach der Zeit verlaufen demnach im Zündpunkt stetig, insbesondere setzt der neu zündende Strom mit horizontaler Tangente ein (Zündung ohne Stoß). Nach (54) bestimmt sich also α aus

$$\Delta_{1n} = 0. \tag{55}$$

Die Zündwinkel hängen also allein ab von den Reaktanzkoeffizienten a und der Anzahl n der gleichzeitig brennenden Anoden. Solange n sich nicht ändert, ist α unabhängig von der Belastung.

Ist $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, so liegen dieselben Verhältnisse vor, wie in Kapitel 7. Beim Übergang von α_n zu α_{n+1} tritt auch zuerst bei α_{n+1} ein Vorläufer auf, und es kann in Verallgemeinerung der Betrachtungen von Kapitel 7 bewiesen werden, daß die „Gerade n" erhalten bleibt als Stromspannungscharakteristik bis zu der Belastung, wo der Vorläufer sich bei α_n an den eigentlichen Verlauf des Anodenstromes anschließt. Von dieser Belastung an gilt dann die „Gerade n + 1".

Die magnetischen Kopplungen können bewirken, daß $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ wird. In diesem Falle tritt kein Vorläufer auf. Denn von der Belastung an, wo der Löschpunkt des Stromes i_{n+1} den Zündpunkt α_n von i_1 überschreitet (Bild 34), kann i_1 nicht mehr bei α_n zünden. Solange i_{n+1} zwischen α_n und α_{n+1} erlöscht, zündet i_1 aber auch nicht bei α_{n+1}, denn im Moment, wo i_{n+1} erlöscht, fließen nur noch die Ströme i_2 bis i_n und unter diesen Verhältnissen überschreitet die Anode 1 bereits im Punkte α_n das Potential der brennenden Anoden und hätte infolgedessen schon bei α_n zünden müssen. Durch das Erlöschen von i_{n+1} zwischen α_n und α_{n+1} springt also das Potential der Anode 1 plötzlich auf einen Wert, der höher liegt als das Potential der brennenden Anoden, i_1 setzt also mit endlicher Tangente (Zündung mit Stoß) im selben Augenblick ein, wo i_{n+1} erlöscht. Zugleich erfahren in diesem Zeitpunkte α, solange $\alpha_{n+1} > \alpha > \alpha_n$ ist, alle andern Ströme eine Unstetigkeit in ihrer Tangente.

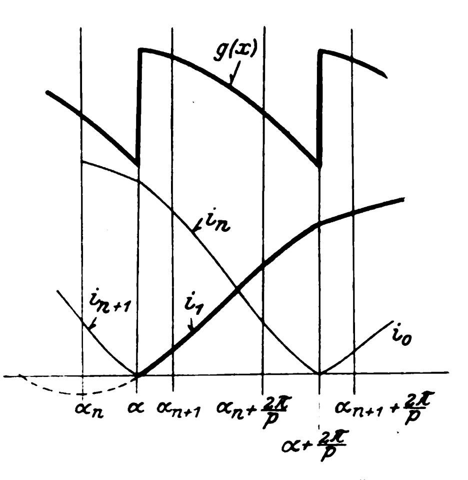


Bild 34. Zündung mit Stoß. Übergang von n zu (n + 1) überlappenden Phasen.

Die Anodenspannung g (x) verläuft dabei über die ganze Periode von α bis $\left(\alpha + \frac{2\pi}{p}\right)$ nach einer Sinuslinie, die in Phase ist mit der Spannung $\sum_{k=1}^{n} e_k$. Von der Belastung an, wo der Löschpunkt von i_{n+1} den Zündwinkel α_{n+1} überschreitet, ist der Übergang von n zu (n + 1) überlappenden Phasen vollzogen, und die Zündung von i_1 geschieht von da an normal bei α_{n+1}.

Solange $\alpha_{n+1} > \alpha > \alpha_n$ ist, berechnen sich Gleichspannung und Gleichstrom nach

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi}{p} G &= \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{p}} \frac{\Delta_{0n}}{\Delta_n} dx \\ J &= \sum_{k=1}^{n} (n-k) \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{p}} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta_n} dx \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

J und G sind also trigonometrische Funktionen von α und lassen sich auf die Form bringen:

$$G = a \cos(\alpha - \varphi) + b$$
$$J = c \cos(\alpha - \psi) + d\,.$$

a, b, c, d, φ, ψ sind von α unabhängig. Die Variablen G und J stellen folglich in Funktion des Parameters α eine Ellipse dar. Die Stromspannungscharakteristik ist in dem Belastungsbereich $\alpha_{n+1} > \alpha \geq \alpha_n$ ein Ellipsenbogen, von dem man übrigens allgemein zeigen kann, daß er sich an die vorausgehende und nachfolgende Gerade n bzw. (n + 1) berührend anschließt.

Die Stromspannungscharakteristik setzt sich demnach aus einzelnen Geradenstücken zusammen, die direkt aneinander stoßen können oder durch je einen Ellipsenbogen unter sich verbunden sind. Weitere Komplikationen, die auftreten können (z. B. 2 Vorläufer), sollen hier nicht untersucht werden. Es kam uns allein darauf an, im ersten Teil dieser Arbeit die einfachsten Fälle durchzurechnen, die heute schon von praktischer Bedeutung sind, und im zweiten Teil einen Ausblick zu geben auf kompliziertere Verhältnisse, um die Methoden zu entwickeln, mit denen sie sich behandeln lassen.

Der ideelle Kurzschlußpunkt der Charakteristik läßt sich noch leicht angeben. Genau wie in Bild 12 des ersten Teiles brennen auch hier alle Anoden gleichzeitig und die Wechselanteile der Anodenströme eilen den zugehörigen Phasenspannungen um 90^0 nach, woraus sich für den k^{ten} Anodenstrom ergibt

$$i_k = K\sqrt{2}\left\{1 - \cos\left[x + (k-1)\frac{2\pi}{p}\right]\right\}$$

Die Amplitude $K\sqrt{2}$ folgt aus den Gleichungen (43) mit $s_k = 0$, z. B. aus

$$\sum_{k=1}^{p} a_{1k}\frac{di_k}{dx} = e_1$$

zu

$$K = \frac{E}{\sum\limits_{k=1}^{p} a_{1k}\cos\left[(k-1)\frac{2\pi}{p}\right]}$$

Daraus ergibt sich für den Kurzschlußstrom J_k im Gleichstromnetz:

$$J_k = \frac{pE\sqrt{2}}{\sum\limits_{k=1}^{p} a_{1k}\cos\left[(k-1)\frac{2\pi}{p}\right]} \tag{57}$$

9. Anwendung auf den 6-Phasengleichrichter.

Wir wollen jetzt die allgemeinen Betrachtungen des vorausgehenden Kapitels auf den Fall des 6-Phasengleichrichters anwenden. Es bezeichne — reduziert auf die Sekundärseite — T die Eigenreaktanz der Phase 1, U die Gegenreaktanz der Phasen 1 und 2, V die der Phasen 1 und 3 und W die der Gegenphasen 1 und 4. Durch diese 4 Reaktanzen T, U, V, W sind die magnetischen Verhältnisse gekennzeichnet. Die Determinante (46) geht damit über in

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & T & U & V & W & V & U \\ 1 & U & T & U & V & W & V \\ 1 & V & U & T & U & V & W \\ 1 & W & V & U & T & U & V \\ 1 & V & W & V & U & T & U \\ 1 & U & V & W & V & U & T \end{vmatrix}$$

Aus ihr und den Phasenspannungen e_1 bis e_6 lassen sich die Stromspannungsverhältnisse der Gleichrichteranlage berechnen. Wir beschränken uns aber auf die 2 Fälle, wo höchstens 2 oder 3 Phasen gleichzeitig brennen, also auf $n = 2$ bzw. $n = 3$ und den trivialen Fall $n = 1$.

Vermöge der Gleichungen (47) folgen zuerst die Momentanwerte der Anodenspannung und der Änderungsgeschwindigkeiten der Ströme.

Für $n = 1$ sind

$$g(x) = \frac{\Delta_{01}}{\Delta_1} = e_1 \tag{58}$$

$$\frac{di_1}{dx} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = 0 \tag{59}$$

und für $n = 2$ folgen

$$g(x) = \frac{\Delta_{02}}{\Delta_2} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \tag{60}$$

$$\frac{di_1}{dx} = -\frac{di_2}{dx} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_2} = \frac{e_1 - e_2}{2(T-U)}. \tag{61}$$

Die Anodenspannung $g(x)$ ist, wie in Kapitel 2, das arithmetische Mittel der beteiligten Phasenspannungen und die Ströme verlaufen, wie wir sehen werden, nach Bild 6c. Die Gleichungen (2) bis (10) von Kapitel 2 haben auch hier in dem viel allgemeineren Falle Gültigkeit, insofern man nur X durch $T - U$ ersetzt.

Für $n = 3$ werden

$$g(x) = \frac{\Delta_{03}}{\Delta_3} = \frac{3-u}{4-u} e_2 \tag{62}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dx} &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta_3} = \frac{(2-u)e_1 - 2e_3}{u(4-u)(T-U)} \\ \frac{di_2}{dx} &= \frac{\Delta_{23}}{\Delta_3} = \frac{e_2}{(4-u)(T-U)} \\ \frac{di_3}{dx} &= \frac{\Delta_{33}}{\Delta_3} = \frac{-2e_1 + (2-u)e_3}{u(4-u)(T-U)} \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Außer der Reaktanz $T - U$ ist hier nun noch das Verhältnis $u = \frac{T-V}{T-U}$ von Bedeutung. Es heiße das Kopplungsmaß. $g(x)$ und $\frac{di_2}{dx}$ sind in Phase mit e_2.

Die geradlinigen Stromspannungscharakteristiken folgen aus Gleichung (52). Für $n = 2$ findet man

$$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{3}{\pi}\left[1 - (T-U)\frac{J}{E\sqrt{2}}\right] \tag{64}$$

und für $n = 3$

$$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sin(\alpha_3 + 60^0)}\left[1 + 2(T-U)\cos(\alpha_3 + 60^0)\frac{J}{E\sqrt{2}}\right] \tag{65}$$

Zu ihrer Berechnung müssen die Zündwinkel α_2 und α_3 ermittelt werden. Es folgt aus

$$\Delta_{12} = -(e_1 - e_2) = 0 \qquad \alpha_2 = 60^0$$

und aus

$$\Delta_{13} = -e_1[2(T-U) - (T-V)] + 2e_3[T-U] = 0 \qquad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{3-u} \tag{66}$$

Von der Art der magnetischen Kopplung der Phasen hängt es nun ab, ob das Kopplungsmaß

	$u < 2$	also	$\alpha_3 < \alpha_2$
oder	$u = 2$	also	$\alpha_3 = \alpha_2$
oder	$u > 2$	also	$\alpha_3 > \alpha_2$

ausfallen.

Im ersten Fall existiert der in Kapitel 7 und 8 ausführlich behandelte Vorläufer, im zweiten Fall kommen wie aus (64) und (65) ersichtlich die Geraden $n = 2$ und $n = 3$ zur Deckung, im dritten Fall haben wir Zündung mit Stoß und Übergang von der Geraden $n = 2$ zur Geraden $n = 3$ vermittels eines an beide Geraden sich berührend anschließenden Ellipsenbogens. Die Gleichung der Ellipse in Parameterdarstellung folgt aus (56) zu

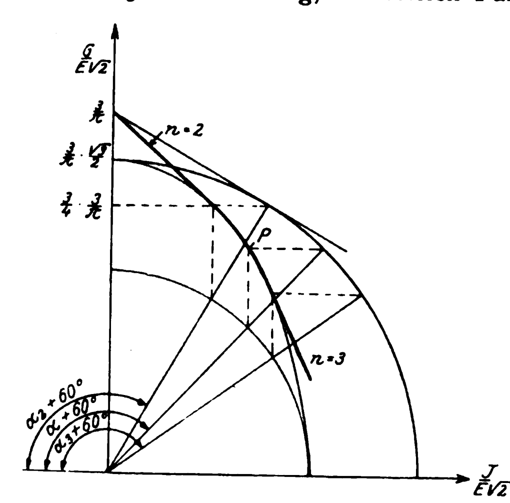


Bild 35. Konstruktion der Stromspannungscharakteristik des 6-Phasengleichrichters.

$$\left.\begin{aligned} \frac{G}{E\sqrt{2}} &= \frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha + 60^0) \\ \frac{J}{E\sqrt{2}} &= -\frac{1}{2(T-U)}\cos(\alpha + 60^0) \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Ihre Halbachsen $\frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\frac{1}{2(T-U)}$ liegen auf den Koordinatenachsen. Die bekannte Konstruktion des zum beliebigen Parameterwerte α gehörigen Ellipsenpunktes P ist in Bild 35 zu sehen. Eine einfache Rechnung zeigt — in Bestätigung des allgemeinen Satzes, den wir in Kapitel 8 erwähnt, aber nicht bewiesen haben —, daß die Charakteristiken (64) und (65) nichts anderes sind als die Tangenten an die Ellipse in den Punkten $\alpha = \alpha_2$ bzw. $\alpha = \alpha_3$. Diese Eigenschaft und die Geltung der Gleichungen (64), (65) und (67) bleiben auch dann erhalten, wenn $\alpha_3 < \alpha_2$, d. h.

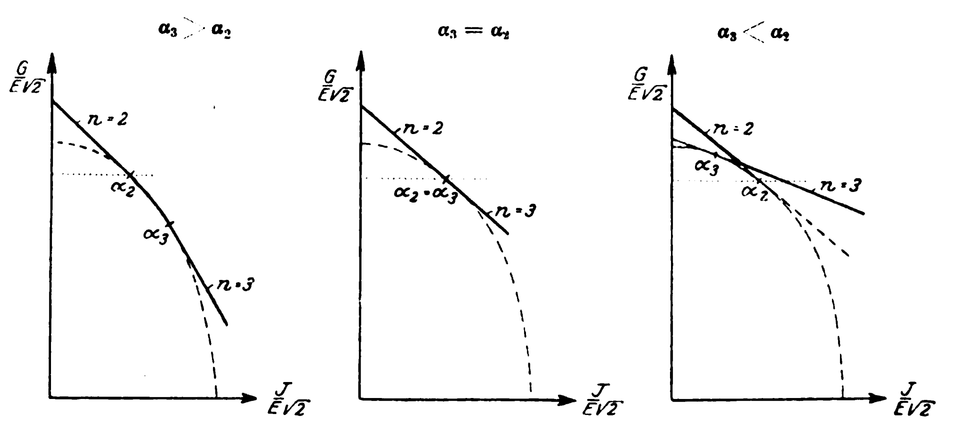


Bild 36. Stromspannungscharakteristik des 6-Phasengleichrichters. Die drei möglichen Fälle des Übergangs von der Geraden $n = 2$ nach $n = 3$.

wenn die Ellipse als Stromspannungscharakteristik keine reale Bedeutung hat. Das liefert eine in allen drei Fällen $\alpha_3 < \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_2$ und $\alpha_3 > \alpha_2$ anwendbare und höchst einfache Konstruktion der Stromspannungscharakteristik von $n = 2$ bis $n = 3$. Durch die Kenntnis von $T - U$ ist nämlich die Ellipse festgelegt und durch das Kopplungsmaß $u = \frac{T - U}{T - V}$ der Zündwinkel α_3 vermöge (66). Man zeichnet

die Ellipse und ermittelt auf ihr die Punkte $\alpha = \alpha_2 = 60^0$ und $\alpha = \alpha_3$. Die Tangenten in ihnen sind die Charakteristiken n = 2 bzw. n = 3. Der reale Verlauf der ganzen Charakteristik von n = 2 bis n = 3 ist für die drei bei verschiedenem Koppllungsmaß u bzw. verschiedenem Zündwinkel α_3 möglichen Fälle $\alpha_3 > \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_2$ und $\alpha_3 < \alpha_2$ in Bild 36 hervorgehoben. Bemerkenswert ist, daß bei Änderung der Gegenreaktanz V allein sich nur u und α_3 ändern, die Ellipse aber erhalten bleibt. Im Fall mit Vorläufer geht die Gerade n = 3 flacher als n = 2, in Fall der Zündung mit Stoß aber steiler, für $\alpha_2 = \alpha_3$ endlich fallen sie zusammen, wie wir es auch direkt aus den Gleichungen (64) und (65) entnommen haben.

Von Interesse ist noch der Kurzschlußpunkt der Charakteristik. Er folgt aus Gleichung (57) zu

$$\frac{J_k}{E\sqrt{2}} = \frac{6}{T + U - V - W}. \tag{68}$$

Wir gehen nun dazu über, für die in Tabelle II (erster Teil) eingehend behandelten 4 Schaltungen des 6-Phasengleichrichters die Reaktanzen T, U, V, W auszudrücken durch die Gesamtreaktanz 4 S der Saugdrosselspule, durch die Streureaktanzen X, Y, S_0 des Transformators und durch die Reaktanzen Z im Netz.

Für den in Kapitel 3 ausführlich behandelten Fall des 6-Phasengleichrichters ohne Saugdrosselspule und mit primär in Dreieck geschalteter Transformatorwicklung (Bild 15) ist die bei brennender Anode 1 erzeugte Anodenspannung

$$g(x) = f_1 - X i_1 - S_0 j$$

Die vom Hauptfluß induzierte Feldspannung f_1 wird aus der ersten der Gleichungen (14) eingesetzt. Es folgt dann

$$g(x) = e_1 - X i_1 + Y j_1 + Z (j_1 - j_2) - Z (j_3 - j_1)$$

Führt man in diese Gleichung die in Kapitel 3 berechneten Werte der Primärströme j_1, j_2, j_3 ein, so ergibt sich

$$g(x) + \left[X + \left(1 - \frac{a}{3}\right) Y + 2 Z\right] i_1 + \left[\frac{a}{3} Y + Z\right] i_2 - \left[\frac{a}{3} Y + Z\right] i_3$$
$$- \left[\left(1 - \frac{a}{3}\right) Y + 2 Z\right] i_4 - \left[\frac{a}{3} Y + Z\right] i_5 + \left[\frac{a}{3} Y + Z\right] i_6 = e_1$$

Aus dieser zu (44) entsprechenden Gleichung lesen wir ab

$$T = X + \left(1 - \frac{a}{3}\right) Y + 2 Z$$
$$U = \frac{a}{3} Y + Z$$
$$V = -\left(\frac{a}{3} Y + Z\right)$$
$$W = -\left[\left(1 - \frac{a}{3}\right) Y + 2 Z\right]$$

Ist eine Saugdrosselspule der Gesamtreaktanz 4 S im Kreise, so verkleinert sich die über die brennende Phase 1 berechnete Anodenspannung g(x) um den Spannungsabfall

$$S (i_1 - i_2 + i_3 - i_4 + i_5 - i_6).$$

Zu T, U, V, W ergeben sich daher die zusätzlichen Beiträge + S, — S, + S, — S, so daß im allgemeinen Falle des 6-Phasengleichrichters mit in Dreieck geschalteter Primärwicklung und endlicher Saugdrosselspule die Reaktanzen T, U, V, W die Werte der Tabelle V annehmen.

Für in Stern geschaltete Primärwicklung werden diese Reaktanzen analog berechnet und sind ebenfalls in Tabelle V angegeben. Da S und S_0 in gleicher Weise in diese Ausdrücke eingehen, folgt, daß die Reaktanz S_0 der erzwungenen Magnetisierung des Transformators genau so wirkt wie die Saugdrosselspule. Man könnte also die Saugdrosselspule vermeiden, indem man durch eine vierte Säule die Transformatorjoche unter sich magnetisch verbindet.

Tabelle V.

	6-Phasengleichrichter mit Primärwicklung in $\triangle$-Schaltung	in $\perp$-Schaltung
T	$S - \frac{2}{3}Y + X + Y + 2Z$	$S + \frac{1}{3}S_0 + X + \frac{2}{3}(Y + Z)$
U	$-\left(S - \frac{2}{3}Y\right) \qquad + Z$	$-\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) \quad + \frac{1}{3}(Y + Z)$
V	$S - \frac{2}{3}Y \qquad - Z$	$S + \frac{1}{3}S_0 \quad - \frac{1}{3}(Y + Z)$
W	$S - \frac{2}{3}Y \quad - Y - 2Z$	$-\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) \quad - \frac{2}{3}(Y + Z)$
T — U	$2\left(S - \frac{2}{3}Y\right) + X + Y + Z$	$2\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) + X + \frac{1}{3}(Y + Z)$
$u = \frac{T - V}{T - U}$	$\frac{X + Y + 3Z}{2\left(S - \frac{2}{3}Y\right) + X + Y + Z}$	$\frac{X + Y + Z}{2\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) + X + \frac{1}{3}(Y + Z)}$
$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{3 - u}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\left(S - \frac{2}{3}Y\right) + X + Y + Z}{3\left(S - \frac{2}{3}Y\right) + X + Y}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) + X + \frac{1}{3}(Y + Z)}{3\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) + X}$
$\frac{1}{2(T - U)}$	$\frac{1}{4\left(S - \frac{2}{3}Y\right) + 2(X + Y + Z)}$	$\frac{1}{4\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) + 2\left(X + \frac{1}{3}(Y + Z)\right)}$

Die für den Verlauf der Geraden $n = 2$ und $n = 3$ wichtige Reaktanz $T - U$ ist in der Tabelle V aufgeführt, ebenso das Kopplungsmaß u, der tg des Zündwinkels α_3 und die mit den Reaktanzen veränderliche Halbachse $\frac{1}{2(T - U)}$ der Ellipse.

Wir sind jetzt in der Lage, den Einfluß der Saugdrosselreaktanz S auf die Stromspannungsverhältnisse genauer zu untersuchen.

Ist $S = 0$, so ergeben sich aus Tabelle V diejenigen Formeln der Kolonnen 1 und 2 von Tabelle II, für die wir die Begründung noch schuldig sind. Insbesondere stimmt $\operatorname{tg} \alpha_3$ dann überein mit $\operatorname{tg} ü_m$, denn von der Überlappung $ü = ü_m = \alpha_3$ an tritt im Anodenstrom ein Vorläufer auf, so daß die Formeln für die Effektivwerte der Ströme und die kVA-Zahlen des Transformators von da an ihre Geltung verlieren. Das ist allerdings nur so lange richtig, als $\alpha_3 < \alpha_2 = 60^0$ ausfällt, denn ist $\alpha_3 > \alpha_2 = 60^0$, so tritt von $ü = \alpha_2 = 60^0$ an Zündung mit Stoß ein und die Anodenströme nehmen einen Verlauf, für den die Tabelle II wieder ungültig wird.

Ist $S \neq 0$, so lassen die Formel (64) zusammen mit den Werten für $T - U$ der Tabelle V erkennen, daß die Gerade $n = 2$ um so steiler abfällt, je größer S ist. Gleichzeitig nimmt mit wachsendem S der Zündwinkel α_3 ab und nähert sich dem

Werte 30°. Für $S = \infty$ würde die Gerade $n = 2$ senkrecht heruntergehen, $\alpha_3 = 30^0$ werden und die Gerade $n = 3$ zusammenfallen mit der Geraden $n = 2$ des 3-Phasengleichrichters. Das sind Verhältnisse, wie sie bei Anlagen mit Saugdrosselspule nahe erreicht werden. Da hier also $\alpha_3 \sim 30^0 < \alpha_2 = 60^0$ ist, tritt von $ü = \alpha_3$ an ein Vorläufer auf. Das Bild 37 zeigt den zeitlichen Verlauf der Anodenspannung g(x) und der Anodenströme für eine Überlappung ü etwas größer als α_3. Von $x = 0$ bis α_3 folgen die Ströme i_2 und i_3 dem über die Phasen 2 und 3 fließenden Kurzschlußstrom. Die Anodenspannung ist $\frac{1}{2}(e_2 + e_3)$. Bei $x = \alpha_3$ zündet der Vor-

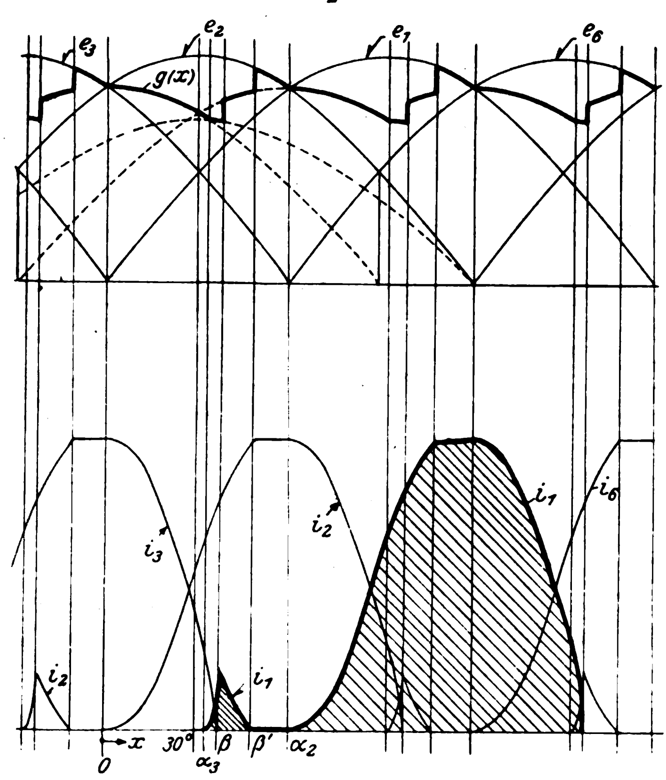


Bild 37. Anodenspannung g(x) und Anodenstrom i_1 des 6-Phasengleichrichters mit Saugdrosselspule kurz vor dem Übergang von $n = 2$ nach $n = 3$.

läufer i_1 mit horizontaler Tangente und wächst bis $x = \beta$, dem Löschwinkel von i_3. Während dieser Zeit folgt g(x) der Gleichung (62) nämlich

$$g(x) = \frac{3\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) + X}{8\left(S + \frac{1}{3}S_0\right) + 3X + \frac{1}{3}(Y + Z)} 2 e_2$$

für Sternschaltung und

$$g(x) = \frac{3\left(S - \frac{a}{3}Y\right) + X + Y}{8\left(S - \frac{a}{3}Y\right) + 3X + 3Y + Z} 2 e_2$$

für Dreieckschaltung und degeneriert in beiden Fällen für

$$S = \infty \text{ zu } g(x) = \frac{3}{4} e_2 \qquad (69)$$

Während bei $x = \alpha_3$ die Gleichspannung stetig verläuft, erleidet sie bei $x = \beta$ einen Sprung nach $g(x) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, denn von $x = \beta$ bis $x = \beta'$, dem Löschwinkel des Vorläufers, brennen die Phasen 1 und 2 allein. Von $x = \beta'$ bis $x = \alpha_2 = 60^0$ fließt $i_2 = J$ allein, und es ist $g(x) = e_2$. Bei $x = \alpha_2 = 60^0$ setzt i_1 abermals mit horizontaler Tangente ein und fließt nun dauernd bis $x = \beta + 120^0$. Das sind die Verhältnisse, solange $\beta' < \alpha_2 = 60^0$ ist. Bei der Belastung, wo $\beta' = 60^0$ wird, verschwindet der Vorläufer und vollzieht sich der Übergang von der Geraden $n = 2$ nach $n = 3$. Der zeitliche Verlauf der Anodenspannung und der Anodenströme bietet von da an keine Besonderheiten, bis die Gerade $n = 3$ ihre Gültigkeit verliert. Um diese für Anlagen mit Saugdrosselspule wichtige Grenzbelastung zu bestimmen, müßte der Zündwinkel α_4 berechnet werden. Das könnte aus $\Delta_{14} = 0$ geschehen. Für den Grenzfall $S = \infty$ führt der folgende Weg rascher zum Ziel.

Führen im Zündpunkte der Anode 6 die Phasen 3, 2 und 1 Strom, so liegt dieser Zündpunkt bei $x = \alpha_4 + 60^0$. Wegen $S = \infty$ ist die Summe der zum selben Dreiphasensystem gehörenden Ströme immer gleich $\frac{J}{2}$, also $i_1 + i_3 = \frac{J}{2} = \text{const.}$ und $i_2 = \frac{J}{2} = \text{const.}$ Da i_2 keine induktiven Spannungsabfälle zur Folge hat, sind für $x = \alpha_4 + 60^0$ die Feldspannungen der Phasen 2 und 6 einander gleich

$$-f_2 = -f_3.$$

Bei Dreieckschaltung müssen primärseitig die Gleichungen (14) von Kapitel 3 gelten. Dabei ist zu berücksichtigen, daß außer

$$i_1 + i_3 = i_2 = \frac{J}{2}$$

noch

$$i_4 = i_5 = i_6 = 0$$

ist. Daraus folgt, daß der Strom j Gleichung (16) verschwindet und daß die Gleichungen (14) sich reduzieren auf

$$f_1 - e_1 = -(Y + 3Z)\, i_1$$
$$f_2 - e_3 = (Y + 3Z)\, i_1$$
$$f_3 - e_5 = 0$$

Die Bedingungsgleichung $f_2 = f_3$ für α_4 geht damit über in

$$e_5 - e_3 = (Y + 3Z)\, i_1$$

Die Anwendung der zweiten Kirchhoffschen Regel auf den Kurzschlußkreis der Sekundärphasen 1 und 3 (siehe Bild 15) ergibt ferner wegen Verschwinden der erzwungenen Magnetisierung — der Strom j ist ja Null —

$$f_1 - f_2 = 2\, i_1 X$$

Werden von oben f_1 und f_2 eingesetzt, so resultiert

$$e_1 - e_3 = 2(X + Y + 3Z)\, i_1 \tag{70}$$

Daraus und aus der Gleichung für $e_5 - e_3$ den Strom i_1 eliminiert, ergibt für den Zündwinkel $\alpha_4 + 60^0$ die Bedingungsgleichung

$$e_5 - e_3 = \frac{Y + 3Z}{2(X + Y + 3Z)}(e_1 - e_3).$$

Setzt man hierin

$$e_1 = \sin(\alpha_4 + 60^0)$$
$$e_3 = \sin(\alpha_4 + 60^0 + 120^0)$$
$$e_5 = \sin(\alpha_4 + 60^0 + 240^0),$$

so folgt



$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2X + 3Y + 9Z}{2X + Y + 3Z}$$

für Dreieckschaltung.

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2X + 3Y + 3Z}{2X + Y + Z}$$

für Sternschaltung berechnet sich in analoger Weise. α_4 liegt in beiden Fällen zwischen 30^0 und 60^0, ist somit größer als $\alpha_3 = 30^0$. Der Übergang von der Geraden $n = 3$ nach $n = 4$ erfolgt also bei einer Anlage mit großer Saugdrosselspule über einen Ellipsenbogen. Die Gerade $n = 3$ gilt offenbar so lange, bis aufeinanderfolgende Ströme eines Dreiphasensystems sich um 60^0 überlappen. Bezogen auf eines der Dreiphasensysteme, wie wir das bei Anlagen mit Saugdrosselspule immer getan haben, ist also der Grenzwinkel der Überlappung, bis zu dem die Gerade $n = 3$ Geltung hat, $ü_m = 60^0$. Berechnet aus der Charakteristik $n = 2$ eines Dreiphasengleichrichters entspricht das einer Gleichspannung

$$G = \frac{3}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{3}{4} E\sqrt{2}$$

Bild 38. Anodenspannung g (x) und Anodenstrom i_1 des 6-Phasengleichrichters mit Saugdrosselspule. Übergang von $n = 3$ nach $n = 4$.

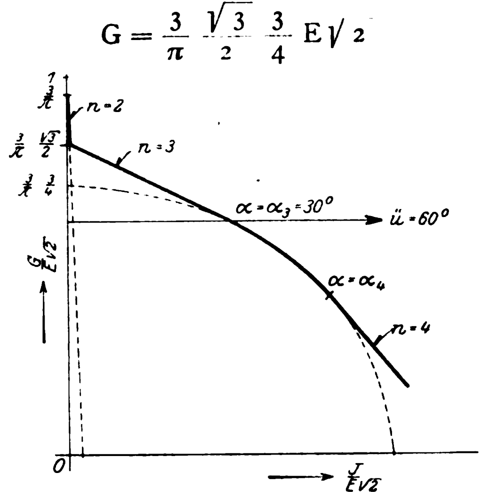


Bild 39. Stromspannungscharakteristik des Sechsphasengleichrichters mit großer Saugdrosselspule.

Der dann folgende Ellipsenbogen ließe sich aus Gleichung (56) berechnen. In dem uns interessierenden Grenzfall $S = \infty$ führt die folgende Betrachtung rascher zum Ziel.

Der Strom i_1 setzt bei $x = \alpha$ mit endlicher Tangente ein (Zündung mit Stoß, Bild 38). Sein Differentialquotient — abkürzend ebenfalls mit i_1 bezeichnet — gehorcht bei Dreieckschaltung der Gleichung (70). i_1 selbst läuft daher nach

$$i_1 = \frac{E\sqrt{6}}{2(X + Y + 3Z)} [\cos(\alpha - 30^0) - \cos(x - 30^0)]$$

Für $x = \alpha + 60^0$ erlöscht der Strom i_3 und i_1 muß den Wert $\frac{J}{2}$ erreicht haben. Aus dieser Bedingung folgt unmittelbar

$$\frac{J}{E\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{X + Y + 3Z} \sin \alpha$$

Im Intervall α bis $\alpha + 60^0$, während der Überlappung der Ströme i_2 und i_3, verläuft die Anodenspannung — vergleiche Gleichung (69) — nach $g(x) = \frac{3}{4} e_2$, wie in Bild 38 eingetragen ist. In bekannter Weise ergibt sich daraus durch Mittelwertsbildung

$$\frac{G}{E\sqrt{2}} = \frac{3}{\pi}\,\frac{3}{4}\cos\alpha$$

Im Belastungsbereich $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ ist also die Stromspannungscharakteristik eine Ellipse mit den Koordinatenachsen als Hauptachsen und den Halbmessern $\frac{9}{4\pi}$ und $\frac{\sqrt{3}}{X+Y+3Z}$. Als Ellipsentangente im Punkte $\alpha = \alpha_4$ ist endlich auch die Gerade $n = 4$ bestimmt. Sie hat bei Dreieckschaltung die Achsenabschnitte

$$\frac{\sqrt{3}}{X+Y+3Z}\,\frac{1}{\sin\alpha_4} \qquad \text{auf der } \frac{J}{E\sqrt{2}}\text{-Achse}$$

und

$$\frac{9}{4\pi}\,\frac{1}{\cos\alpha_4} \qquad \text{auf der } \frac{G}{E\sqrt{2}}\text{-Achse.}$$

Bei Sternschaltung tritt, wie analoge Ableitungen zeigen, überall an Stelle von $X + Y + 3Z$ der Ausdruck $X + Y + Z$.

Zusammenfassend können wir sagen, daß bei großer Saugdrosselspule die Stromspannungscharakteristik wie in Bild 39 dargestellt vom Leerlaufpunkte an zuerst sehr steil abfällt (Gerade $n = 2$), dann ziemlich flach verläuft (Gerade $n = 3$) und hierauf über einen Ellipsenbogen in die steilere Gerade $n = 4$ übergeht. An diese Gerade $n = 4$ schließen sich $n = 5$ und endlich das letzte geradlinige Stück $n = 6$ der Charakteristik an, das im Kurzschlußpunkte Gleichung (68) die Stromachse trifft. Diese letzten Abschnitte der Charakteristik haben wir nicht berechnet.

Abgeschlossen am 9. Januar 1925.



Archiv für Elektrotechnik

XIV. Band. 3. Heft. 1925.

Berechnung der Kapazität von Sammelschienenanlagen.

Von

D. Gábor.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Berlin.)

Erweiterter Auszug aus der Diplomarbeit.

Ziel und Ergebnisse der Arbeit. Zur Berechnung elektrischer Ausgleichsvorgänge, die sich in einer Schaltanlage abspielen können, ist die Kenntnis der Kapazität sämtlicher in Mitleidenschaft gezogener Teile der Anlage, u. a. auch der Sammelschienen notwendig. Diese Kapazität rechnerisch zu bestimmen, ist Ziel dieser Arbeit. Wir beschränken uns auf Anlagen mit rechteckigen Schienen, da die Kapazität der in Höchstspannungsanlagen üblichen runden Schienen mit Hilfe der bekannten Formeln für Freileitungskapazitäten berechenbar ist.

Zum Zwecke der Kapazitätsberechnung ersetzen wir den rechteckigen Querschnitt der Sammelschienen durch eine in bezug auf die Kapazität äquivalente Ellipse. Nach Begründung ihrer Zulässigkeit rechnen wir mit diesem Ersatzschema weiter. Wir entwickeln Näherungsformeln für zwei sehr gebräuchliche Anordnungen und zeigen den Weg, wie in anderen Fällen zu verfahren ist. Als einfache Faustregel finden wir, daß Sammelschienen mit sehr gestrecktem Querschnitt ersetzbar sind durch Rundstäbe, mit einem Durchmesser gleich der halben Langseite des rechteckigen Querschnittes. Diese Faustregel wenden wir endlich auch auf die Berechnung des Durchgriffes von Elektronenröhren mit flachen, parallelen Gitterstegen an.

Einleitung. Die an sich geringe Kapazität von Sammelschienen kann bei Ausgleichvorgängen eine wesentliche Rolle spielen. Es liegt die Möglichkeit vor,

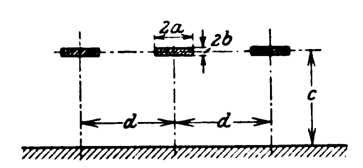


Bild 1. Sammelschienenanordnung I.

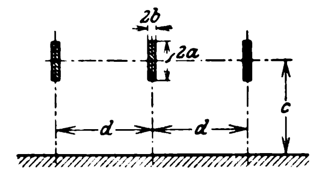


Bild 2. Sammelschienenanordnung II.

daß diese Kapazität mit den Induktivitäten von Schutzdrosselspulen, Auslösespulen usw. Schwingungskreise bildet, welche bei Schaltvorgängen zum Schwingen angeregt werden. Daß hierbei u. U. bedeutende Überspannungen auftreten können, hat zum ersten Male W. Petersen nachgewiesen[1]). Es ist daher von Wichtigkeit, sich über die Größe dieser Kapazität Rechenschaft zu geben. Die Anforderungen an die Genauigkeit einer solchen Berechnung können keine sehr hohen sein. Die Mannigfaltigkeit der Ausführungen von Sammelschienenanlagen schließt eine genaue Berechnung, die alle Zwischenwände, Durchführungen usw. berücksichtigt, von vornherein aus. Aber selbst bei Kenntnis des genauen elektrostatischen Wertes der Kapazität könnte eine Berechnung des Ausgleichvorganges, welche die Spulen als konzentrierte

[1]) W. Petersen, Arch. f. Elektrot. Bd. I, S. 233. 1912.

Induktivitäten und die Sammelschienen als konzentrierte Kapazitäten behandelt, nur eine u. U. recht rohe Näherungslösung geben.

Sammelschienen mit rechteckigem Querschnitt (Seitenverhältnis etwa 2b : 2a = 1 : 10) werden meistens für Betriebsspannungen von ungefähr 2—30 kV ausgeführt. Zwei viel gebrauchte Anordnungen, die wir mit I und II bezeichnen, zeigen die Bilder 1 und 2.

Wenn wir von dem Einfluß der Enden, der Querwände, der Leitungsansätze und der Isolatorstützen zunächst absehen, so können wir das elektrische Feld als eben betrachten. Die Wand denken wir uns leitend, wir geben ihr das Potential Null und ersetzen sie durch die elektrischen Spiegelbilder der Schienen. Die Schienen werden mit 1, 2, 3...n, ihre Spiegelbilder 1′, 2′, 3′...n′ bezeichnet und die auf sie bezüglichen Größen mit den entsprechenden Indizes versehen.

Bezeichnen wir die Ladungen pro Längeneinheit mit q_i und die Spannungen gegen Erde (Wand) mit e_i, so gelten die n-Beziehungen

$$q_i = \sum_1^n {}_k C_{ik} e_k, \tag{1}$$

$$C_{ik} = C_{ki} \tag{2}$$

oder die diesen äquivalenten Gleichungen

$$e_i = \sum_1^n {}_k \varDelta_{ik} q_k, \tag{3}$$

$$\varDelta_{ik} = \varDelta_{ki}. \tag{4}$$

Die C_{ik} sind die Maxwellschen Kapazitätskoeffizienten. Die $\varDelta_{ik}$ nennt man Influenzkoeffizienten (Potentialkoeffizienten, elektrische Induktivitäten). Wir führen sämtliche Rechnungen im elektrostatischen Maßsystem durch. Dann sind die C_{ik} und die $\varDelta_{ik}$ reine Zahlen.

Die folgenden Betrachtungen setzen nur voraus, daß in der Nähe der Schienen nicht mehr als eine Wand läuft und daß der Abstand der Schienen nicht klein sei gegen ihre größte Querschnittsabmessung. Diese Annahme trifft bei Hochspannungssammelschienen immer hinlänglich gut zu.

Die äquivalente Ellipse. Leiter von rechteckigem Querschnitt lassen sich mathematisch schwer behandeln. Die exakte Lösung des Potentialproblems liegt bisher nur für ein Rechteck vor und ist durch die Schwarzsche Formel gegeben. Der Ausdruck für das Potential ist sehr unhandlich. Deshalb wollen wir im folgenden die Rechtecke durch passend gewählte Ellipsen ersetzen. Wir werden zeigen, daß jedem Rechteck eine bestimmte Ellipse entspricht, welche gegen hinlänglich entfernte Leiter, mit einer für unsere Zwecke genügenden Genauigkeit, dieselben Teilkapazitäten aufweist wie das Rechteck. Diese Ellipse können wir daher mit Recht die äquivalente nennen.

Wir vereinfachen zunächst das Problem der Kapazitätsberechnung durch folgende Betrachtungen:

Denken wir uns die Schienen 1, 2, 3.... auf die Potentiale e_1, e_2, e_3..., ihre Spiegelbilder 1′, 2′, 3′.... entsprechend auf die Potentiale $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$.... gebracht. Sie tragen dann pro Längeneinheit die Ladungen q_1, q_2, q_3.... bzw. $-q_1$, $-q_2$, $-q_3$....

Die Elektrizitätsmengen auf den Schienen denken wir uns nun in zwei Teile zerlegt:

1. Wir denken uns sämtliche Schienen bis auf eine, i, die wir betrachten, in unendliche Entfernung gerückt. Dieser Schiene erteilen wir die Ladung q_i pro Längeneinheit. Diese verteilt sich dann so auf der Schiene, daß das Potential auf dieser konstant wird. Die entsprechenden Ladungsdichten nennen wir primäre Ladungsdichten oder sprechen auch kurz von primären Mengen.



2. Bringen wir nun die andern Schienen in den Raum und erteilen wir ihnen die Ladungen $q_1 \ldots q_{i-1} \ldots q_{i+1} \ldots q_n$, so wird hierdurch die Ladung der Schiene i nicht verändert, wohl aber ihre Verteilung. Diese denken wir uns entstanden durch Hinzufügen von Elektrizitätsmengen, die wir sekundäre (induzierte) nennen. Die Gesamtladung der sekundären Mengen ist Null. Sie werden durch Influenz erzeugt durch das Feld der auf den andern Schienen befindlichen Ladungen und verteilen sich in solcher Weise, daß sie dieses „fremde Feld" im Innern der Schiene aufheben.

Man kann nun die Kapazitäten angenähert berechnen unter alleiniger Berücksichtigung der primären Mengen. Man nimmt also an, daß jede Schiene ein Feld erzeugt, als wäre sie allein vorhanden. Diese Felder superponieren sich dann einfach. Das Innere der Schienen wird zwar nicht feldfrei, aber wenn dieses Feld nicht zu stark ist, erscheint es als zulässig für das Potential der Schienen, das Potential in ihrem Mittelpunkte einzuführen. Wir werden später nachweisen können, daß dies in vielen Fällen eine zulässige Näherung gibt, da die Berücksichtigung der sekundären Mengen nur eine geringe Korrektur bedingt. Von diesen sehen wir daher zunächst ab und beschränken uns bei der Berechnung der äquivalenten Ellipse auf die primären Mengen. Wir vergleichen also das Feld eines Rechteckes, das allein in seiner Ebene liegt, mit dem Feld einer Ellipse ebenfalls allein in ihrer Ebene. Die beiden Ebenen legen wir so übereinander, wie es Bild 3 zeigt. Die Forderung der Äquivalenz läßt sich dann so formulieren: Tragen Rechteck und Ellipse die gleiche Ladung q und ist das Potential des Rechteckes U, der Ellipse U', wobei U am Rechteck, U' auf der Ellipse den Wert Null annimmt, so schmiegen sich U und U' bei zunehmender Entfernung asymptotisch aneinander, (wobei sie beide ins Unendliche wachsen).

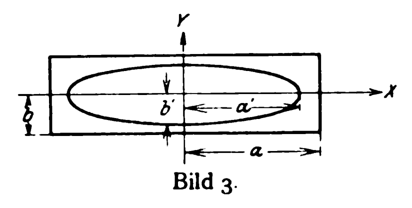


Bild 3.

Dieser Forderung entsprechend bestimmen wir die äquivalente Ellipse durch zwei Bedingungen. Zunächst ist bekannt, daß die Niveaulinien einer geladenen Ellipse eine Schar zu diesen konfokalen Ellipsen bilden. Wir weisen nach, daß auch die Niveaulinien eines Rechteckes bei zunehmender Entfernung mit immer größer werdender Genauigkeit als konfokale Ellipsen anzusehen sind. Man kann nun die Ellipse so bestimmen, daß beide Scharen zusammenfallen. Dies gibt uns eine Bedingung.

Nun könnte sich aber das Potential des Rechteckes U von dem Potential der Ellipse U' bei immer größer werdender Entfernung noch immer um einen endlichen Betrag unterscheiden. Die Forderung $\lim\limits_{P=\infty} (U' - U) = 0$ gibt uns die zweite Bedingung für die äquivalente Ellipse.

Wir schreiten nun zur mathematischen Formulierung dieser Forderungen.

H. A. Schwarz[1]) hat das Potentialproblem für ein beliebiges leitendes Polygon gelöst, indem er eine Formel gab, mit deren Hilfe sich das Äußere des Polygons in der komplexen Z- $(z = x + j y)$ auf das Innere eines Kreises in der komplexen W- $(w = u + j v)$ Ebene konform abbilden läßt. Der Punkt $z = \infty$ in der Z-Ebene entspricht dem Nullpunkt in der W-Ebene. Die Schwarzsche Formel lautet:

$$c_1 z + c_2 = \int \frac{d\,w}{w^2} (w - A)^{1-\alpha} (w - B)^{1-\beta} \ldots \qquad (5)$$

In dieser Formel sind A, B.... die komplexen z-Koordinaten der Eckpunkte des Polygons. $\alpha\pi$, $\beta\pi$.. sind die anliegenden Innenwinkel. c_1 und c_2 sind zwei komplexe Konstanten, sie bedeuten eine ähnliche Vergrößerung, eine Drehung und Verschiebung in der Z-Ebene, wodurch sämtliche ähnliche Polygone in der Z-Ebene

[1]) Riemann-Weber, Part. Differentialgleichungen, 4. Aufl. 1900, § 137.

auf denselben Kreis in der W-Ebene abbildbar werden. Der Radius ϱ des Kreises, auf welchem wir das Polygon abbilden, ist noch zu bestimmen. — Ist nun die Abbildungsaufgabe gelöst, so ist das Potential im elektrostatischen Maßsystem gegeben durch die Formel

$$U = q \log \frac{u^2 + v^2}{\varrho^2}. \tag{6}$$

Unter log verstehen wir immer den natürlichen Logarithmus. In unserem Falle ist nun

$$A = a + jb, \quad B = -a + jb, \quad C = -a - jb, \quad D = a - jb. \tag{7}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Daher wird die Abbildungsformel für das Rechteck:

$$cz = \int \frac{dw}{w^2} \sqrt{(w^2 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2w^2}. \tag{9}$$

Die Integration ist von einem beliebigen festen Ausgangspunkte zum Punkte w auszuführen. Da der feste Ausgangspunkt beliebig wählbar ist, haben wir die Konstante c_2 fortgelassen. c dürfen wir reell und positiv annehmen. Dann entsprechen sich die Koordinatenachsen in der Z- und W-Ebene.

Zur Bestimmung von ϱ setzen wir $w = re^{j\vartheta}$. Dann ist für $r = \varrho$

$$c\,dz = j\frac{d\vartheta}{\varrho}\sqrt{[\varrho^4 + (a^2+b^2)^2]\cos 2\vartheta + 2\varrho^2(b^2 - a^2) + j[\varrho^4 - (a^2+b^2)^2]\sin 2\vartheta}. \tag{10}$$

dz soll nun entweder rein reell oder rein imaginär sein. Dann muß unter dem Wurzelzeichen das imaginäre Glied verschwinden, d. h.

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{11}$$

Nun können wir auch c bestimmen. Wenn der Radikant negativ ist, so läuft z auf einer der Langseiten des Rechteckes. Führen wir ein $\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, so ergibt sich

$$c = 2\int_0^{\Phi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2E(k, \Phi). \tag{12}$$

$E(k, \Phi)$ ist das elliptische Normalintegral zweiter Gattung. Es ist

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} > 1. \tag{13}$$

$$k \sin \Phi = 1. \tag{14}$$

Die Abbildungsaufgabe und hiermit auch das Potentialproblem ist für das Rechteck gelöst. Dasselbe ist nun für die Ellipse mit den Halbachsen a', b' durchzuführen. Dies wird ebenfalls durch Formel (9) geleistet, wenn wir in dieser $a^2 = a'^2 - b'^2$ und $b = 0$ setzen. Dann läßt sich die Integration leicht durchführen und wir erhalten

$$c'z = \frac{a'^2 - b'^2}{w} + w. \tag{15}$$

c' ist reell und positiv. Trennt man den reellen und den imaginären Teil, so ergibt sich

$$c'x = r\cos\vartheta\left[\frac{a'^2 - b'^2}{r^2} + 1\right], \qquad c'y = r\sin\vartheta\left[\frac{a'^2 - b'^2}{r^2} - 1\right]. \tag{16}$$

Dem Kreis mit dem Radius r in der W-Ebene entspricht in der Z-Ebene die Ellipse:

$$\frac{x^2}{\mu + \frac{2}{c'}(a'^2 - b'^2)} + \frac{y^2}{\mu} = 1, \tag{17}$$

$$\mu = \frac{1}{c'^2}\left[r^2 - 2(a'^2 - b'^2) + \frac{(a'^2 - b'^2)^2}{r^2}\right]. \tag{18}$$

Soll die Ellipse (a', b') in der Schar (17) enthalten sein, so muß sein $c' = 2$. Welcher Radius ϱ' entspricht dieser Ellipse? Aus $\mu = b^2$ ergibt sich

$$\varrho' = a' \pm b'. \tag{19}$$

Von den beiden Vorzeichen gilt das Minuszeichen, da der Außenraum der Ellipse einmal überstrichen werden muß, wenn r sich von o bis ϱ' verändert.

$$\varrho' = a' - b'. \tag{20}$$

Hiermit ist die Abbildungsaufgabe auch für die Ellipse gelöst. Wir können nun die erste Äquivalenzbedingung formulieren. Hierzu wandeln wir Formel (9) folgendermaßen um

$$c z = \int \frac{d w}{w^2} \sqrt{\left(a^2 + b^2 - w^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{2 a^2 b^2 w^2}{a^2 + b^2}\right)^2}. \tag{21}$$

Für kleine w, d. h. große z dürfen wir das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen vernachlässigen[1]). Dann läßt sich integrieren und wir erhalten

$$c z = \frac{a^2 + b^2}{w} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} w. \tag{22}$$

Vergleichen wir nun diese Formel mit der Formel (15), der Transformationsgleichung der Ellipse (a', b'). Das dem Punkt z durch die Formel (15) zugeordnete w schreiben wir nun zur Unterscheidung w'. Dann sieht man zunächst: wenn z ins Unendliche wächst, so nähert sich das Verhältnis $\frac{w'}{w}$ einem endlichen Grenzwert

$$\lim_{z=\infty} \frac{w'}{w} = \frac{c}{c'} \frac{a'^2 - b'^2}{a^2 + b^2}. \tag{23}$$

Nun schreiben wir vor, daß auch die zweiten Glieder in (15) und (22) übereinstimmen. Dies ergibt

$$\frac{a'^2 - b'^2}{a^2 - b^2} = \left(\frac{c'}{c}\right)^2. \tag{24}$$

Dies ist der mathematische Ausdruck für die erste Äquivalenzbedingung. Die zweite läßt sich sofort anschreiben. Nach den Formeln (6), (11) und (20) sind die Potentiale

$$U = q \log \frac{u^2 + v^2}{a^2 + b^2}, \tag{25}$$

$$U' = q \log \frac{u'^2 + v'^2}{(a' - b')^2}. \tag{26}$$

Bilden wir nun $\lim_{z=\infty}(U' - U)$ und setzen den Wert von $\frac{w'}{w}$ aus (23) ein, so ergibt sich

$$\lim_{z=\infty}(U' - U) = q \log \frac{u'^2 + v'^2}{u^2 + v^2} \frac{a^2 + b^2}{(a' - b')^2} = q \log \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \left(\frac{a'^2 - b'^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \frac{a^2 + b^2}{(a' - b')^2},$$

$$= q \log \left(\frac{c}{c'}\right)^2 \frac{(a' + b')^2}{a^2 + b^2} = 0. \tag{27}$$

Also lautet die zweite Äquivalenzbedingung

$$\frac{(a' + b')^2}{a^2 + b^2} = \left(\frac{c'}{c}\right)^2. \tag{28}$$

---

[1]) Es könnten sich Bedenken dagegen erheben, daß wir die Vernachlässigung unter dem Integrationszeichen vornehmen. Dies ist jedoch zulässig, weil wir den Ausgangspunkt und damit auch den ganzen Integrationsweg im Gebiete kleiner w annehmen dürfen.

Die Gleichungen sind dimensionslos und man rechnet daher besser mit Verhältniszahlen. Führen wir ein

$$p = \frac{b}{a}, \qquad p' = \frac{b'}{a'}, \qquad q = \frac{a'}{a} \tag{29}$$

so ergibt sich durch Kombination von (24) und (28)

$$\left. \begin{aligned} p' &= p^2, \\ q^2 &= \frac{1}{1+p^2}\left(\frac{c'}{c}\right)^2 \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

Aus der ersten Gleichung sieht man sofort, daß die äquivalente Ellipse immer eine gestrecktere Form hat als das Rechteck. Die zweite Gleichung ergibt bei zahlenmäßiger Auswertung, daß die große Achse der Ellipse immer länger ist als die Langseite des Querschnittes. Die zahlenmäßige Ausrechnung ist insofern nicht ganz einfach, als $\frac{c}{c'}$ ein elliptisches Normalintegral mit einem Modul k größer als 1 ist. Man kann seinen Wert daher nicht unmittelbar aus den Funktionentafeln von Jahnke und Emde entnehmen. Damit man diese Tabellen verwenden kann, muß man $E(k, \Phi)$ erst vermittels der Gaußschen Transformation[1]) auf Normalintegrale erster und zweiter Gattung $F(k_1, \Phi_1)$ und $E(k_1, \Phi_1)$ mit $k_1 < 1$ zurückführen.

Setzen wir

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}. \tag{31}$$

$$2 \sin^2 \varphi_1 = 1 + k \sin^2 \varphi - \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \tag{32}$$

so gilt allgemein

$$E(k, \Phi) = (1 + k) E(k_1, \Phi_1) + (1 - k) F(k_1, \Phi_1) - k \sin \Phi. \tag{33}$$

Es ist $k \sin \Phi = 1$ und

$$\sin \Phi_1 = \sqrt{\frac{1+k}{2k}}. \tag{34}$$

Nach diesen Formeln wurde die untenstehende Tabelle berechnet, welche die Größen p' und q in Abhängigkeit von p enthält.

Tabelle der äquivalenten Ellipsen.

p	0,1	0,25	0,5	0,75	1,0
$E(k_1, \Phi)$	0,9842	0,9379	0,8156	0,6954	0,5711
p'	0,01	0,0625	0,25	0,565	1,0
q	1,011	1,0344	1,0966	1,1495	1,2382

Aus dieser Tabelle und dem Bild 4 ist zu ersehen, daß die äquivalente Ellipse bei gestreckten Rechtecken, wie es die üblichen Sammelschienenquerschnitte sind, sich nur wenig von der Mittelgraden von der Länge 2a des Rechteckes unterscheidet. Es liegt daher nahe, die Dicke schmaler Rechtecke einfach zu vernachlässigen. Wie groß ist der hierdurch begangene Fehler? Wir können ihn folgendermaßen abschätzen:

Die Gegenladung $-q$ der Schiene liege auf einer zweiten gleichen Schiene im großen Abstande von der ersten. Nennen wir U das Potential der ersten Schiene im Mittelpunkte der zweiten, so ist $-U$ das Potential der zweiten im Mittelpunkte

[1]) Siehe z. B. Martin Krause, Theorie der elliptischen Funktionen, S. 113.

der ersten und die zwischen beiden liegende Spannung ist $-2U$. Ersetzen wir beide Schienen durch Ellipsen (a'', b''), so ist diese Spannung $-2U''$, zu berechnen aus Gleichung (26). Nun ist

$$-2U'' = -2U - 2(U''-U) \cong -2U - 2\lim_{z=\infty}(U''-U)$$

Dividieren wir durch q, so läßt sich dies schreiben

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C} + \frac{1}{K},$$

wo

$$K = \frac{1}{2\log\left(\frac{c'}{c}\right)^2 \frac{a^2+b^2}{(a''+b'')^2}}. \qquad (35)$$

Der Ersatz beider Schienen durch Ellipsen hat also in bezug auf ihre gegenseitige Kapazität die Wirkung, als würde man dieser noch eine Kapazität K vorschalten. Ist die Ellipse (a'', b'') mit der Äquivalenten identisch, so ist $K = \infty$.

Haben z. B. beide Schienenquerschnitte ein Seitenverhältnis $b:a = 0{,}1$ und ersetzen wir sie durch die Mittelgrade, d. h. setzen wir $a'' = a$, $b'' = 0$, so ist

$$K = 12 \text{ cm/cm}.$$

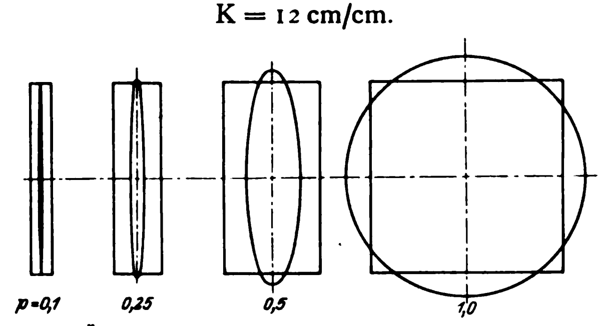


Bild 4. Äquivalente Ellipsen für verschiedene Rechtecke.

Wenn nun C etwa von der Größe 0,25 cm/cm ist (s. auch Zahlenbeispiel am Schlusse), so ist der Fehler ungefähr 2 %. Man kann ihn in den meisten Fällen ohne Bedenken in Kauf nehmen. Um aber auch für gedrängtere Anordnungen gute Näherungen zu erhalten, behalten wir die äquivalente Ellipse in den folgenden Rechnungen bei.

Es sei noch bemerkt, daß wir die Wirkung der Abrundung der Kanten nicht berücksichtigt haben. Es ist zu erwarten, daß sich die äquivalente Ellipse bei abgerundeten Kanten etwas mehr der eingeschriebenen Ellipse nähert.

Wir können nun zur Berechnung der Kapazitäten schreiten und benutzen hierbei die oben durchgeführte Trennung der Elektrizitätsmengen in primäre und sekundäre.

Potential der primären Mengen. Für das Potential der Ellipse (a', b') läßt sich aus den Formeln (15) und (26) ein Ausdruck gewinnen. Da die Niveaulinien dieses Potentials konfokale Ellipsen sind, so ist es zweckmäßig, das Potential im Parameter λ dieser Ellipsen auszudrücken. Dieser ist definiert durch

$$\frac{x^2}{a'^2+y} + \frac{y^2}{b'^2+y} = 1. \qquad (36)$$

In λ ausgedrückt, lautet das Potential[1])

$$U = 2q\log\frac{\sqrt{a'^2+\lambda}+\sqrt{b'^2+\lambda}}{a'+b'}. \qquad (37)$$

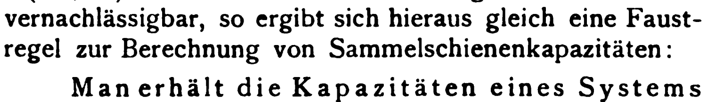
[1]) S. z. B Riemann-Weber: Part. Differentialgleichungen Bd. I, § 114.

An Stelle dieser exakten Formel gebrauchen wir eine Näherung, die in größeren Entfernungen von der Ellipse ausreicht. Mit den Bezeichnungen von Bild 5 lautet sie

$$U = -2\,q \log \frac{2\,r}{a' + b'} + \frac{q}{2} \frac{a'^2 - b'^2}{r^2} \cos 2\,\vartheta. \tag{38}$$

Mit zunehmendem r fällt das zweite Glied sehr schnell ab im Vergleich zum ersten. Wenn z. B. $b' = 0$ und $r = 2\,a'$ ist, so ist das zweite Glied höchstens 4,5 % des ersten, wenn $r = 3\,a$ und $4\,a$ sogar nur 1,55 % bzw. 0,78 %.

Dem ersten Gliede können wir noch eine einfache Deutung geben. Es ist nämlich identisch mit dem Potential eines Kreiszylinders, welches die gleiche Ladung trägt und den Durchmesser $(a' + b')$ besitzt. Da a' sehr nahe gleich a ist und b' vernachlässigbar, so ergibt sich hieraus gleich eine Faustregel zur Berechnung von Sammelschienenkapazitäten:



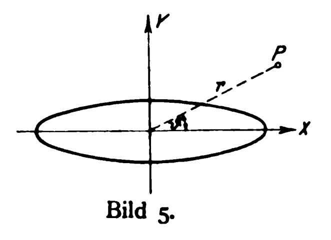


Bild 5.

Man erhält die Kapazitäten eines Systems schmaler rechteckiger Sammelschienen in erster Näherung, wenn man diese durch runde Leiter vom Durchmesser Φ gleich der halben Langseite a ersetzt.

Potential der sekundären Mengen. Die induzierten Mengen werden hervorgerufen durch das Feld der auf den andern Leitern befindlichen Ladungen. Durch das Feld der auf der Schiene befindlichen sekundären Mengen wird dieses „fremde Feld" im Innern der Schiene aufgehoben. Ihre Wirkung nach außen wird in den gebräuchlichen Formeln zur Berechnung der Kapazität von Freileitungen und Kabeln nicht berücksichtigt. Diese Formeln beruhen nur auf den primären Mengen. Bei Sammelschienen ist diese Vernachlässigung nicht ganz unbedenklich, denn die Entfernung der auf einer Schiene induzierten gleich großen positiven und negativen Mengen voneinander ist nicht immer klein gegen ihre Entfernung von anderen Schienen bzw. der Wand. Es ist daher notwendig, sie wenigstens näherungsweise zu berücksichtigen. Hierzu machen wir folgende Vereinfachungen:

1. Wir nehmen an, daß das fremde Feld über dem Querschnitt einer Schiene nahezu homogen ist. Die Feldstärke des homogenen Ersatzfeldes nehmen wir gleich der wahren Feldstärke des fremden Feldes im Mittelpunkte der Schiene an.

2. Wir ersetzen die Schienen durch ihre Mittelebenen, d. h. wir vernachlässigen ihre Dicke.

Für das Potential einer Ellipse (a'', b'') in einem homogenen Felde ist eine strenge Lösung bekannt[1]). Es sei das Potential des äußeren Feldes

$$V_0 = -A\,x - B\,y + C, \tag{39}$$

so wird das Potential des resultierenden Feldes

$$V = [-A\,x - B\,y + C] + A \frac{a''}{a'' - b''} \left(1 - \sqrt{\frac{b''^2 + \lambda}{a''^2 + \lambda}}\right) x + \\ + B \frac{b''}{b'' - a''} \left(1 - \sqrt{\frac{a''^2 + \lambda}{b''^2 + \lambda}}\right) y. \tag{40}$$

Das zweite Glied ist V', das Potential der induzierten Mengen. Im Mittelpunkte der Schiene wird durch sie das Potential nicht verändert. (Das ist schon aus Symmetriegründen klar.) Im Innern der Schiene herrscht das konstante Potential C. Den Ausdruck für V' können wir noch zweckmäßig vereinfachen, wenn wir uns wieder auf größere Abstände von der Schiene beschränken.

$$V' = A \frac{a''(a'' + b'')}{2\,r^2}\, x + B \frac{b''(a'' + b'')}{2\,r^2}\, y. \tag{41}$$

[1]) Riemann-Weber: Part. Differentialgleichungen § 159.

Es ist nicht zu erwarten, daß die äquivalente Ellipse das Rechteck auch in bezug auf die induzierten Mengen richtig ersetzt. Wir könnten dies nur nachprüfen, wenn uns das exakte Resultat für ein Rechteck in einem homogenen Feld zur Verfügung stünde[1]). In Ermangelung dessen setzen wir $a'' = a$, $b'' = 0$, was wir um so eher tun dürfen, als die sekundären Mengen in den Kapazitäten nur geringe Korrekturen geben. Wir benutzen also die Formel

$$V' = A \frac{a}{2 r^2} x. \tag{42}$$

V' ist nur durch A, der Feldstärke des fremden Feldes im Mittelpunkte der Schiene in Richtung der Langseite, bestimmt. Es genügt nun A nur näherungsweise zu bestimmen. Wir können zu diesem Zwecke die fremden Ladungen konzentriert in der Mitte ihrer Schienen annehmen. Dann ist

$$A_i = -\Sigma \frac{2 q_k}{r_{ik}} \cos(x_1 r_{ik}), \tag{43}$$

wo über die fremden Ladungen zu summieren ist.

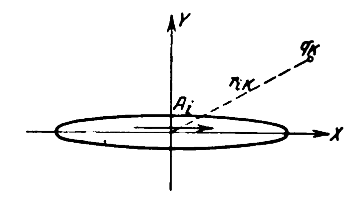


Bild 6.

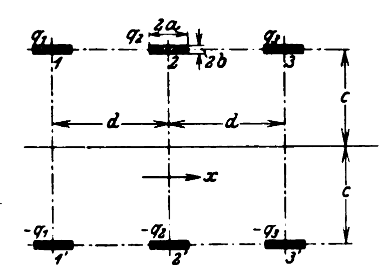


Bild 7. Anordnung I mit den Spiegelbildern der Sammelschienen.

Berechnung der Kapazitäten. Wir haben nun das nötige Rüstzeug beisammen, um die Teilkapazitäten zu berechnen. Wir berechnen sie auf einem Umwege über die Influenzkoeffizienten. Den Gang der Berechnung zeigen wir an dem Beispiele der Sammelschienenanordnung I (Bild 1).

Zuerst berechnen wir die Feldstärken A_i nach Formel (43). Es ergibt sich z. B.

$$A_1 = -2 q_2 \left(\frac{1}{d} - \frac{d}{d^2 + 4 c^2}\right) - 2 q_3 \left(\frac{1}{2 d} - \frac{2 d}{4 d^2 + 4 c^2}\right). \tag{44}$$

Führen wir die Bezeichnungen ein

$$\beta = \frac{4 c^2}{d^2 + 4 c^2} \qquad \gamma = \frac{1}{2} \frac{c^2}{d^2 + c^2}, \tag{45}$$

so schreibt sich dies:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{d} [-\beta q_2 - \gamma q_3] \\ A_2 &= \frac{2}{d} [\beta q_1 - \beta q_3] \\ A_3 &= \frac{2}{d} [\gamma q_1 + \beta q_2] \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Wir können jetzt die Spannungen e_1, e_2, e_3 gegen Erde berechnen. Wir berechnen die Potentiale der fremden Ladungen immer auf die Schienenmittelpunkte. Sofern das „fremde Feld" homogen ist, ist dies auch — wie oben dargelegt — das

[1]) Diese Lösung zu finden ist übrigens nicht schwer. Es handelt sich um eine erste Randwertaufgabe, die man lösen kann, indem man das Rechteck mit Hilfe der Schwarzschen Formel auf einen Kreis abbildet. Die Lösung der ersten Randwertaufgabe für einen Kreis ist aber allgemein durch die Poissonsche Formel gegeben.

wirkliche Potential, das von den auf dieser Schiene induzierten Mengen im Innern der Schiene hergestellt wird. Das Potential der primären Mengen berechnen wir in zwei Stufen, die dem ersten und dem zweiten Gliede in Gleichung (38) entsprechen. Es ergibt sich, wenn wir die Spannungen, die diesen Stufen entsprechen, durch obere Indizes 1 und 2 unterscheiden

$$\left.\begin{aligned}
e_1^1 &= 2\,q_1 \log \frac{4\,c}{a' + b'} + q_2 \log \frac{d^2 + 4\,c^2}{d^2} + q_3 \log \frac{d^2 + c^2}{d^2} \\
e_2^1 &= q_1 \log \frac{d^2 + 4\,c^2}{d^2} + 2\,q_2 \log \frac{4\,c}{a' + b'} + q_3 \log \frac{d^2 + 4\,c^2}{d^2} \\
e_3^1 &= q_1 \log \frac{d^2 + c^2}{d^2} + q_2 \log \frac{d^2 + 4\,c^2}{d^2} + 2\,q_3 \log \frac{4\,c}{a' + b'}
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Desgleichen die zweite Stufe

$$\left.\begin{aligned}
e_1^2 &= \frac{a^2}{2}\left\{ q_1 \frac{1}{4\,c^2} + q_2 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d^2 - 4\,c^2}{(d^2 + 4\,c^2)^2} \right) + q_3 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d^2 - c^2}{(d^2 + c^2)^2} \right) \right\} \\
e_2^2 &= \frac{a^2}{2}\left\{ q_1 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d^2 - 4\,c^2}{(d^2 + 4\,c^2)^2} \right) + q_2 \frac{1}{4\,c^2} + q_3 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d^2 - 4\,c^2}{(d^2 + 4\,c^2)^2} \right) \right\} \\
e_3^2 &= \frac{a^2}{2}\left\{ q_1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d^2 - c^2}{(d^2 + c^2)^2} \right) + q_2 \left(\frac{1}{d^2} - \frac{d^2 - 4\,c^2}{(d^2 + 4\,c^2)^2} \right) + q_3 \frac{1}{4\,c^2} \right\}
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Die Potentiale der sekundären Mengen werden mit Benutzung von Formel (42)

$$\left.\begin{aligned}
e_1' &= \frac{a^2}{2\,d^2}(-\beta\,A_2 - \gamma\,A_3) \\
e_2' &= \frac{a^2}{2\,d^2}(\beta\,A_1 - \beta\,A_3) \\
e_3' &= \frac{a^2}{2\,d^2}(\gamma\,A_1 + \beta\,A_2)
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Führen wir hier die Werte der A aus der Gleichung (46) ein, so wird

$$\left.\begin{aligned}
e_1' &= \frac{a^2}{d^2}\left[-(\beta^2 + \gamma^2)\,q_1 - \beta\gamma\,q_2 + \beta^2\,q_3 \right] \\
e_2' &= \frac{a^2}{d^2}\left[-\beta\gamma\,q_1 - (\beta^2 + \gamma^2)\,q_2 - \beta\gamma\,q_3 \right] \\
e_3' &= \frac{a^2}{d^2}\left[\beta^2\,q_1 - \beta\gamma\,q_2 - (\beta^2 + \gamma^2)\,q_3 \right]
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Die wirklichen Spannungen ergeben sich durch Addition dieser Teilspannungen. Man erhält dann Gleichungen von der Form 3, in welchen es aber unter den Influenzkoeffizienten $\mathcal{A}_{ik}$ nur 3 verschiedene gibt. Und zwar ist

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{22} = \mathcal{A}_{33} &= \mathcal{A}_1 \\
\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{21} = \mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_{32} &= \mathcal{A}_2 \\
\mathcal{A}_{13} = \mathcal{A}_{31} &= \mathcal{A}_3
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

In der Determinante der $\mathcal{A}_{ik}$ herrscht also doppelte Diagonalsymmetrie. Vernachlässigen wir nun in Gleichung (38) b'^2 gegen a'^2, so erhalten wir endlich

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= 2 \log \frac{4\,c}{a' + b'} + \frac{a^2}{d^2}\left\{ \frac{d^2}{8\,c^2} \left(\frac{4\,c^2}{d^2 + 4\,c^2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{d^2 + c^2} \right)^2 \right\} \\
\mathcal{A}_2 &= \log \frac{d^2 + 4\,c^2}{d^2} + \frac{a^2}{d^2}\left\{ 2\,\frac{c^2 (3\,d^2 + 4\,c^2)}{(d^2 + 4\,c^2)^2} - \frac{2\,c^4}{(d^2 + c^2)(d^2 + 4\,c^2)} \right\} \\
\mathcal{A}_3 &= \log \frac{d^2 + c^2}{d^2} + \frac{a^2}{d^2}\left\{ \frac{c^2 (c^2 + 3\,d^2)}{8\,(d^2 + c^2)^2} + \frac{16\,c^4}{(d^2 + 4\,c^2)^2} \right\}
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Auf dieselbe Weise können wir für Anordnung II (Bild 2) ausrechnen:

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_1 &= 2\log\frac{4\,c}{a'+b'} - \Bigg|\,\frac{a^2}{8\,c^2}\left\{1\,\Bigg|\,+2+\frac{32\,c^4}{(d^2+4\,c^2)^2}+\frac{2\,c^4}{(d^2+c^2)^2}\right\}\\
\Lambda_2 &= \log\frac{d^2+4\,c^2}{d^2} - \Bigg|\,\frac{a^2}{c^2}\left\{\frac{2\,c^4\,(3\,d^2+4\,c^2)}{d^2\,(d^2+4\,c^2)}\,\Bigg|\,+\frac{2\,c^2}{d^2+4\,c^2}+\frac{c^4}{(d^2+c^2)\,(d^2+4\,c^2)}\right\}\\
\Lambda_3 &= \log\frac{d^2+c^2}{d^2} - \Bigg|\,\frac{a^2}{8\,c^2}\left\{\frac{c^2\,(c^2+3\,d^2)}{d^2\,(d^2+c^2)^2}\,\Bigg|\,+\frac{4\,c^2}{d^2+c^2}+\frac{32\,c^4}{(d^2+4\,c^2)^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Die Berechnung der Kapazitätskoeffizienten C_{ik} führt man am besten nur bei der Zahlenrechnung aus. Unter den C_{ik} wird es nur vier verschiedene geben, und zwar gilt

$$\begin{aligned}
C_{11} = C_{33} = C_1 \qquad C_{22} = C_2\\
C_{12} = C_{21} = C_{23} = C_{32} = C_3\\
C_{13} = C_{31} = C_4.
\end{aligned} \qquad (54)$$

Zahlenbeispiel. Zur Orientierung über Größenordnung der Teilkapazitäten und dem Genauigkeitsgrade der einzelnen Näherungen sei noch ein Zahlenbeispiel mitgeteilt. (Bild 8.) In den Gleichungen (52) und (53) sind die einzelnen Stufen der Berechnung durch senkrechte Striche getrennt. Das logarithmische Glied nennen wir Hauptglied, es überwiegt weitaus bei den üblichen Anordnungen für Hochspannung.

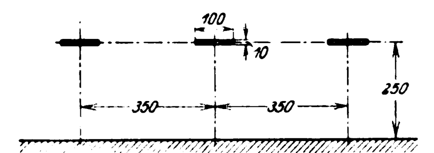


Bild 8. Maßskizze zum Zahlenbeispiel.

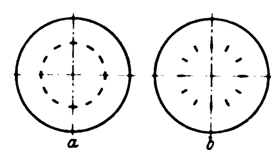


Bild 9. Beispiele von Elektronenröhren mit Flachstegen.

Das zweite Glied zeigt den Einfluß der Abweichung der Niveaulinien der Leiter von der Kreisform, das dritte Glied entspricht den induzierten Mengen. Die diesen Gliedern entsprechenden Korrekturen ε' und ε'' sind in der Tabelle in Prozenten des Hauptgliedes angegeben. Schließlich sind die Influenzkoeffizienten noch nach der Faustregel berechnet. Die Korrektur η, die an dieser anzubringen ist, ist in Prozenten ebenfalls in der Tabelle enthalten.

i	Λ_i cm/cm	ε' %	ε'' %	$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$	η %
1	5,253	0,095	— 0,18	— 0,085	0,87
2	1,120	1,05	— 0,21	0,84	— 0,84
3	0,423	0,12	2,23	2,35	2,35

Die Kapazitätskoeffizienten sind

$$C_1 = 0{,}20 \qquad C_2 = 0{,}208 \qquad C_3 = -0{,}0411 \qquad C_3 = -0{,}0073 \text{ cm/cm}.$$

Wir sehen, daß schon die Faustregel in diesem Falle eine für praktische Zwecke vollständig genügende Näherung gibt. Die aus der Faustregel sich ergebenden Formeln sind für beide Anordnungen I und II gleich; sie lauten:

$$\Lambda_1 = 2\log\frac{4\,c}{a} \qquad \Lambda_2 = \log\frac{d^2+4\,c^2}{d^2} \qquad \Lambda_3 = \log\frac{d^2+c^2}{d^2}. \qquad (55)$$

Anwendung unserer Ergebnisse auf die Berechnung des Durchgriffes von Elektronenröhren. Es werden vielfach Elektronenröhren, besonders Mehrgitterröhren, mit paralleler Anordnung der Gitterstäbe verwendet, bei welchen die



Stäbe nicht runde Drähte, sondern flache Stege sind. Die Stege können mit ihrer größten Ausdehnung in der Richtung des Elektronenstromes oder quer dazu liegen. Erstere Anordnung wird angewandt, wenn große elektrostatische Abschirmung, aber geringe elektronenabfangende Wirkung des Gitters erwünscht ist (z. B. beim Raumladungsgitter). Aus unserer Faustregel können wir nun unmittelbar eine Regel zur Berechnung des Durchgriffes solcher Röhren herleiten.

Da der Durchgriff, definiert als $D = -\left(\frac{\partial e_g}{\partial e_a}\right)_{i_a}$ sich für Eingitterröhren mit hinreichender Genauigkeit berechnen läßt als Verhältnis der Teilkapazitäten Heizdraht-Anode und Heizdraht-Gitter, so können wir folgende Faustregel aufstellen:

Der Durchgriff einer Eingitterröhre mit Flachstegen und paralleler Anordnung der Gitterstege läßt sich angenähert berechnen, wenn man die Flachstege durch runde Drähte mit einem Durchmesser gleich der halben Steghöhe ersetzt.

Der Gültigkeitsbereich dieser Regel ist offenbar beschränkt auf nicht zu engmaschige Gitter.

Für dieses Ersatzgitter hat nun M. Abraham[1]) den Durchgriff berechnet. Wie man die Konstanten einer Mehrgitterröhre näherungsweise auf diejenigen von Eingitterröhren zurückführen kann, haben Schottky[2]) und Barkhausen[3]) gezeigt. Durch Kombination ihrer Resultate mit der Durchgrifformel von Abraham und unserer Faustregel werden auch diese Röhren berechenbar.

Vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Orlich als Diplomarbeit der Techn. Hochschule Berlin ausgeführt. Es sei mir gestattet, Herrn Prof. Orlich für seine freundliche Förderung und sein stetiges Interesse meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Berechnung der Eigenschwingungen der zweilagigen kurzen Spule.

Von

A. Goosmann.

Inhaltsverzeichnis:

[1]) Arch. f. Elektrot. Bd. 8, H. 1, S 42. 1919.
[2]) Arch. f. Elektrot. Bd. 8, H. 1, 9, S. 1, 12, 299. 1919.
[3]) Elektronen-Röhren, Leipzig 1923.



Nachdem die Theorie von Lenz zur Berechnung der Eigenschwingungen einlagiger Spulen[1]) durch Schröder[2]) auf die zweilagige lange Spule ausgedehnt worden ist, und nachdem von Ridder[3]) und Reinhardt[4]) Messungen von Eigenschwingungen ebensolcher Spulen veröffentlicht sind, war es angezeigt, auch die Berechnung der Eigenschwingungen der zweilagigen kurzen Spule in Angriff zu nehmen. Über andere Methoden zur Lösung des Problems vergleiche man die Einleitung zur Arbeit von Schröder[2]). Die vorliegende Untersuchung stellt sich zur Aufgabe, diese Berechnung durchzuführen, dabei soll möglichst ein Anschluß an die Schröderschen Formeln gefunden werden.

1. Einleitung, Voraussetzungen, Ergebnisse und Bezeichnungen.

Um die Aufgabe einzuteilen und einzuschränken, gehen wir zunächst kurz auf die Schwingungsverhältnisse bei den zweilagigen Spulen ein. Wir wollen der Kürze halber die anschließend gewickelte Spule mit „A-Spule", die bifilar gewickelte Spule mit „B-Spule" bezeichnen. Unter A, 2.—6. behandeln wir die erste, unter B, 7. die zweite Spulenart. Anschließend werden die gefundenen Formeln mit Messungen von Ridder verglichen. Zum Schluß werden in D. 10.—12. die notwendigen Konvergenz-Beweise geführt.

Wie in der Lenzschen Theorie, denken wir uns die beiden Lagen der Spule als zwei sehr dünne koaxiale Kreiszylinder von der Länge $2l$, auf denen die Windungen eingezeichnet sind. Dann schneiden wir beide Zylinder längs einer Mantellinie auf, breiten die beiden Mäntel aus und drehen die zweite Lage um die Linie, die die Verbindungsstelle der beiden Lagen bildet, um 180° in die Ebene der ersten Lage, so daß beide Lagen wie in Bild 1 gezeichnet, nebeneinander zu liegen kommen. Durch $v = -\pi$ kennzeichnen wir den Drahtanfang an der ersten Lage, durch $v = 0$ die Verbindungsstelle und $v = +\pi$ das Drahtende.

Die Grundschwingung und die ungeradzahligen Oberschwingungen, in der Bezeichnungsweise von Rogowski Eigenfrequenzen erster Art, sind dadurch gekennzeichnet, daß an der Stelle $v = 0$ die Spannung $\varphi = 0$ ist, während zwischen $v = -\pi$ und $v = +\pi$ die größte Spannungsdifferenz ist; der Strom J hat bei $v = 0$ sein Maximum. Wir haben somit bei der A-Spule ein starkes elektrisches Feld zwischen den beiden Lagen, die als Kondensator wirken. Gegen das innere Feld werden wir das Feld außerhalb der beiden Lagen vernachlässigen können. Da an gegenüberliegenden Stellen der beiden Lagen ($v = +v_1$ und $v = -v_1$) J die gleiche Richtung hat, verstärken sich die Magnetfelder der beiden Lagen, so daß wir große ungeradzahlige Wellenlängen erwarten können. Diese Erwartung wird durch unsere Formeln und die Messungen von Ridder bestätigt.

Bei den geradzahligen Oberschwingungen λ_{2n} hat φ bei $v = 0$ ein Maximum, und bei $v = \pm\pi$ einander gleiche Werte mit dem entgegengesetzten Vorzeichen von φ an der Stelle $v = 0$. Als Kapazität kommt also nicht die Kapazität der Lagen gegeneinander in Frage, sondern die Kapazität des oberen Spulenteiles gegen den unteren. Diese ist aber sehr viel kleiner als die erste. Der Strom ist bei $v = 0$ gleich Null und hat an gegenüberliegenden Stellen der beiden Lagen entgegengesetztes Vorzeichen. Dadurch wird das Magnetfeld in der Spule sehr schwach, neben der geringen Kapazität haben wir also auch eine geringere Selbstinduktion, und können aus der Thomsonschen Schwingungsformel

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{\Delta \cdot C} \qquad (1)$$

[1]) Lenz, Ann. d. Phys. 43, S. 749, 1914.
[2]) Schröder, Arch. f. Elektrot. XI, S 203, 1922.
[3]) Ridder, Arch. f. Elektrot. X, S. 339, 1922.
[4]) Reinhardt, Arch. f. Elektrot. XIII, 2. H., 31. Mai 1924.

schließen, daß die λ_{2n} sehr klein gegenüber den λ_1 und λ_{2n+1} ausfallen werden. Die Messungen von Ridder zeigen dies auch: an einer Spule tritt λ_2 erst zwischen λ_{13} und λ_{15} auf, $\lambda_{13} > \lambda_2 > \lambda_{15}$ an einer anderen ist λ_2 kleiner als λ_{49}! Wir lassen im folgenden die λ_{2n} ganz unberücksichtigt, beschränken uns also auf die Berechnung der λ_{2n+1}.

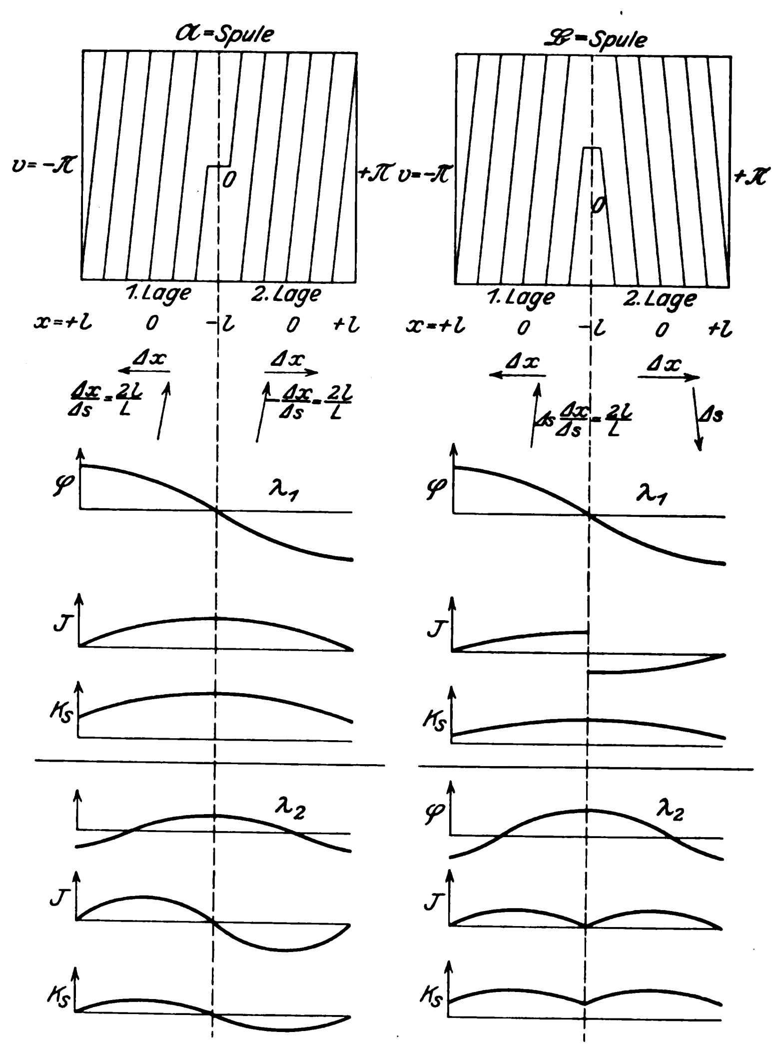


Bild 1. Verteilung des Potentials φ, des Stromes J und der Wirbelkraft K_s an der Spule bei λ_1 und λ_2.

Bei der B-Spule sind im Fall beider Arten von Eigenfrequenzen die Verhältnisse bezüglich der elektrischen Felder die gleichen wie bei der A-Spule. Nur die magnetischen Verhältnisse sind gerade umgekehrt. Bei λ_{2n+1} kehrt räumlich betrachtet (also nicht in der Drahtrichtung) bei $v = 0$ J sein Vorzeichen um, ohne daß J gleich Null ist. Wir haben schwaches Magnetfeld und daher schwache Selbstinduktion der Spule neben großer Kapazität. Unsere Ableitung zeigt, daß sich diese beiden Größen, wie ja auch aus (1) zu erwarten, gerade kompensieren; wir erhalten die Formel (64) von B. 7.:

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4L}{2n+1} \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Umgekehrt kann man bei den λ_{2n}, wo also kleine Kapazität und große Selbstinduktion in Frage kommen, vermuten, daß die λ_{2n} keine extrem großen oder kleinen Werte annehmen werden. Wir begnügen uns hier mit dieser Andeutung.

In Übereinstimmung mit Lenz und Schröder wählen wir folgende Bezeichnungen, wobei sich die Indizes 1 und 2 auf die erste bzw. zweite Lage beziehen.

ν = Schwingungszahl in Sekunden,
λ = Wellenlänge im Äther
L_1, L_2 = Drahtlänge auf der einzelnen Lage,
$2R_1, 2R_2$ = Durchmesser der einzelnen Lage,
$2l_1, 2l_2$ = Länge der einzelnen Lage = Spulenhöhe,
$2r$ = Drahtdurchmesser,
h = Ganghöhe der Windungen,
$2d^* = R_2 - R_1$ = geometrischer Abstand der oberen Lage von der unteren[1]),
$2d$ = reduzierter Lagenabstand[1]),
c = Lichtgeschwindigkeit,
ε = Dielektrizitätskonstante der Schicht zwischen den beiden Lagen.

Um einfacher rechnen zu können und um keine Komplikationen einzuführen, die wir zur Vereinfachung der Formeln nachher wieder beseitigen müßten, wollen wir voraussetzen, daß $d \ll R_1, R_2$ und daß $d \ll l_1, l_2$ ist, dann können wir annehmen, wenn wir ferner setzen $2R = R_1 + R_2$ und $2L = L_1 + L_2$, sowie $l = l_1 = l_2$, daß

$$R_1 \sim R \sim R_2, \quad L_1 \sim L \sim L_2$$

und daß z. B.

$$\frac{L_1}{2l_1} = \frac{L_2}{2l_2} = \frac{L}{2l} = \frac{2\pi R}{h}$$

ist; hieraus folgt, daß wir bezüglich der beiden Lagen ganz symmetrisch rechnen können. Unter diesen Voraussetzungen ergibt unsere Rechnung für die Grundschwingung der A-Spule folgende Ergebnisse:

a) wenn $R \geqq 1{,}5\,l$ ist:

$$\lambda_1 = L\sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l} - \frac{5}{6}}, \tag{34}$$

b) wenn $R \geqq 0{,}4\,l$ ist:

$$\lambda_1 = L\sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l} - 1{,}1 + 0{,}615\frac{l}{R}}, \tag{46}$$

c) wenn $R < 0{,}5\,l$ ist (berichtigte Schrödersche Formel):

$$\lambda_1 = 4L\sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{\frac{iR}{l} \cdot J_1\left(i\frac{\pi R}{4l}\right) \cdot H_1^{(1)}\left(i\frac{\pi R}{4l}\right)}, \tag{49a}$$

für die Oberschwingungen, wenn $R \geqq 0{,}4\,l$ ist:

$$\lambda_3 = L\sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{0{,}256 - \frac{1}{24\log\frac{4R}{l} - 10}}; \tag{36}$$

$$(2n+1)^{3/2} \cdot \lambda_{2n+1} = 4L\sqrt{\frac{4l}{\pi d}}, \quad R/l \text{ beliebig}, \; n \geqq \tag{53}$$

In diesen Formeln ist überall d der reduzierte Lagenabstand, der die Schrödersche Korrektion für die Kapazität zweier Drahtgitter gegeneinander enthält und mit dem wahren Lagenabstand d^* in der Beziehung steht:

---

[1]) Die Bezeichnung d^* für den wahren oder geometrischen halben Lagenabstand ist gewählt, weil in den Formeln später immer nur der reduzierte Lagenabstand auftritt, der mit d bezeichnet wird. Siehe auch Schröder, S. 228 (100) und Formel (81) in dieser Arbeit.

$$d = \frac{1}{\varepsilon}(d^* + 0{,}129\,h - 1{,}15\,r). \tag{81}$$

Über die Grenzen der Anwendbarkeit dieses Ausdrucks verweisen wir auf Schröder, S. 228 uf.; diese Grenzen sind im wesentlichen gegeben durch die Bedingung hinreichend großer Windungszahl, die auch für unsere übrige Rechnung notwendig ist. Wir geben auf Seite 285 eine Gegenüberstellung der Formeln für einlagige und zweilagige A- und B-Spulen.

A. Die anschließend gewickelte Spule.

2. Potentialansatz, Berechnung der Ladung und des Stromes.

Wie in Bild 2 angedeutet, sei der Schnitt (a, b) einem Koordinatenkreuz (x, y) zugeordnet, so daß den beiden Lagen die Werte $y = \pm d$, $|x| \leqq l$ zugeordnet werden. Dann setzen wir

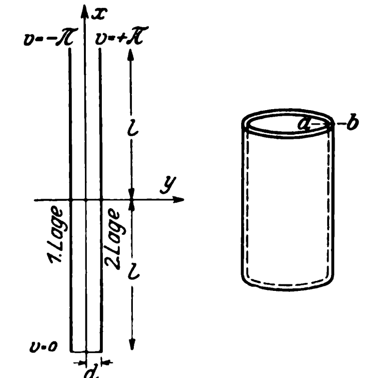


Bild 2. Koordinaten an der Spule.

$$x = -l \cos v \tag{2}$$

und ordnen noch der ersten Lage die negativen, der zweiten Lage die positiven v-Werte zu. Wir gehen von einem allgemeinen Fourier-Ansatz für das am Draht herrschende Potential φ aus:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= + e^{i\nu t}\{a_0 + \Sigma a_n \cos n v\}; \quad -\pi \leqq v \leqq 0 \\ \varphi_2 &= - e^{i\nu t}\{a_0 + \Sigma a_n \cos n v\}; \quad 0 \leqq v \leqq +\pi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Damit φ entsprechend der Bedingung, Potentialverteilung für eine ungeradzahlige Eigenschwingung zu sein, an der Stelle $v = 0$ verschwindet, müssen wir als erste Bedingung für die Koeffizienten verlangen:

$$a_0 + \Sigma a_n = 0. \tag{4}$$

Da die Kapazität zweier ebener paralleler Drahtgitter durch die Schrödersche Rechnung (S. 212 uf.) bekannt ist, können wir sogleich die Ladung ω angeben, mit der die Drähte pro Längeneinheit belegt sein müssen, damit das vorgeschriebene Potential $+\varphi$, $-\varphi$ an gegenüberliegenden Stellen der beiden Lagen herrscht. Es ist

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\varphi_1(-v) - \varphi_2(v)}{2d \cdot 4\pi c^2} = \frac{e^{i\nu t}}{4\pi d c^2}\{a_0 + \Sigma a_n \cos n v\}; \quad -\pi \leqq v \leqq 0 \\ \omega_2 &= -\frac{e^{i\nu t}}{4\pi d c^2}\{a_0 + \Sigma a_n \cos n v\}; \qquad 0 \leqq v \leqq +\pi \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

worin der reduzierte Lagenabstand $d = \frac{1}{\varepsilon}(d^* + 0{,}129\,h - 1{,}15\,r)$ ist. Wir vernachlässigen so allerdings erstens, daß die Spule eine endliche Länge hat, also Randwirkungen an den Enden der Spule, und zweitens die Veränderlichkeit des Potentials von einer Windung zu den Nachbarwindungen. Doch sind wegen $d \ll R$ und $d \ll l$ und wegen des strengen Plus-, Minus-Charakters der beiden Lagen beide Einflüsse gering.

Die Ladung ω denken wir uns kontinuierlich auf den beiden Ersatzzylindern verteilt und definieren einen Strom γ, der pro Zentimeter-Spulenhöhe durch die Windungen fließt. Der Strom und die Ladung stehen in der Beziehung (vgl. Lenz, S. 760)

$$\frac{d\dot{\gamma}_1}{dx} = -\frac{L}{2l}\ddot{\omega}_1, \quad \frac{d\dot{\gamma}_2}{dx} = +\frac{L}{2l}\ddot{\omega}_2, \tag{6}$$

das verschiedene Vorzeichen rührt von den aus Bild 1 ersichtlichen Beziehungen her

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)_{1.\,\mathrm{Lage}} = +\frac{L}{2l} \qquad \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)_{2.\,\mathrm{Lage}} = -\frac{L}{2l}. \tag{7}$$

Allgemein erhalten wir für $\dot{\gamma}$ aus (5) und (6)

$$\frac{d\dot{\gamma}}{dx} = \frac{\nu^2 L e^{i\nu t}}{8\pi d l c^2}\{a_0 + \Sigma a_n \cos n v\}; \qquad -\pi \leqq v \leqq +\pi \tag{6a}$$

und nach Multiplikation mit $dx = l \sin v\, dv$ und Integration

$$\dot{\gamma} = \frac{\nu^2 L}{8\pi d c^2} e^{i\nu t} \cdot \int_{-\pi}^{v} \{a_0 \sin v + \Sigma a_n \cos n v \sin v\}\, dv$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\nu^2 L}{8\pi d c^2} e^{i\nu t} \left\{ \begin{array}{l} -a_0(\cos v + 1) + \frac{a_1}{4}(1 - \cos 2v) \\ + \sum_2^n \frac{a_n}{2}\left[\frac{\cos(n-1)v + (-1)^n}{n-1} - \frac{\cos(n+1)v + (-1)^n}{n+1}\right] \end{array} \right\} \tag{8}$$

wobei $\cos n v \cdot \sin v = \frac{1}{2}(-\sin(n-1)v + \sin(n+1)v)$ eingeführt wurde. Die Integrationskonstante ist so bestimmt, daß $\dot{\gamma}$ bei $v = \pm\pi$ entsprechend der Bedingung der Eigenschwingung Null ist. Zur Abkürzung führen wir neue Größen d_n ein:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d_0}{2} = -a_0 + \frac{a_1}{4} + \sum_2^n a_n \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}; \qquad d_1 = -a_0 + \frac{a_2}{2}; \\ 2 n d_n = a_{n+1} - a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots \end{array} \right\} \tag{9}$$

wonach sich (8) schreibt

$$\dot{\gamma} = \frac{\nu^2 L}{8\pi d c^2} e^{i\nu t}\left\{\frac{d_0}{2} + \Sigma^n d_n \cos n v\right\}. \tag{10}$$

Bei der weiteren Durchrechnung ergibt sich, daß schließlich eine Sinusreihe mit einer Cosinusreihe verglichen werden muß; es empfiehlt sich $\dot{\gamma}$ in eine Sinusreihe umzurechnen, da dadurch die Integration zur Berechnung der Wirbelkraft $\mathfrak{K}$ in A. 3. am einfachsten wird. Wir setzen an

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\gamma}_1 = \frac{\nu^2 L}{8\pi d c^2} \cdot e^{i\nu t} \cdot \left\{-\sum_1^m \frac{4}{\pi} A_m \sin m v\right\}; \quad -\pi \leqq v \leqq 0 \\ \dot{\gamma}_2 = \frac{\nu^2 L}{8\pi d c^2} \cdot e^{i\nu t} \cdot \left\{+\sum_1^m \frac{4}{\pi} A_m \sin m v\right\}; \quad 0 \leqq v \leqq +\pi \end{array} \right\} \tag{11}$$

und verlangen also, daß

$$\sum \frac{4}{\pi} A_m \sin m v = \frac{d_0}{2} + \sum d_n \cos n v;$$

ist, Multiplikation mit $\sin m v$ und Integration von 0 bis π liefert

$$\left. \begin{array}{l} A_{2l+1} = \frac{d_0}{2} \cdot \frac{1}{2l+1} + \sum_1^k \frac{d_{2k}}{2}\left(\frac{1}{2l+1+2k} - \frac{1}{2k-2l-1}\right) \\ A_{2l} = \sum_0^k \frac{d_{2k+1}}{2}\left(\frac{1}{2l+2k+1} - \frac{1}{2k+1-2l}\right) \end{array} \right\} \tag{12}$$

Durch Einsetzen von (9) in (12) lassen sich die Koeffizienten A_m auch durch a_n ausdrücken; wir bemerken, daß die A_{2l} nur von den a_{2l} abhängen, daß jedoch die A_{2l+1} von allen a_n abhängen, da d_0 alle a_n enthält.

3. Der Wirbelanteil des elektrischen Spulenfeldes.

Mit Lenz (vgl. Lenz, S. 753—755) setzen wir die Leitfähigkeit $\sigma = \infty$. Wenn $\mathfrak{K}$ die elektrische Wirbelkraft bedeutet, muß dann am Draht

$$\mathfrak{K}_s + \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$$

sein.

Wir gewinnen $\mathfrak{K}$ aus der Induktion der Kreisringe aufeinander. Fließt in einem kleinen Abschnitt unserer Ersatzzylinder von der Höhe dx der Strom $\gamma \cdot dx$, so ist die Induktion durch die Windung an der Stelle $x = x_0$:

$$4\pi R \left\{ \log \frac{8R}{|x - x_0|} - 2 \right\} \cdot \dot{\gamma} \cdot dx$$

von der ersten Lage herrührend und von der zweiten Lage kommt dazu

$$4\pi R \left\{ \log \frac{8R}{\sqrt{(x - x_0)^2 + 4d^2}} - 2 \right\} \cdot \dot{\gamma} \cdot dx;$$

solange $\frac{|x - x_0|}{R} \leqq \frac{1}{3}$ ist; wie aus Bild 3 ersichtlich, ist die Genauigkeit für den Induktionskoeffizienten bei $\frac{x}{R} = \frac{1}{2}$ etwa 10%; da jedoch für die Induktion nur das folgende bestimmte Integral in Frage kommt, so wird ersichtlich die Genauigkeit noch um einiges besser. Die ganze Spule induziert also

$$4\pi R \int_{-l}^{+l} \left\{ \log \frac{8R}{|x - x_0|} + \log \frac{8R}{\sqrt{(x - x_0)^2 + 4d^2}} - 4 \right\} \cdot \dot{\gamma}\, dx.$$

Dieser Induktionsfluß ist nun gleich dem negativ genommenen Linienintegral der elektrischen Kraft längs des Kreises an der Stelle x_0, also gleich $-2\pi R \cdot \mathfrak{K}_s(x_0)$, demnach ist:

$$\mathfrak{K}_s(x_0) = -2 \int_{-l}^{+l} \left\{ \log \frac{8R}{|x - x_0|} + \log \frac{8R}{\sqrt{(x - x_0)^2 + 4d^2}} - 4 \right\} \dot{\gamma}\, dx. \tag{14}$$

Nun ist der eingeführte Induktionskoeffizient

$$M = 4\pi R \left\{ \log \frac{8R}{|x - x_0|} - 2 \right\}$$

eine erste Näherung, solange $\frac{|x - x_0|}{R} \leqq \frac{1}{3}$ ist, und wir hatten ferner vorausgesetzt, daß $d \ll l$ ist. Wir bleiben durchaus im Bereiche dieser ersten Näherung, wenn wir in (14) unter der Wurzel $4d^2$ gegen $(x - x_0)^2$ ganz streichen. Damit wird auch der Verlauf von $\mathfrak{K}_s$ symmetrisch bezüglich der beiden Lagen und die Integration läßt sich auf ein einfaches ebenes Potential-Problem zurückführen. Nach Streichung von $4d^2$ haben wir

$$\mathfrak{K}_s(x_0) = -4 \int_{-l}^{+l} \left\{ \log \frac{8R}{|x - x_0|} - 2 \right\} \cdot \dot{\gamma}\, dx \tag{15}$$

und können so rechnen, als ob die beiden Ersatzzylinder zwei eng benachbarte, sehr dünne Platten von der Breite 2l und unendlicher Länge sind. Den Querschnitt durch dieses Plattenpaar können wir durch eine lang gestreckte Ellipse von der Länge 2l ersetzen. Für $\mathfrak{K}$ wählen wir einen Ansatz in Koordinaten u, v, von denen die eine Koordinate u auf Ellipsen konstant ist. Setzen wir

$$x + iy = -l \operatorname{Cof}(u + iv), \tag{16}$$

so ist u konstant, wenn sich ein Punkt mit den Koordinaten (x, y) auf einer Ellipse mit dem Brennpunktsabstand 2l bewegt. $u = 0$ entspricht einer unendlich flachen Ellipse, für die $y = 0$ und $x = -l \cos v$ ist, in Übereinstimmung mit der Beziehung (2).

Trennen wir in (16) reellen und imaginären Teil in

$$x = -l \operatorname{Cof} u \cdot \cos v \quad \text{und} \quad y = -l \operatorname{Sin} u \cdot \sin v, \tag{17}$$

so erkennt man, daß u in der Umgebung der beiden Platten negativ ist, daß also ∂u von dem Gebiet zu den beiden Platten weist. Gemäß der Integraldarstellung für die Wirbelkraft

$$\mathfrak{K} = -\int \frac{\dot{J}}{r} \, dV$$

muß $\operatorname{div} \mathfrak{K} = 0$ sein, und an den Platten muß $\mathfrak{K}$ der Randbedingung für Flächenbelegung

$$\frac{\partial \mathfrak{K}^{(1)}}{\partial n_1} = 4\pi \dot{\gamma}_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathfrak{K}^{(2)}}{\partial n_2} = 4\pi \dot{\gamma}_2$$

genügen. Auf Grund von (16) und (17) stehen die Normalenrichtungen n_1, n_2 von den Platten in die Umgebung weisend mit u in der Beziehung:

$$\partial n_1 = -\partial y = l \cdot \sin v \, \partial u \qquad -\pi \leqq v \leqq 0$$
$$\partial n_2 = \partial y = -l \cdot \sin v \, \partial u \qquad 0 < v \leqq +\pi,$$

daher

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{K}^{(1)}}{\partial u}\right)_{u=0} = 4\pi l \dot{\gamma}_1 \cdot \sin v$$
$$\left(\frac{\partial \mathfrak{K}^{(2)}}{\partial u}\right)_{u=0} = -4\pi l \dot{\gamma}_2 \cdot \sin v$$

und vermittels (11) für beide Lagen:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{\nu^2 L l}{\pi d c^2} \cdot e^{i\nu t} \left\{-\sum_1^m 2 A_m \sin m v \cdot \sin v\right\} = \ldots \left\{-A_1 + \sum (A_{m-1} - A_{m+1}) \cdot \cos m v\right\}. \tag{18}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie-Verhältnisse ist der allgemeinste Ansatz für $\mathfrak{K}$ in den Koordinaten u und v, der der Bedingung $\operatorname{div} \mathfrak{K} = 0$ genügt, der folgende

$$\mathfrak{K} = \frac{\nu^2 L l}{\pi d c^2} e^{i\nu t} \left\{B \cdot u + b_0 + \sum b_n e^{+nu} \cdot \cos n v\right\}.$$

Dieser Ansatz genügt (18), wenn wir die Koeffizienten-Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} B &= -A_1 \\ n b_n &= A_{n-1} - A_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots \text{ mit } A_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

aufstellen, wodurch alle b_n bis auf die Konstante b_0 bestimmt sind. b_0 bestimmen wir wie bei Lenz, S. 763—765. Wäre $A_1 = 0$, würde $\mathfrak{K}$ für $u = -\infty$ nur von b_0 abhängen, und es müßte b_0 gleich Null sein, da $\mathfrak{K}$ im Unendlichen verschwinden muß. D. h. aber b_0 ist von den A_n, $n > 1$ unabhängig. Oder b_0 hängt nur von A_1 ab. Wir brauchen aus (15) $\mathfrak{K}$ nur an einer bestimmten Stelle zu berechnen, wobei wir vorübergehend willkürlich alle A_n außer A_1 Null setzen können. Wir wählen die Stelle $v = \frac{\pi}{2}$; hier ist

$$(\mathfrak{K}_s)_{v=\frac{\pi}{2}} = -4 \int_0^\pi \left(\log \frac{8R}{l\,|\cos v|} - 2\right) \cdot \frac{\nu^2 L}{2\pi^2 d c^2} \cdot e^{i\nu t} \cdot A_1 \cdot \sin v \cdot l \cdot \sin v \, dv$$

oder

$$\mathfrak{K}_s = -\frac{2\nu^2 L l}{\pi^2 d c^2} e^{i\nu t} \cdot A_1 \cdot \int_0^\pi \left(\log \frac{8R}{l\,|\cos v|} - 2\right) \cdot \sin^2 v \, dv.$$

Da $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 v \, dv = \frac{\pi}{2}$ und $\displaystyle\int_0^\pi \log |\cos v| \cdot \sin^2 v \, dv = -\frac{\pi}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4}$,

wird hieraus

$$\mathfrak{K}_s = -\frac{\nu^2 L l}{\pi d c^2} e^{i \nu t} \cdot A_1 \cdot \left\{ \log \frac{8R}{l} - 2 + \log 2 + \frac{1}{2} \right\}.$$

Der Ansatz (19) verlangt für $v = \frac{\pi}{2}$ und falls alle $A_n = 0$ jedoch $A_1 \neq 0$:

$$\mathfrak{K}_s = \frac{\nu^2 L l}{\pi d c^2} e^{i \nu t} (b_0 - b_2),$$

woraus folgt, unter Berücksichtigung, daß (20) bestimmt

$$2 b_2 = A_1$$

$$b_0 = - A_1 \left(\log \frac{16 R}{l} - 2 \right). \tag{21}$$

Die letzte Koeffizientenbeziehung fließt aus der Bedingung (13):

$$\mathfrak{K}_s + \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0.$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ wäre am Draht zu berechnen, bei der vorausgesetzten großen Windungszahl können wir $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ mit dem angenommenen kontinuierlichen Verlauf von Ansatz (3) in die Beziehung setzen unter Benutzung von (7) und (2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} &= + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{2 l}{L} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \cdot \frac{2}{L \cdot \sin v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} = + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \frac{2 l}{L} = + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \cdot \frac{2}{L \cdot \sin v} \end{aligned}\right| \tag{13a}$$

wegen des verschiedenen Vorzeichens von φ_1 und φ_2 heben sich die verschiedenen Vorzeichen auf den rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen gerade heraus und (13) lautet

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = (\mathfrak{K}_s)_{u=0} \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin v.$$

Es ist

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = e^{i \nu t} \cdot (-\Sigma n a_n \cdot \sin n v) \\ &\text{und} \\ &(\mathfrak{K})_{u=0} \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin v = \frac{\nu^2 L^2 l}{2 \pi d c^2} \cdot e^{i \nu t} \left\{ b_0 \sin v + \Sigma b_n \cos n v \cdot \sin v \right\} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Führen wir die Wellenlänge im Äther $\lambda = \frac{2 \pi c}{\nu}$ ein und für das Produkt $\cos n v \cdot \sin v = \frac{1}{2} (-\sin (n-1) v + \sin (n+1) v)$, so ist

$$(\mathfrak{K})_{u=0} \frac{L}{2} \cdot \sin v = \frac{L^2 \pi l}{\lambda^2 d} \cdot e^{i \nu t} \cdot \left\{ 2 b_0 \sin v + \sum_1^n b_n (\sin (n+1) v - \sin (n-1) v) \right\}. \tag{23}$$

Zur Abkürzung setzen wir $\frac{L^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi l}{d} = \frac{1}{q^2}$, dann ergibt eine Koeffizientenvergleichung zwischen (22) und (23)

$$- a_1 = \frac{1}{q^2} (2 b_0 - b_2)$$

$$- n a_n = \frac{1}{q^2} (b_{n-1} - b_{n+1}).$$

Hieraus eleminieren wir die b_n sogleich, indem wir durch (20) und (21) die b_n durch die A_n ausdrücken, man erhält so:

$$\left.\begin{aligned} -a_1 &= \frac{1}{q^2}\left\{-2A_1\left(\log\frac{16R}{l}-2\right)-\frac{A_1-A_3}{2}\right\} \\ -a_n &= \frac{1}{q^2}\left\{\frac{A_{n-2}-A_n}{n(n-1)}-\frac{A_n-A_{n+2}}{n(n+1)}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Als weitere Relationen zwischen den Koeffizienten stehen uns die Gleichungen (9) und (12), sowie die erste Bedingung (4) für die a_n zur Verfügung.

Durch Einsetzen von (9) in (12) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} A_{2l+1} &= \sum_0^k a_{2k}\frac{1}{(2l+1)(4k^2-1)} \\ &+ a_{2k+1}\frac{1-(2k+1)^2-(2l+1)^2}{(2l-1)(2k+1-2l)(2k+1+2l)(2k+1+2l+2)(2k+1-2l-2)} \\ A_2 l &= \sum_0^k a_{2k}\left\{\frac{1}{2l(4k^2-1)}\right. \\ &\left.+\frac{1-4k^2-4l^2}{2l(2k-2l+1)(2k+2l-1)(2k+2l+1)(2k-2l-1)}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Denken wir uns diese Summen für A_n in (25) eingesetzt, so erhalten wir ein System von homogenen Gleichungen von folgendem Typ:

$$\left.\begin{aligned} -a_0 &= \sum_1^\infty{}_n\, a_n \\ -a_1 &= \frac{1}{q^2}\sum_0^\infty{}_n\left\langle c_{1n}+c_{1n}'\left(\log\frac{16R}{l}-2\right)\right\rangle\cdot a_n \\ -a_m &= \frac{1}{q^2}\sum_0^\infty{}_n\, c_{m,n}\cdot a_n; \quad m=2,3,\ldots. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Hierin sind die Größen $c_{m,n}$ vollständig bestimmt durch die Gleichungen (25) und (26).

4. Die Aufstellung der Normaldeterminante, die daraus zu berechnende Reihe und die ersten beiden Eigenwellenlängen.

Wie immer bei der Berechnung von Eigenschwingungen sind die Bedingungen für die unbekannten Koeffizienten homogen, da die Amplitude der Schwingung willkürlich ist; neben den unbekannten Koeffizienten a_n tritt in (27) noch die gesuchte Eigenwellenlänge (mit einem Faktor) q^2 auf, die auch als Eigenwert einer später zu diskutierenden Funktionalgleichung aufgefaßt werden kann. Diese Funktionalgleichung ist durch die analytische Methode umgangen. Wären nun nur endlich viele, sagen wir ν Koeffizienten a_n und damit endlich viele Gleichungen (27) vorhanden, so wäre für die Möglichkeit der widerspruchslosen Erfüllung dieser Gleichungen notwendig und hinreichend das Verschwinden der Determinante der Koeffizienten von a_n; bezeichnen wir diese mit D_ν, so ist

$$D_\nu = \begin{vmatrix} c_{00}+1 & ; & 1 & ; & \ldots, & 1 \\ \frac{1}{q^2}\left(c_{10}+c_{10}'\left(\log\frac{16R}{l}-2\right)\right) & ; & \frac{1}{q^2}\left(c_{11}+c_{11}'\left(\log\frac{16R}{l}-2\right)\right)+1 & ; & \ldots; & \frac{c_{1\nu}}{q^2}+\frac{c_{1\nu}'}{q^2}\left(\log\frac{16R}{l}-2\right) \\ \frac{c_{20}}{q^2} & ; & \frac{c_{21}}{q^2} & ; & \frac{c_{22}}{q^2}+1; \ldots & \frac{c_{2\nu}}{q^2} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{c_{\nu 0}}{q^2} & ; & \frac{c_{\nu 1}}{q^2} & ; & \ldots\ldots\ldots & \frac{c_{\nu\nu}}{q^2}+1. \end{vmatrix} \tag{28}$$

Andererseits muß, wie groß auch immer die Anzahl der Koeffizienten angesetzt sein mag, D_ν gleich Null sein, und ferner verlangt (27), daß diese Zahl ν unendlich groß ist. Es erhebt sich also die Frage, ob $\lim\limits_{\nu=\infty} D_\nu$ existiert und weiter, da D_ν außer von ν von q^2 und von $\left(\log\frac{16R}{l}-2\right)$ abhängt, für welche Werte von q^2 und $\frac{R}{l}$ existiert der Grenzwert:

$$\lim_{\nu=\infty} D_\nu = \lim_{\nu=\infty} D_\nu\left(q^2, \log\frac{16R}{l}-2\right) = D\left(q^2, \log\frac{16R}{l}-2\right).$$

In der Tat existiert ein solcher Grenzwert, wenn die $c_{m,n}$ gewisse Bedingungen erfüllen; der Grenzwert D wird Normaldeterminante genannt. Über eine solche Normaldeterminante gelten folgende Sätze (Kowalewski, Determinantentheorie § 150 und § 151):

I. $\lim\limits_{\nu=\infty} D_\nu = D$ existiert, wenn die Summe der Glieder von D[1]) eine absolut konvergente Summe ist, d. h. wenn

$$\sigma = \sum_{m,n}\left|\frac{c_{m,n}}{q^2}\right| < M \text{ ist.}$$

II. Konvergenz von D_ν hat auch noch statt, wenn alle Glieder einer Zeile (oder einer Spalte) absolut genommen unterhalb einer festen Schranke bleiben.

III. Die Normaldeterminante läßt sich in eine absolut konvergente Reihe verwandeln, und zwar nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{q^2}$.

Um hier nicht die weitere Rechnung zu unterbrechen, verschieben wir den Konvergenzbeweis sowie die rein zahlenmäßige Berechnung der Potenzreihe für $\frac{1}{q^2}$ auf die Schlußparagraphen, wo wir auch die Frage nach der Konvergenz der verwandten Reihen und nach der Berechtigung der gliedweisen Multiplikationen und Differenziationen klären. Hier diene zur Orientierung nur folgendes: Wir brauchen Satz II, da die Glieder der ersten Zeile alle 1 sind. Satz I ist für die übrigen Glieder erfüllt (s. D. 10.); da die Konvergenz der Summe $\sigma = \sum\left|\frac{c_{m,n}}{q^2}\right|$ ersichtlich von $\frac{1}{q^2}$ $\left(\text{und } \log\frac{16R}{l}-2\right)$ unabhängig ist, so folgt, daß auch die Konvergenz der Potenzreihe von Satz III unabhängig von $\frac{1}{q^2}$ ist, oder anders ausgedrückt die Potenzreihe konvergiert für jeden eigentlichen Wert von q^2. D. h. D ist eine ganze transzendente Funktion von q^2. Für die praktische Rechnung folgt jedoch hieraus, daß wir nur wenige Glieder der Potenzreihenentwicklung aufzustellen brauchen. Endlich kommt der Logarithmus nur in einer Zeile vor, also tritt der Logarithmus in der Reihe nur linear auf. Ferner mag bemerkt werden, daß die Gleichung

$$D_\nu(q^2) = 0 \tag{29}$$

in Determinantenform oder als Reihe geschrieben als charakteristische Gleichung bezeichnet wird. In der Determinantentheorie wird gezeigt, daß der Faktor von $\frac{1}{q^{2\mu}}$ in der Potenzreihenentwicklung der charakteristischen Gleichung die Summe aller Hauptminoren μ-ten Grades ist, die D nach Streichung der 1 in den Gliedern der Hauptdiagonale enthält. In D enthält die erste Zeile q^2 nicht, daher treten in unserer Reihe als weitere Faktoren von $\frac{1}{q^{2\mu}}$ auf diejenigen Hauptminoren $(\mu+1)$-ten Grades, die Elemente der nullten Zeile enthalten. Die Entwicklung lautet

[1]) Nach Streichung der Größen 1 in der Hauptdiagonale.

$$\left.\begin{aligned} D(q^2) = 1 + \frac{1}{q^2}\Bigg\{ \Sigma i\, c_{ii} + \Sigma \begin{vmatrix} c_{00} & 1 \\ c_{i0} & c_{ii} \end{vmatrix} + (c_{11}' - c_{10}') \cdot \left(\log \frac{16R}{l} - 2\right)\Bigg\} \\ + \frac{1}{q^4}\Bigg\{ \Sigma \begin{vmatrix} c_{ii} & c_{ik} \\ c_{ki} & c_{kk} \end{vmatrix} + \Sigma \begin{vmatrix} c_{00} & 1 & 1 \\ c_{i0} & c_{ii} & c_{ik} \\ c_{k0} & c_{ki} & c_{kk} \end{vmatrix} + \left(\log \frac{16R}{l} - 2\right)\Bigg[\Sigma \begin{vmatrix} c_{11}' & c_{1i}' \\ c_{i1} & c_{ii} \end{vmatrix} + \\ + \Sigma \begin{vmatrix} c_{00} & 1 & 1 \\ c_{10}' & c_{11}' & c_{1i}' \\ c_{i0} & c_{i1} & c_{ii} \end{vmatrix} \Bigg]\Bigg\} + \frac{1}{q^6}\Big\{ \ldots \Big\} + \ldots . \end{aligned}\right\} \quad (29a)$$

Die Faktoren von $\frac{1}{q^6}$ gehen aus denen von $\frac{1}{q^4}$ durch Rändern der Hauptminoren hervor um eine Zeile und Spalte mit dem neuen Index l, bei $\frac{1}{q^8}$ wird dann wieder mit einer Zeile und Spalte mit dem Index m gerändert usf. Zu summieren ist über alle Indizes 1 bis ∞, die nur der Bedingung genügen

$$i < k < l < m < \ldots < z < \ldots$$

Die Ausführung der Summationen ergibt die Gleichung[1])

$$\left.\begin{aligned} D = 1 + \frac{1}{q^2}\left\{\frac{8}{3}\log 4 - \frac{44}{9} - \frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right)\right\} + \frac{1}{q^4}\left\{0{,}282 \cdot 3 + \frac{7}{18}\cdot\frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right)\right\} \\ + \frac{1}{q^6}\left\{-0{,}027 \cdot 4 - 0{,}033 \cdot 8 \cdot \frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right)\right\} \\ + \frac{1}{q^8}\left\{0{,}000 \cdot 9 + 0{,}000 \cdot 1 \cdot \frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right)\right\} + \ldots . \end{aligned}\right\} \quad (29b)$$

Mit den hier aufgestellten Gliedern haben wir genug, um die beiden ersten Eigenwerte zu berechnen. Wir setzen $D = 0$ und schreiben, was wegen der absoluten Konvergenz erlaubt ist

$$\frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right) = \frac{1 + \frac{1}{q^2}\left(\frac{8}{3}\log 4 - \frac{44}{9}\right) + \frac{1}{q^4}\cdot 0{,}282\cdot 3 - \frac{1}{q^6}\cdot 0{,}027\cdot 4 + \frac{1}{q^8}\cdot 0{,}000\cdot q + \ldots}{\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^4}\cdot\frac{7}{18} + \frac{1}{q^6}\cdot 0{,}033\cdot 8 - \frac{1}{q^8}\cdot 0{,}000\cdot 1 + \ldots .} \quad (30)$$

Aus demselben Grunde können wir die rechte Seite in einen konvergenten Kettenbruch verwandeln,

$$\frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right) = q^2 + \frac{8}{3}\log 4 - \frac{9}{2} - \cfrac{1}{15{,}65\, q^2 - 6{,}14 + \cfrac{1}{1{,}34\, q^2 + 0{,}15 + \ldots .}} \quad (31)$$

Die Genauigkeit von (29b) bzw. (30) kann jetzt erst sicher abgeschätzt werden. Die Ausführung der Division zeigt, daß die ersten Glieder des Kettenbruches ganz unabhängig sind von den späteren Gliedern der Reihe; da aber, wie sich gleich zeigen wird, der Kettenbruch schon ganz vernachlässigt werden kann, so ist auch der Rest der Reihe einflußlos (bis auf etwa 1%, siehe nächste Seite).

Wegen der Unsicherheit, mit der die Faktoren von $\frac{1}{q^8}$ behaftet sind — sie wurden aus etwa 20 Determinanten, Hauptminoren 4. Grades, bestimmt und sind sicher nicht größer als $0{,}000\cdot 9$ und $0{,}000\cdot 1$ — würde auch der nächste Bruch ungenau; dieser ist aber sicher, wie die Ausführung der einzelnen Divisionen zeigt, absolut genommen kleiner als $\frac{1}{400\,q^2 - 50}$, für q^2 etwa gleich $\frac{1}{4}$, also kleiner als 0,02, kann für größere q^2 also unbedenklich vernachlässigt werden.

---

[1]) Über die Ausführung dieser Summation vgl. D. 12.

Fassen wir in (31) Logarithmen und Brüche zusammen, dann ist

$$\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l}-\frac{5}{6}=q^2-\frac{1}{15{,}65\,q^2-6{,}14+\ldots}, \tag{32}$$

nun war $R \geqq 21$ vorausgesetzt, setzen wir einmal den kleinsten Wert für R also 21 ein und nehmen an, q^2 sei in erster Näherung gegeben durch die linke Seite von (32) $q_1^2=\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l}-\frac{5}{6}=4{,}712$ und setzen diesen Wert ein, dann müßte sein

$$4{,}712=4{,}712-\cfrac{1}{68+\cfrac{1}{6{,}5+\ldots}}=4{,}715-0{,}05.$$

0,05 ist etwa 1% von 4,7. Für größere Werte von R wird dies ersichtlich noch günstiger und wir können mit genügender Genauigkeit den Kettenbruch ganz vernachlässigen und setzen

$$q^2=\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l}-\frac{5}{6}. \tag{33}$$

Führen wir wieder die Bedeutung von q^2 ein, so erhalten wir für die Grundschwingung

$$\lambda_1=L\sqrt{\frac{\pi l}{d}}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l}-\frac{5}{6}};\quad R\geqq 21. \tag{34}$$

Der Einfluß des Kettenbruches wird erst merklich, wenn q^2 abnimmt, so daß der Nenner der rechten Seite von (30) sehr klein wird. Da Zähler und Nenner beständig konvergent sind, muß für $R=\infty$ der Nenner Null sein. Wir setzen zunächst die ersten drei Glieder des Nenners von (30) $q^4-\frac{7}{18}q^2+0{,}033\cdot 8=0$ und berechnen daraus die größte Wurzel von q^2 zu

$$q^2=0{,}194\cdot 5+\sqrt{0{,}194\cdot 5^2-0{,}033\cdot 8}=+0{,}257,$$

nehmen wir noch das nächste Glied hinzu, so wird 0,257 zu groß sein und eine kleine Abschätzung und Einsetzen zeigt, daß $q^2=0{,}256$ die Gleichung

$$q^6-\frac{7}{18}q^4+0{,}033\cdot 8\,q^2-0{,}000\cdot 1=0$$

erfüllt. Um diesen Wert auf endlichen Spulenradius zu verbessern, führen wir eine kleine Korrektion δ ein, indem wir setzen

$$q^2=0{,}256+\delta. \tag{35}$$

Bei der Ausführung der Division der rechten Seite von (30) erhält man als erstes Resultat

$$\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l}-\frac{5}{6}=q^2-\frac{0{,}063\cdot 9\,q^4+0{,}000\cdot 2\,q^2-0{,}000\cdot 8+\ldots}{q^6-0{,}388\,q^4+0{,}033\cdot 8\,q^2-0{,}000\cdot 1+\ldots},$$

worin wir (35) einsetzen unter Vernachlässigung von Potenzen von δ. Wir erhalten

$$\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l}-\frac{5}{6}=0{,}256+\delta-\frac{0{,}003\cdot 4+0{,}033\,\delta+\ldots\ldots}{0{,}031\,\delta+\ldots\ldots} \tag{35a}$$

oder

$$\frac{1}{\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l}-1{,}089-\delta}=-\frac{0{,}031\,\delta+\ldots}{0{,}003\cdot 4+0{,}033\,\delta}.$$

Für kleine δ ist die rechte Seite $-\delta\cdot\frac{0{,}031}{0{,}003\cdot 4}=-9{,}12\,\delta$, und in dem Nenner der linken Seite werden wir δ gegen den Logarithmus streichen können, somit wird

$$\delta=-\frac{1}{24\log\frac{4R}{l}-10}$$

und wir erhalten für die erste ungradzahlige Oberschwingung

$$\lambda_3 = L \sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{0{,}256 - \frac{1}{24 \log \frac{4R}{l} - 10}}. \tag{36}$$

Für die weiteren Oberschwingungen schlagen wir einen anderen Weg ein, den wir auf den übernächsten Paragraphen verschieben und der uns weitere mühselige Rechnungen an der Determinante oder der Reihe erspart. Zunächst versuchen wir unsere Formeln auf längere Spulen auszudehnen.

Weitere Näherung für längere Spulen.

Bei der Ableitung der Formel für die Grundschwingung war nur bei der Einführung des Koeffizienten der gegenseitigen Induktion $M_1 = 4\pi R\left(\log\frac{8R}{x} - 2\right)$ vorausgesetzt, daß $\frac{x}{R}$ bzw. $\frac{l}{R}$ kleiner als 1 sein muß. Durch genaue Berücksichtigung der Induktion können wir erwarten, die Anwendbarkeit unserer Formel auszudehnen.

In allgemein gültiger Strenge ist der gegenseitige Induktionskoeffizient M gegeben durch die beiden vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung F und E in der Kombination:

$$M = 4\pi R\left(\left(\frac{2}{k} - k\right)\cdot F - \frac{2}{k}\cdot E\right),$$

worin der Modul $k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2R}\right)^2}}$ ist. Die hierfür aufgestellten Näherungsformeln[1]) würden die Integration, die zur Berechnung von $\mathfrak{K}$ nötig ist, äußerst kompliziert gestalten. Wir gelangen auf einem sehr einfachen graphischen Wege zu der Korrektion x, die auch für sonstige Verhältnisse einer Anwendung fähig ist und die die Integration prinzipiell äußerst einfach gestaltet.

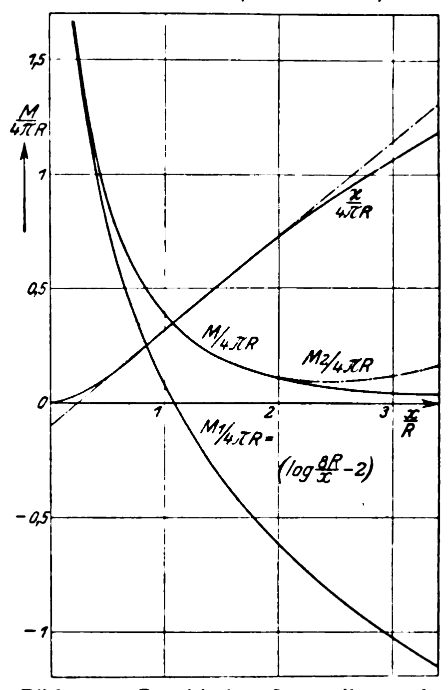


Bild 3. Graphische Darstellung der Näherungen für den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zweier Kreisringe.

Mit Hilfe der Tabellen für die elliptischen Integrale (Jahncke und Emde) wurde $\frac{M}{4\pi R}$ als Funktion von $\frac{x}{R}$ berechnet; ferner wurde $\frac{M_1}{4\pi R} = \log\frac{8R}{x} - 2$ berechnet. Wir definieren $\varkappa$ durch: $M = M_1 + \varkappa$. M, M_1 und $\varkappa$ wurden graphisch aufgetragen in Bild 3. In dem Bilde fällt sofort der geradlinige Verlauf von $\varkappa$ im Bereich $\frac{3}{5} \leq \frac{x}{R} \leq 2$ auf. Ersetzen wir die Kurve für $\varkappa$ durch eine Gerade $\frac{\varkappa}{4\pi R} = f_1 \cdot \frac{|x|}{R} + f_2$, wie im Bilde strichpunktiert gezeichnet, so fällt die Abweichung von dem wirklichen Wert von $\varkappa$ auch im Bereich $\frac{|x|}{R} < \frac{3}{5}$ nicht sehr ins Gewicht,

[1]) Zusammengestellt bei E. Rosa und F. W. Grover, Bull. of the Bur. of Standards Bd. 8, 1912.

da hier M sehr groß ist. Die Größen f_1 und f_2 wurden durch die berechneten x-Werte mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Man erhält $f_1 = 0{,}415$ und $f_2 = -0{,}1$. Der Ausdruck $M = 4\pi R\left(\log\frac{8R}{|x|} - 2 + 0{,}415\frac{|x|}{R} - 0{,}1\right)$ erweist sich als eine genügende Annäherung an M, wie auch tabellarisch berechnet wurde; die Abweichung des Ausdrucks von M wurde $< 2\%$ festgestellt. Nach allem setzen wir in (15) die so gewonnene Näherung für M ein:

$$\mathfrak{K}_s(x_0) = -4\int_{-1}^{+1}\left\{\log\frac{8R}{|x-x_0|} - 2{,}1 + 0{,}415\frac{|x-x_0|}{R}\right\}\cdot\dot{\gamma}\,dx \tag{37}$$

und vergleichen nach Ausführung der Integration mit (19) für $u = 0$. Bemerken wollen wir hier noch, daß der durch die Abweichungen bedingte Fehler sich bei Ausführung von (37) nicht vergrößern wird, im Gegenteil werden sich die positiven und negativen Abweichungen zum Teil noch wieder zerstören. Wir wollen (37) schreiben

$$\mathfrak{K}_s(x_0) = -4\int_{-1}^{+1}\left\{\log\frac{8R}{|x-x_0|} - 2{,}1\right\}\dot{\gamma}\,dx - 4\int_{-1}^{+1}\frac{0{,}415}{R}\,|x-x_0|\cdot\dot{\gamma}\,dx$$

und in dem ersten Integral die Form (11), in dem zweiten die Form (10) von $\dot{\gamma}$ einführen; für x_0, x, dx werden natürlich die bezüglichen Ausdrücke in v_0, v eingesetzt. Hierdurch wird

$$\mathfrak{K}_s(v_0) = \frac{\nu^2 L l}{8\pi d c^2}e^{i\nu t}\cdot\left\{\begin{array}{l} -4\int_0^{\pi}\left\{\log\frac{8R}{l\,|\cos v - \cos v_0|} - 2{,}1\right\}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\sum A_m \sin m v \sin v\,dv \\ -4\int_0^{\pi}\frac{0{,}415\,l}{R}\cdot|\cos v - \cos v_0|\left(\frac{d_0}{2} + \sum d_n \cos n v\right)\sin v\,dv \end{array}\right\}$$

Das erste Integral ist in A. 3. durch die analytische Methode ausgeführt, das zweite muß nach Verwandlung der auftretenden Produkte der trigonometrischen Funktionen in Summen und Differenzen derselben unter Beachtung der Absolutstriche von $|\cos v - \cos v_0|$ ausgeführt werden, zur Abkürzung setzen wir in dem zweiten Integral

$$\frac{0{,}415\,l}{R} = \varrho. \tag{38}$$

Damit wird

$$\mathfrak{K}_s(v_0) = \frac{\nu^2 L l}{\pi d c^2}e^{i\nu t}\cdot\left\{\begin{array}{l} -A_1\left(\log\frac{16R}{l} - 2{,}1\right) + \sum_1 n\,\frac{A_{n+1} - A_{n-1}}{n}\cdot\cos n v_0 \\ -\frac{\varrho}{2}\int_0^{\pi}|\cos v - \cos v_0|\left(\frac{d_0}{2}\sin v + \sum\frac{d_n}{2}(\sin(n+1)v - \sin(n-1\,v))\right)dv \end{array}\right\}$$

Die Ausführung des zweiten Integrals ergibt, nachdem auch nach der Integration die Produkte $\cos v_0$ mit den auftretenden $\cos n v_0$ in Summen verwandelt sind und nach Umordnung nach $\cos n v_0$

$$-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{d_0}{2}-\frac{3}{8}d_2-\sum_2^n d_{2n}\frac{2}{(2n-2)(2n+2)}\right)-\frac{\varrho}{2}\cos v_0\left(-\frac{3}{4}d_1+\frac{1}{4}d_3+\right.$$

$$\left.+\sum_1^n d_{2n+1}\frac{2}{2n(2n+2)}\right)-\frac{\varrho}{2}\cos 2v_0\left(\frac{1}{4}d_0-\frac{1}{3}d_2+\frac{1}{12}d_4\right)$$

$$-\frac{\varrho}{2}\sum_3^n \cos n v_0\left(\frac{d_{n-2}}{2n(n-1)}-\frac{d_n}{(n-1)(n+1)}+\frac{d_{n+2}}{2n(n+1)}\right).$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von $\cos n v_0$ mit (19)

$$(\Re(v_0))_{u=0}=\frac{\nu^2 L l}{\pi d c^2}e^{i\nu t}\left\{b_0+\sum b_n \cos n v_0\right\}$$

erhalten wir die neuen Relationen zwischen den b_n einerseits und den A_n, d_n andererseits:

$$b_0=-A_1\left(\log\frac{16R}{l}-2{,}1\right)-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{d_0}{2}-\frac{3}{8}d_2-\sum_2^n d_{2n}\frac{2}{(2n-2)(2n+2)}\right)$$

$$b_1=-A_2-\frac{\varrho}{2}\left(-\frac{3}{4}d_1+\frac{1}{4}d_3+\sum_1^n d_{2n+1}\frac{2}{2n(2n+2)}\right)$$

$$b_2=\frac{A_1-A_3}{2}-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{d_0}{2}-\frac{1}{3}d_2+\frac{1}{12}d_4\right)$$

$$b_n=\frac{A_{n-1}-A_{n+1}}{n}-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{d_{n-2}}{2n(n-1)}-\frac{d_n}{(n-1)(n+1)}+\frac{d_{n+2}}{2n(n+1)}\right).$$

An den Beziehungen (24) zwischen a_n und b_n wird nichts geändert, wir haben nur einzusetzen b_n in (24):

$$-a_1=\frac{1}{q^2}\left(-2A_1\left(\log\frac{16R}{l}-2{,}1\right)-\frac{A_1-A_3}{2}\right)$$

$$+\frac{\varrho}{q^2}\left(-\frac{5}{4}\cdot\frac{d_0}{2}+\frac{5}{24}d_2+\frac{1}{24}d_4+\sum^n d_{2n}\frac{2}{(2n-2)(2n+2)}\right)$$

$$-a_2=\frac{1}{q^2}\left(-\frac{A_2}{2}-\frac{A_2-A_4}{6}\right)+\frac{\varrho}{q^2}\left(\frac{5}{24}d_1-\frac{3}{32}d_3+\frac{1}{96}d_5-\sum_1^n d_{2n+1}\frac{1}{4n(2n+2)}\right)$$

$$-a_3=\frac{1}{q^2}\left(\frac{A_1-A_3}{6}-\frac{A_3-A_5}{12}\right)+\frac{\varrho}{q^2}\left(-\frac{1}{24}d_0+\frac{1}{16}d_2-\frac{1}{40}d_4+\frac{1}{240}d_6\right)$$

$$-a_m=\frac{1}{q^2}\left(\frac{A_{m-2}-A_m}{m(m-1)}-\frac{A_m-A_{m+2}}{m(m+1)}\right)$$

$$+\frac{\varrho}{q^2}\left(-\frac{d_{m-3}}{4m(m-1)(m-2)}+\frac{3d_{m-1}}{4m(m+1)(m-2)}-\frac{3d_{m+1}}{4m(m-1)(m+2)}-\frac{d_{m+3}}{4m(m+1)(m+2)}\right).$$

Endlich haben wir in den vorstehenden Gleichungen noch die d_m durch a_m gemäß (9) zu ersetzen und kommen damit zum Schluß wieder auf ein homogenes System in den a_n, wenn wir uns die A_n auch noch durch die Summen (26) ersetzt denken. Das System ist

$$\left.\begin{aligned}
&-a_0=\sum a_n\\
&-a_1=\frac{1}{q^2}\sum^n\left\langle c_{1n}+c'_{1n}\left(\log\frac{16R}{l}-2{,}1\right)\right\rangle\cdot a_n+\frac{\varrho}{q^2}\left(\frac{5}{4}a_0-\frac{35}{96}a_1-\frac{5}{12}a_2+\right.\\
&\left.+\frac{35}{192}a_3-\frac{1}{12}a_4+\frac{7}{96}a_5-\sum_6^n a_n\frac{(-1)^n\cdot 5}{4(n^2-1)}+\sum_3^n a_{2n+1}\frac{6}{(2n-2)2n(2n+2)(2n+4)}\right)\\
&-a_2=\frac{1}{q^2}\sum^n c_{2,n}\cdot a_n+\frac{\varrho}{q^2}\left(-\frac{5}{24}a_0+\frac{25}{192}a_2-\frac{1}{40}a_4-\frac{1}{3360}a_6-\sum_4^n a_{2n}\cdot\frac{3}{2(4n^2-1)(4n^2-4)}\right)
\end{aligned}\right\}(39)$$

$$-a_3 = \frac{1}{q^2}\sum^n c_{8,n}\cdot a_n + \frac{\varrho}{q^2}\left(\frac{1}{12}a_0 - \frac{7}{192}a_1 - \frac{1}{36}a_2 + \frac{7}{240}a_3 - \frac{1}{180}a_4 - \frac{1}{420}a_6 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{480}a_7 - \sum_8^n a_n \frac{(-1)^n}{12(n^2-1)}\right)$$

$$-a_m = \frac{1}{q^2}\sum^n c_{m,n}\cdot a_n + \frac{\varrho}{q^2}\left(\frac{a_{m-4}}{8m(m-1)(m-2)(m-3)} - \frac{4a_{m-2}}{8m(m+1)(m-1)(m-3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{6a_m}{8(m-2)(m-1)(m+1)(m+2)} - \frac{4a_{m+2}}{8m(m-1)(m+1)(m+3)} + \frac{a_{m+4}}{8m(m+1)(m+2)(m+3)}\right)$$

Auf dieses so gewonnene Gleichungssystem sind alle Überlegungen aus A. 4. anzuwenden, und wir gehen sogleich zur Betrachtung der neuen Normaldeterminante über, die auch in der neuen Form mit

$$D = D\left(q^2, \log\frac{16R}{l} - 2{,}1, \varrho\right)$$

bezeichnet werde.

Neben den alten Gliedern von D den Größen $\frac{c_{ik}}{q^2}$ und $\frac{c_1{}'_k}{q^2}\left(\log\frac{16R}{l} - 2{,}1\right)$ treten neue Glieder $c^*_{ik}\cdot\frac{\varrho}{q^2}$ auf. An der Konvergenz von D wird offensichtlich nichts geändert; die in den ersten drei Zeilen auftretenden c^*_{ik} nehmen mit k wie $\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{k^2-1}$ oder schneller ab; in der Hauptdiagonale der Determinante und in vier Parallellen zu dieser Diagonale nehmen die $c^*_{m,m-4}$, $c^*_{m,m-2}$, $c^*_{m,m}$, $c^*_{m,m+2}$, $c^*_{m,m+4}$ mit der 4ten Potenz von m ab. Also ist die Summe

$$\sum_{i,k}\left|\frac{c^*_{ik}\cdot\varrho}{q^2}\right| = \frac{\varrho}{q^2}\cdot\sum_{i,k}|c^*_{ik}|$$

absolut konvergent unabhängig von ϱ und q^2.

Des weiteren sind alle Eigenschaften der Reihe (29a), (29b) auf die Reihe anzuwenden, die aus der Normaldeterminante von (39) zu berechnen ist. Man kann nun zwei verschiedene Auffassungen für die Berechnung der neuen Reihe zugrunde legen. Entweder man bemerkt, daß der Einfluß der c^*_{ik} mit wachsendem Index ja schnell abnimmt, streicht daher alle c^*_{ik}, die absolut kleiner als eine bestimmte kleine Zahl sind, und berechnet dann mit den stehengebliebenen c^*_{ik} die neue Reihe. Dabei ist aber schwer abzuschätzen, welchen Fehler man begeht. Oder aber man berechnet für die Reihe die ersten Glieder mit ϱ so genau wie möglich oder nötig und bricht in der Reihe ab, sobald der Einfluß der folgenden Glieder erkennbar klein wird. Entscheiden wir uns für diesen Weg und berechnen sogleich die ersten Koeffizienten in der Reihenentwicklung, was leicht und exakt durchzuführen ist. Ein bestimmter Hauptminor, z. B. 2. Grades, wird jetzt die Form haben

$$\frac{1}{q^4}\begin{vmatrix} c_{ii} + c^*_{ii}\cdot\varrho, & c_{ik} + c^*_{ik}\cdot\varrho \\ c_{ki} + c^*_{ki}\cdot\varrho, & c_{kk} + c^*_{kk}\varrho \end{vmatrix}$$

und läßt sich nach den Regeln der Determinantenrechnung auch schreiben

$$\frac{1}{q^4}\cdot\begin{vmatrix} c_{ii} & c_{ik} \\ c_{ki} & c_{kk}\end{vmatrix} + \frac{\varrho}{q^4}\cdot\begin{vmatrix} c_{ii} & c^*_{ik} \\ c_{ki} & c^*_{kk}\end{vmatrix} + \frac{\varrho}{q^4}\cdot\begin{vmatrix} c^*_{ii} & c_{ik} \\ c^*_{ki} & c_{kk}\end{vmatrix} + \frac{\varrho^2}{q^4}\cdot\begin{vmatrix} c^*_{ii} & c^*_{ik} \\ c^*_{ki} & c^*_{kk}\end{vmatrix}.$$

Entsprechendes gilt für alle Hauptminoren auch höheren Grades; das erste von ϱ freie Glied dieser vorstehenden Summe trat schon in (29a) auf, d. h. die neue Reihe enthält alle Glieder von (29a) oder (29b). Als erste Glieder, die ϱ enthalten, werden auftreten

$$\frac{\varrho}{q^2} \cdot \sum_1^\infty i\, c_{ii}^{\bullet} + \frac{\varrho}{q^2} \cdot \sum_1^\infty i \begin{vmatrix} c_{oo} & 1 \\ c_{io}^{\bullet} & c_{ii}^{\bullet} \end{vmatrix}$$

oder, was dasselbe ist, da $c_{io}^{\bullet}$ nur in den ersten 4 Gleichungen (39) auftreten und $c_{oo} = 0$

$$\frac{\varrho}{q^2} \left\{ \sum_1^\infty i\, c_{ii}^{\bullet} - c_{10}^{\bullet} - c_{20}^{\bullet} - c_{30}^{\bullet} - c_{40}^{\bullet} \right\}. \tag{40}$$

Wir entnehmen aus (39):

$$c_{1,1}^{\bullet} - c_{1,0}^{\bullet} = -\frac{35}{96} - \frac{5}{4} = -\frac{155}{96}$$

$$c_{2,2}^{\bullet} - c_{2,0}^{\bullet} = +\frac{125}{192} + \frac{5}{24} = +\frac{65}{192}$$

$$c_{3,3}^{\bullet} - c_{3,0}^{\bullet} = \frac{7}{240} - \frac{1}{12} = \underline{\frac{6}{8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5}} - \frac{7}{8 \cdot 12}$$

$$c_{4,4}^{\bullet} - c_{4,0}^{\bullet} = \underline{\frac{6}{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}} - \frac{1}{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$c_{n,n}^{\bullet} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)}; \quad n = 5, 6, 7 \ldots.$$

Die unterstrichenen Teile ziehen wir in die folgende Summe, so daß (40) wird

$$\frac{\varrho}{q^2} \left\{ -\frac{65}{48} + \frac{3}{4} \cdot \sum_3^\infty n \frac{1}{(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)} \right\}. \tag{41}$$

Wir setzen für die Summe

$$w(z) = \sum_3^\infty n \frac{z^{n+2}}{(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)} \quad \text{für } z = +1;$$

es ist aber

$$w(z) = z \frac{(1-z)^3}{3!} \left\{ \log(1-z) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right\} + 2 \frac{(1-z)^4}{4!} \left\{ \log(1-z) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right\} +$$
$$+ \frac{z^4}{12} - \frac{5}{36} z + \frac{2}{4!} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right).$$

Man überzeugt sich von der Übereinstimmung dieses geschlossenen Ausdrucks mit der Potenzreihenentwicklung für w(z), indem man bildet

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \frac{d^2 w}{dz^2} \right) = \sum_3^\infty n \frac{z^{n-2}}{n-2} = -\log(1-z).$$

Der geschlossene Ausdruck für w(z) wurde natürlich rückwärts durch Integration gefunden, dabei wurden die Konstanten so bestimmt, daß $\frac{1}{z} \cdot \frac{d^2 w}{dz^2}$, $\frac{dw}{dz}$ und und w(z) für $z = 0$ verschwinden, somit wird w(z) auch von der richtigen Ordnung Null, wenn $z = 0$ wird.

Für $z = +1$ erhalten wir:

$$w(1) = \frac{1}{12} - \frac{5}{36} + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{4 \cdot 36}.$$

w(1) setzen wir in (41) ein und bekommen:

$$\frac{\varrho}{q^2} \left\{ -\frac{65}{48} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4 \cdot 36} \right\} = -\frac{85}{64} \cdot \frac{\varrho}{q^2} = -1{,}328 \cdot 1 \frac{\varrho}{q^2}.$$

Nachdem dies erhalten, läßt sich der nächste Faktor in der Reihenentwicklung D von $\frac{\varrho}{q^4}\left\{\log\frac{16R}{l}-2,1\right\}$ schnell berechnen; bei der späteren Diskussion der Reihe zeigt sich, daß diese beiden Glieder allein für uns wichtig sind. Für die numerischen Rechnungen war es praktisch von den $c_{1,k}'$ den Faktor $\frac{8}{3}$ abzuspalten; die hierunter mitgeteilten $c_{1,k}'$, die aus (25) und (26) zu berechnen sind, sind dementsprechend alle mit $\frac{3}{8}$ multipliziert. Die Summe der Hauptminoren zweiten Grades und derjenigen dritten Grades, die Elemente der nullten Zeile enthalten, die alle zusammen den Faktor von $\frac{8}{3}\frac{\varrho}{q^4}\left\{\log\frac{16R}{l}-2,1\right\}$ ausmachen, läßt sich schreiben

$$\sum_2^\infty{}_i \begin{vmatrix} c_{1,1}' & c_{1,i}' \\ c_{i,1}^* & c_{ii}^* \end{vmatrix} + \Sigma \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ c_{1,0}' & c_{1,1}' & c_{1,i}' \\ c_{i,0}^* & c_{c,1}^* & c_{ii}^* \end{vmatrix} \tag{44}$$

oder ausgeführt, da nur vier c_{i0}^* und fünf $c_{i,1}^*$ auftreten, und zusammengefaßt

$$(c_{1,1}'-c_{1,0}')\cdot\left(\sum_2^\infty{}_i\, c_{ii}^*-\sum_2^4{}_i\, c_{i0}^*\right)-c_{1,0}'\cdot\sum_2^4{}_i\, c_{i,0}^*+c_{1,0}'\cdot\sum_2^5{}_i\, c_{i,1}^*-\sum_2^5{}_i\, c_{i,1}^*\cdot c_{1,i}'+\sum_2^4{}_i\, c_{i,0}^*\cdot c_{1,i}'.$$

Die ersten beiden eingeklammerten Summen haben wir gerade berechnet, wir haben nur das Anfangsglied $c_{1,1}^*-c_{1,0}^*=-\frac{155}{96}$ von (43) $-1,328$ wieder abzuziehen. Aus (25), (26), (39) entnehmen wir die übrigen in (44) vorkommenden Größen

$$c_{1,0}'=+\frac{3}{4};\quad c_{1,1}'=-\frac{1}{4};\quad c_{1,2}'=-\frac{1}{4};\quad c_{1,3}'=+\frac{3}{20};\quad c_{1,4}'=-\frac{1}{20};\quad c_{1,5}'=+\frac{1}{28}$$

$$c_{2,0}^*=+\frac{5}{24};\quad c_{3,0}^*=+\frac{1}{12};\quad c_{4,0}^*=+\frac{1}{192};\quad c_{3,1}^*=-\frac{7}{192};\quad c_{5,1}^*=+\frac{1}{960}$$

und dies alles eingesetzt, ergibt unseren gesuchten Faktor zu

$$-\frac{1031}{6720}=-0,153\cdot 4.$$

Die neue Reihe teilen wir gleich in der Form (30) als Quotient mit; die weiteren Glieder mit ϱ lassen sich natürlich nur durch rein numerische Rechnungen aus den Hauptminoren gewinnen. Für die nächsten Glieder wurde dies noch durchgeführt und ergibt

$$\frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l}-2,1\right)=$$

$$\frac{1+\frac{1}{q^2}\left(\frac{8}{3}\log 4-\frac{44}{9}-1,328\varrho\right)+\frac{1}{q^4}(0,282\cdot 3+0,496\cdot 9\varrho-0,241\cdot 7\varrho^2)-0,027\cdot 4\frac{1}{q^6}+0,000\cdot 9\frac{1}{q^8}+\ldots}{\frac{1}{q^2}-\frac{7}{18}\cdot\frac{1}{q^4}+0,153\cdot 4\frac{\varrho}{q^4}+0,033\cdot 8\frac{1}{q^6}-0,018\cdot 1\frac{\varrho}{q^6}+0,003\frac{\varrho^2}{q^2}-0,000\cdot 1\frac{1}{q^8}+\ldots}$$

Wegen der Potenzen von ϱ ist eine glatte Kettenbruchentwicklung nicht mehr gut möglich, eine einmalige Division zeigt aber 1., daß

$$\left.\begin{aligned}&\frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l}-2,1\right)=q^2+\frac{8}{3}\log 4-\frac{9}{2}-1,481\cdot 5\varrho\\ &-\frac{0,063\cdot 9+0,056\varrho+0,014\cdot 2\varrho^2+0,000\cdot 2\frac{1}{q^2}-0,000\cdot 8\frac{1}{q^4}-0,050\frac{\varrho}{q^2}+0,000\cdot 1\frac{\varrho}{q^4}+\ldots}{q^2-\frac{7}{18}+0,153\cdot 4\varrho+0,033\cdot 8\frac{1}{q^2}-0,018\cdot 1\frac{\varrho}{q^2}+0,003\frac{\varrho^2}{q^2}-0,000\cdot 1\frac{1}{q^4}+\ldots}\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

und daß wir 2. wieder den ganzen Bruch gegen die ersten Terme streichen können.

Für $\varrho = 0{,}415 \frac{l}{R}$ [vgl. (38)] ist höchstens der Wert 1 zuzulassen, wobei q^2 aber immer noch bei Benutzung der ersten Terme als erste Näherung etwa gleich 2 ausfällt und der Bruch etwa 0,07. Auch hier wird für größere R, also kleinere ϱ und größere q dies Verhältnis noch günstiger, und wir werden deshalb mit ausreichender Genauigkeit setzen können

$$q^2 = \frac{8}{3} \log \frac{4R}{l} - 1{,}1 + 0{,}615 \frac{l}{R};$$

da $\lambda^2 = L^2 \frac{\pi l}{d} \cdot q^2$ gesetzt war, wird die Wellenlänge der Grundschwingung

$$\lambda_1 = L \sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{\frac{8}{3} \log \frac{4R}{l} - 1{,}1 + 0{,}615 \frac{l}{R}}; \quad R \geqq 0{,}4\, l, \tag{46}$$

wir haben etwas vorgreifend als Bedingung $R \geqq 0{,}4\, l$ hinzugefügt, was später an Hand einer graphischen Darstellung durch Vergleich mit der Schröderschen Formel gerechtfertigt werden wird.

Man könnte auch die Formel (36) für λ_3 noch verbessern bzw. für längere Spulen erweitern. Da jedoch nur der Nenner von δ in (35) um ein geringes geändert wird, so unterdrücken wir die Rechnung und Änderung als belanglos.

6. Eine Vereinfachung und Berichtigung der Schröderschen Formel für die Oberschwingungen.

Um das Thema dieses Abschnittes erledigen zu können, ist es nötig, zuvor eine Berichtigung der Schröderschen Formel zu geben. Ich teile diese Berichtigung hier im Einvernehmen mit Herrn Schröder mit. In Frage kommen die Bezeichnungen S. 205 und Formeln S. 206, 210 und 211 der Schröderschen Arbeit. Um Verwicklungen zu vermeiden, ist es nötig, folgende Festsetzungen zu treffen. Mit eckiger Klammer wollen wir die Formeln, Gleichungen, Abschnitte und Seiten der Schröderschen Arbeit zitieren. Die der Rechnung zugrunde liegende unendlich lange Spule des Abschnittes [3] werde Ideal-Spule genannt mit den Bezeichnungen dieses Abschnittes [3]; diese Ideal-Spule hat auf der Länge 2l die Drahtlänge $L_1 + L_2 = 2L$. Ferner sei uns eine wirkliche Spule, die freie Spule vorgegeben von der Länge $2l^*$ und der gesamten aufgewickelten Drahtlänge $L_1^* + L_2^* = 2L^*$. Die Frage ist: Wie ist die Ideal-Spule auszuschneiden, um die Schwingungsverhältnisse auf Grund der Ansätze [9] und [12] richtig zu charakterisieren? Ideal-Spule und freie Spule haben im übrigen gleichen Querschnitt, also gleiche Radien $R_{1,2}$ und gleichen Wicklungsabstand 2d. Zunächst die Näherungsformel auf Grund der Thomsonschen Schwingungsformel [1]. N_1^* und N_2^* seien die Windungszahlen der ersten bzw. der zweiten Lage. Die erste Maxwellsche Gleichung liefert als Beziehung zwischen Magnetfeld H und Stromstärke J

$$H \cdot 2l^* = 4\pi J \cdot (N_1^* + N_2^*)$$

mit der Beziehung zwischen Windungszahl und Drahtlänge

$$2\pi R (N_1^* + N_2^*) = L_1^* + L_2^* = 2L^*$$

wird

$$H = \frac{4\pi J}{2l^*} \cdot \frac{2L^*}{2\pi R} = \frac{2L^*}{R \cdot l^*} \cdot J.$$

Die magnetische Energie der Spule ist

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int H^2 \, dV = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{4 L^{*2}}{R^2 \cdot l^{*2}} \cdot J^2 \cdot \pi R^2 \cdot 2l^* = \frac{L^{*2}}{l^*} \cdot J^2 = \frac{1}{2} \Lambda J^2,$$

also ist die Selbstinduktion $\Lambda = \frac{2L^{*2}}{l^*}$.



Die Kapazität der Spule ist gegeben durch [3] $C = \frac{R \cdot l^*}{2 d c^2}$, und so gibt [1] $\lambda = 2 \pi c \sqrt{\Lambda \cdot C}$ richtig:

$$\lambda_1 = 2 L^* \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{R}{d}} \text{ [1]}. \tag{48}$$

Für die Diskussion des Schwingungszustandes der Ideal-Spule auf Grund der Ansätze [9] und [12] ist es gleich, ob wir die erste oder die zweite Lage betrachten, es kommt nur auf die z-Richtung an. Setzen wir in [9] und [12] $p = 1$, dann bestehen für φ und $\mathfrak{K}$ die Proportionalitäten:

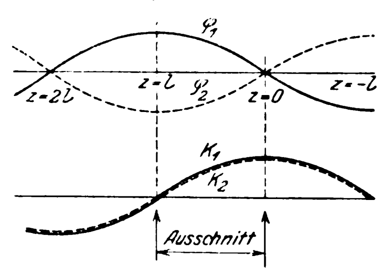


Bild 4. Verteilung des Potentials φ und der Wirbelkraft $\mathfrak{K}$ an der Ideal-Spule.

$$\varphi \approx \sin \frac{\pi z}{2 l}$$

$$\mathfrak{K} \approx \cos \frac{\pi z}{2 l}$$

und es ist

$\varphi = 0$ bei $z = 0$;
$\mathfrak{K} \approx 1$ bei $z = 0$;
$\varphi \approx 1$ bei $z = l$
$\mathfrak{K} = 0$ bei $z = l$.

Die Schwingungsverhältnisse sind (siehe auch Bild 4) auf einem Ausschnitt der Ideal-Spule von der Länge l so, wie die einleitenden Erörterungen des Abschnittes 1 für die Grundschwingung verlangen. Auf diesem Ausschnitt ist die Drahtlänge $\frac{1}{2}(L_1 + L_2) = L$. Ist demnach eine freie Spule mit den Maßen $2 l^*$ und $2 L^*$ gegeben, so ist in den Ergebnissen [39] und [41] l durch $2 l^*$ und L durch $2 L^*$ zu ersetzen:

$$\lambda_1 = 4 L^* \cdot \sqrt{\frac{i \pi R}{d} \cdot J_1\left(i \frac{\pi R}{4 l^*}\right) \cdot H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi R}{4 l^*}\right)} \text{ [2]} \tag{49}$$

und für

$$R \lessdot l^* : \lambda_1 = 4 L^* \cdot \sqrt{\frac{R}{d}} \tag{50}$$

zum Vergleich mit (48).

Für die Oberschwingungen müssen wir nun diesen Ausschnitt an der Ideal-Spule festhalten, und wir müssen prüfen, ob in den Ansätzen auch $p = 2$ oder gleich allgemeiner $p = 2n$ gesetzt werden darf. Offenbar nicht, da

$$\varphi \approx \sin\left(\pi \, 2 n \frac{z}{2 l}\right)$$

bei $z = 0$ und $z = l$ verschwindet,

$$\mathfrak{K} \approx \cos\left(\pi \, 2 n \frac{z}{2 l}\right)$$

an beiden Stellen $\neq 0$ ist, was den Eigenschaften der ungradzahligen Oberschwingungen widerspricht. Mit $p = 2n + 1$ erhalten wir die Oberschwingungen entsprechend [43]

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4 L^*}{2n+1} \cdot \sqrt{\frac{i \pi R}{d} \cdot J_1\left(i \frac{\pi R}{4 l^*} \cdot (2n+1)\right) \cdot H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi R}{4 l^*} (2n+1)\right)} \text{ [3]} \tag{51}$$

[1]) Bei Herrn Schröder lautete diese Formel:

$$\lambda_1 = \pi L \sqrt{\frac{R}{2 d}}. \tag*{[4]}$$

[2]) Bei Herrn Schröder lautete die Formel:

$$\lambda_1 = 2 L \sqrt{\frac{i \pi R}{d} \cdot J_1\left(i \frac{\pi R}{2 l}\right) \cdot H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi R}{2 l}\right)}. \tag*{[39]}$$

[3]) Bei Herrn Schröder lautete die Formel:

$$\lambda_p = \frac{2 L}{p} \cdot \sqrt{\frac{i \pi R}{d} \cdot J_1\left(i \frac{\pi R}{2 l} \cdot p\right) \cdot H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi R}{2 l} p\right)}. \tag*{[43]}$$

Nachdem dies geklärt ist, können wir wohl den Index bei L^* und l^* fortlassen für das Weitere. (49) und (51) gelten zunächst nur für lange Spulen $R \ll l$. Auf kürzere Spulen angewandt wird (49) zu große Wellenlängen angeben; der Einfluß der an den Ausschnitt anstoßenden Teile der unendlich langen Spule auf Potential- und Ladungsverteilung des Ausschnitts selbst wird wegen des + -Charakters der beiden Lagen gering sein (es kommt ja wesentlich nur der von den beiden Lagen gebildete Kondensator in Betracht), dagegen zeigen Magnetfeld und Wirbelfeld des Ausschnitts einige Abweichungen von den Feldern der freien Spule. Das Magnetfeld des Ausschnitts ist an dem einen Ende gleich Null wegen der entgegengesetzten Stromrichtung des Nachbarabschnitts, an dem anderen Ende ist es sehr groß infolge der gleichen Stromrichtung des anschließenden Teiles; bei der freien Spule wächst das Magnetfeld von einem kleinen Betrag an dem einen Ende allmählich zum Maximalwert an dem anderen Ende an, ohne natürlich den Wert zu erreichen, den das Feld des Ausschnitts hier hat. Im ganzen ist das Magnetfeld des Ausschnitts zu groß gegenüber dem der freien Spule, damit wird Selbstinduktion und Wellenlänge zu groß. Gehen wir nun mit der Formel (51) zu höheren Ordnungen der Oberschwingungen über. Auf den Ausschnitt entfallen mehrere Strombäuche und Knoten. Den verschiedenen Stromrichtungen entsprechend ist das Magnetfeld der Länge der Spule nach unterteilt; Teile mit entgegengesetzter Stromrichtung haben Magnetfelder gleicher Stärke, aber entgegengesetzter Richtung. Für die Stärke des Magnetfeldes ist wesentlich maßgeblich nur die Stromstärke in den benachbarten Windungen. So bringt es die Unterteilung mit sich, daß die an den Ausschnitt grenzenden Teile der Ideal-Spule nur an den Enden des Ausschnitts geringen Einfluß auf die Stärke des Magnetfeldes haben werden, damit werden aber die Magnetfelder von Ausschnitt und freier Spule sich mit höherer Ordnungszahl immer ähnlicher. Wir werden also die Gültigkeit von (51) für die höheren Ordnungen auch für kürzere Spulen behaupten können. Für Spulen, bei denen $R \approx l$ ist, wird $\frac{\pi R}{4 l} \approx 1$ sein, und das Argument der Zylinderfunktionen $i \frac{\pi R}{4 l} \cdot (2n+1)$ wird schon recht groß, so daß wir die Näherungsformeln für großes Argument benutzen können. Damit wird aus (51), da

$$i J_1\left(i \frac{\pi R}{4 l}(2n+1)\right) = -e^{\frac{\pi R}{4 l}(2n+1)} : \sqrt{2\pi \frac{\pi R}{4 l} \cdot (2n+1)}$$

$$H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi R}{4 l}(2n+1)\right) = -e^{-\frac{\pi R}{4 l}(2n+1)} : \sqrt{\frac{1}{2}\pi \frac{\pi R}{4 l}(2n+1)}$$

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4 L}{2n+1} \cdot \sqrt{\frac{4 l}{\pi d (2n+1)}}. \tag{52}$$

Oder anders ausgedrückt: „Für das Spektrum der ungradzahligen Oberschwingungen ist charakteristisch die Größe“:

$$(2n+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \lambda_{2n+1} = 4 L \sqrt{\frac{4 l}{\pi d}}. \tag{53}$$

Wie der Verlauf von $\sqrt{\alpha p i J_1(i p \alpha) \cdot H_1^{(1)}(i p \alpha)}$, $p = 2n+1$, $\alpha = \frac{\pi R}{4 l}$ (vgl. Bild 5, die Kurve f_3) als Funktion von $p\alpha$ zeigt, muß $p^{\frac{3}{2}} \cdot \lambda p$ mit wachsendem p von kleinen zu größeren Werten gegen die rechte Seite von (53) konvergieren. Es muß also sein:

$$\lambda_1 < 3^{\frac{3}{2}} \lambda_3 < 5^{\frac{3}{2}} \lambda_5 < \ldots \leqq 4 L \sqrt{\frac{4 l}{\pi d}}.$$

B. Die bifilar gewickelte Spule.

7. Grund- und Oberschwingungen der B-Spule.

Man könnte für die Grund- und ungradzahligen Oberschwingungen der B-Spule von demselben Potentialansatz (3) wie in 2. ausgehen, erhielte dieselben Ausdrücke für die Ladung ω und den Strom $\dot{\gamma}$, diesen nur an der zweiten Lage mit umgekehrten Vorzeichen wie an der ersten Lage. Die Wirbelkraft $\mathfrak{K}$ wäre dann allerdings auf Grund der geänderten Verhältnisse anders als in 3. zu berechnen. Auf einem Umwege käme man zu demselben Resultat, das man schneller und einfacher von folgendem Ansatz ausgehend, gewinnt. Der Ansatz ist gleich für die besonderen Verhältnisse der ungeradzahligen Schwingungen spezialisiert und lautet mit den früheren Bezeichnungen nach Bild 2 usw.:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{i\nu t}\cdot\sum B_{2n+1}\cos(2n+1)\frac{x-l}{4l}\pi \\ \varphi_2 &= -\varphi_1 \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

dadurch ist erreicht, daß für $x = -l$, $\varphi = 0$ und für $x = +l$, $\varphi_{1,2} \neq 0$ ist.

Die Glieder von der Form $B_{2n}\cdot\cos 2n\frac{x-l}{4l}\pi$ sind ausgelassen, weil diese bei $x = -l$ nicht verschwinden. Wie in 2. berechnet sich aus (54) nach (5) die Ladung

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{e^{i\nu t}}{4\pi d c^2}\sum B_{2n+1}\cdot\cos(2n+1)\frac{x-l}{4l}\pi \\ \omega_2 &= -\omega_1. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Die Gleichungen (6) lauten jetzt (vgl. Bild 1)

$$\frac{d\dot{\gamma}_1}{dx} = -\frac{L}{2l}\dot{\omega}_1 \quad , \quad \frac{d\dot{\gamma}_2}{dx} = -\frac{L}{2l}\dot{\omega}_2, \tag{56}$$

woraus folgt

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{L\nu^2}{2l\cdot 4\pi d c^2}\cdot e^{i\nu t}\cdot\sum B_{2n+1}\cdot\frac{4l}{(2n+1)\pi}\cdot\sin(2n+1)\frac{x-l}{4l}\pi \tag{57}$$

und $\dot{\gamma}_2 = -\dot{\gamma}_1$. Die Integrationskonstante ist Null, damit $\dot{\gamma}$ bei $x = +l$ verschwindet.

Entsinnen wir uns nun der bekannten Integraldarstellung von φ und $\mathfrak{K}$

$$\frac{1}{c_2}\cdot\varphi = \int\frac{e}{r}dv \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} = -\int\frac{\mathfrak{j}}{r}dv,$$

wenn $\mathfrak{j}$ nur eine Komponente hat, also: $\mathfrak{K}_z = -\int\frac{\mathfrak{j}_z}{r}dv$ ist, so ersieht man daraus sofort, daß $\mathfrak{K}_z$ aus $\mathfrak{j}_z$ ebenso berechnet werden kann, wie φ aus e oder bei flächenhaft verteilter Ladung aus ω. Der spezifischen Oberflächenladung ω unserer Spule für einen Kreisring von der Höhe 1 entspricht die spezifische Stromänderung $\dot{\gamma}$ auf einem gleichen Kreisring. Weitere Annahmen über das Verhältnis R : l brauchen wir nicht zu machen, da auch auf zwei gegenüber liegenden Kreisringen $\dot{\gamma}_1$ gleich $-\dot{\gamma}_2$ ist, d. h. es macht nicht viel aus, daß an den Integrationspunkten, die vom Aufpunkt weiter entfernt sind, $\dot{\gamma}$ nicht mehr die Richtung von $\mathfrak{K}_z$ hat. Wir berechnen also $\mathfrak{K}_s$ aus (57) genau wie (54) aus (55)

$$\mathfrak{K}_s^{(1)} = -4\pi d\dot{\gamma}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_s^{(2)} = -4\pi d\dot{\gamma}_2$$

erhalten also:

$$\mathfrak{K}_s^{(1)} = -\frac{2L\nu^2}{\pi c^2}e^{i\nu t}\cdot\sum B_{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\sin(2n+1)\frac{x-l}{4l}\pi \tag{60}$$

und

$$\mathfrak{K}_s^{(2)} = -\mathfrak{K}_s^{(1)}$$

setzen wir wieder $\sigma = \infty$ (s. 3.), so haben wir wieder als Bedingungen (13) oder (13a), die hier lauten:

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{K}_s^{(1)} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{2\,l}{L} \\ -\mathfrak{K}_s^{(2)} &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \frac{2\,l}{L} \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Aus (54) folgt

$$-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{2\,l}{L} = \frac{2\,l}{L} e^{i\nu t} \cdot \sum B_{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)\pi}{4\,l} \cdot \sin(2n+1)\frac{x-l}{4\,l}\pi \tag{62}$$

und entsprechend für $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$. Koeffizientenvergleichung von (60) und (62) liefert

$$\frac{1}{2L} \cdot B_{2n+1} \cdot (2n+1)\pi = \frac{2L\nu^2}{\pi c^2} B_{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

oder nach Division durch B_{2n+1} und nachdem $\frac{\nu}{2\pi c}$ durch $\frac{1}{\lambda_{2n+1}}$ ersetzt ist

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4L}{2n+1}, \tag{63}$$

ist die Dielektrizitätskonstante ε des Mediums zwischen den beiden Lagen verschieden von 1, so enthielten die rechten Seiten der Gleichungen (55), (57) und (60) noch den Faktor ε und (63) lautet

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4L}{2n+1} \cdot \sqrt{\varepsilon}. \tag{64}$$

„Die bifilar gewickelte Spule schwingt rein harmonisch; die Wellenlänge ist im wesentlichen nur abhängig von der aufgewundenen Drahtlänge."

Voraussetzung ist natürlich eine enge Wicklung und geringer Lagenabstand; würde man die beiden Lagen zu langen Spiralen mit großer Ganghöhe ausziehen, so würde ja schon die quasistationäre Behandlung nicht gerechtfertigt sein, und erst recht hätte die Berechnung der Ladung aus der Kapazität und die von $\mathfrak{K}$ keinen Sinn mehr. Vorstehende Ableitung möchte etwas summarisch erscheinen, ist aber durchaus auch im Resultat plausibel, wenn man bedenkt, daß elektrisches und magnetisches Feld in einfacher Weise auf den gleichen eng begrenzten Raum zwischen den Lagen beschränkt sind. Faßt man einen bestimmten Punkt zwischen den Lagen ins Auge, so werden Potential und Wirbelkraft nur von eng benachbarten Punkten beeinflußt, die entfernteren Stellen haben keinen Einfluß, woraus sich der harmonische Charakter erklärt. Aus dem gleichen Grunde können auch kürzere Spulen als Ausschnitt aus einer unendlich langen Spule aufgefaßt werden. Die gestörten Gebiete an den Enden des Ausschnitts sind klein gegenüber der Spulenlänge, wenn diese nur nicht gerade extrem kleine Werte annimmt. Die Durchrechnung eines Ansatzes mit Zylinderfunktionen bestätigt die Formel (64) und verschärft sie. Wir brauchen dazu gar nicht neue Ansätze und die ganze Rechnung durchzuführen, sondern haben nur nötig, in der Rechnung von Herrn Schröder an 2 Stellen das Vorzeichen abzuändern.

Die allgemeinen Ansätze für φ und $\mathfrak{K}$, [9] und [12], bleiben bestehen und ebenso die Koeffizientenbeziehungen [14], die aus der Bedingung der Stetigkeit folgen [S. 207 ff]. Zu beachten ist nur noch, daß auf Grund der Ausführungen von 6. überall L_1 durch $2\,L_1$, L_2 durch $2\,L_2$ und l durch $2\,l$ zu ersetzen ist. Die Abkürzungen [15] und [23] lauten also

$$\alpha = \frac{\pi R_1}{4\,l} \quad ; \quad \beta = \frac{\pi R_2}{4\,l} \quad ; \quad \beta - \alpha = \delta = \frac{\pi d}{2\,l}. \tag{65}$$

Wegen der umgekehrten Wicklung sind folgende Vorzeichenänderungen vorzunehmen. In [19] ist $-\frac{2\,l}{L_2}$ durch $+\frac{2\,l}{L_2}$ zu ersetzen, dadurch erhalten beide

Gleichungen [20] negatives Vorzeichen. In [24] ist ein Druckfehler stehen geblieben, es muß heißen

$$\frac{L_2}{2l}\ddot{\omega}_2 = +\frac{\partial \dot{\gamma}_2}{\partial z}$$

und lautet jetzt für die B-Spule

$$\frac{L_2}{2l}\ddot{\omega}_2 = -\frac{\partial \dot{\gamma}_2}{\partial z}. \tag{66}$$

[25] bis [30] bleiben ungeändert, dagegen bekommt [31] wegen (66) rechter Hand negatives Vorzeichen. In [34] und [35] sind ebenfalls zwei Druckfehler stehen geblieben, die rechten Seiten von $b_p = \ldots$ müssen positives Vorzeichen haben; für die B-Spule dagegen negatives auf Grund von (66). Die neuen Koeffizienten-beziehungen stellen wir mit $p = 1$ zusammen:

$$\left.\begin{array}{l}
-A\cdot J_0(i\alpha) + B\cdot J_0(i\alpha) - C\cdot H_0^{(1)}(i\alpha) = 0 \\
\quad -B\cdot J_0(i\beta) + C\cdot H_0^{(1)}(i\beta) + D\,H_0^{(1)}(i\beta) = 0 \\
-a\cdot J_1(i\alpha) + b\cdot J_1(i\alpha) - c\cdot H_1^{(1)}(i\alpha) = 0 \\
\quad -b\cdot J_1(i\beta) + c\cdot H_1^{(1)}(i\beta) + d\cdot H_1^{(1)}(i\beta) = 0 \\
\quad a\cdot J_1(i\alpha) + \frac{\pi}{2L_1}\cdot A\cdot J_0(i\alpha) = 0 \\
\quad d\cdot H_1^{(1)}(i\beta) + \frac{\pi}{2L_2}\cdot H_0^{(1)}(i\beta)\cdot D = 0 \\
\quad c\cdot J_0(i\alpha) + \frac{2L_1}{\pi}\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 J_1(i\alpha)\cdot C = 0 \\
\quad b\cdot H_0^{(1)}(i\beta) + \frac{2L_2}{\pi}\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 H_1^{(1)}(i\beta)\cdot B = 0.
\end{array}\right\} \tag{67}$$

Die Determinante der acht Größen $A\ldots d$ muß verschwinden und gibt gleich Null gesetzt die quadratische Gleichung in $\frac{\lambda^2}{16}$, wenn $\frac{\nu}{c}$ durch $\frac{2\pi}{\lambda}$ ersetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\lambda^2}{16}\right)^2 \frac{1}{L_1 L_2}\cdot\frac{J_0(i\alpha)H_0^{(1)}(i\beta) - J_0(i\beta)\cdot H_0^{(1)}(i\alpha)}{J_1(i\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\beta)} - \\
-\frac{\lambda^2}{16}\left\{2 - \frac{L_2}{L_1}\frac{H_0^{(1)}(i\alpha)\cdot J_1(i\beta)}{H_0^{(1)}(i\beta)\cdot J_1(i\alpha)} - \frac{L_1}{L_2}\cdot\frac{J_0(i\beta)\cdot H_1^{(1)}(i\alpha)}{J_0(i\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\beta)}\right\} + \\
+ L_1 L_2\cdot\frac{J_1(i\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\beta) - J_1(i\beta)\cdot H_1^{(1)}(i\alpha)}{J_1(i\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\beta)} = 0
\end{array}\right\} \tag{68}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von [36] wiederum nur durch die Vorzeichen, wodurch der Charakter ganz geändert wird. Zunächst werden wir dieselben Vereinfachungen einführen, nämlich da $\delta = \beta - \alpha \lessdot \alpha$ und $f(i\beta) = f(i\alpha) + i\delta f'(i\alpha)$ gesetzt werden kann:

$$\left.\begin{array}{l}
J_0(i\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\beta) - J_0(i\beta)\cdot H_0^{(1)}(i\alpha) = J_1(i\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\beta) - J_1(i\beta)\cdot H_1^{(1)}(i\alpha) = \frac{2i\delta}{\pi\alpha} \\
\quad \frac{L_1}{L_2} = 1 - \frac{\delta}{\alpha}; \quad \frac{L_2}{L_1} = 1 + \frac{\delta}{\alpha}; \quad L_1\cdot L_2 = L^2,
\end{array}\right\} \tag{69}$$

wodurch (68) übergeht in eine Gleichung, die durch $\frac{2i\delta}{\pi\alpha}$ dividiert werden kann.

Ein wenig umgeformt und abgekürzt läßt sie sich schreiben, nach Division durch $\frac{2i\delta}{\pi\alpha}$:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\lambda^2}{16\,L^2}\right)^2-\frac{\lambda^2}{16\,L^2}\cdot\frac{1}{J_0(i\,\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\,\beta)}\cdot\\&\cdot\left\{J_0(i\,\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\,\alpha)+J_1(i\,\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\,\alpha)+\frac{i\pi}{2}[\psi(a,\beta)]\right\}+\\&+\frac{J_1(i\,\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\,\beta)}{J_0(i\,\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\,\beta)}=0\end{aligned}\right\}\qquad(70)$$

Der Ausdruck $[\psi(\alpha,\beta)]$ ist eine Abkürzung für eine Kombination von Besselschen Funktionen und verschwindet für $\beta=\alpha$, $\delta=0$, läßt sich also darstellen $\delta\cdot\psi'(\alpha,\alpha)$; für kleine Werte des Arguments α reduziert sich ψ wie man mit Hilfe der Näherungsformeln der Besselschen Funktionen für kleines Argument nachweist, auf

$$-\frac{2}{\pi^2}\log\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{2}{\pi^2}\cdot\log\left(1+\frac{\delta}{\alpha}\right).$$

Für große α- und β-Werte ist der Ausdruck Null sogar unabhängig von δ, ist also ganz gegenüber $J_0\cdot H_0^{(1)}+J_1\cdot H_1^{(1)}$ zu vernachlässigen. Die Gleichung, die übrig bleibt, hat die Lösungen

$$\left.\begin{aligned}\lambda^2=&\frac{16\,L^2}{2\,J_0(i\,\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\,\beta)}\left\{J_0(i\,\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\,\alpha)+J_1(i\,\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\,\alpha)\right.\\&\left.\pm\sqrt{(J_0(i\,\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\,\alpha)+J_1(i\,\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\,\alpha))^2-4\,J_0(i\,\alpha)\cdot J_1(i\,\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\,\beta)\cdot H_1^{(1)}(i\,\beta)}\right\}\end{aligned}\right\}\qquad(71)$$

die sich für $\delta=0$ reduzieren auf

$$\lambda^2=16^2\,L^2\quad\text{und}\quad\lambda^2=16\,L^2\,\frac{J_1(i\,\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\,\alpha)}{J_0(i\,\alpha)\cdot H_0^{(1)}(i\,\alpha)}.\qquad\begin{matrix}(72\,a)\\(72\,b)\end{matrix}$$

Während die erste Lösung in die anfangs abgeleitete Formel übergeht, geht die zweite Lösung in die Lenzsche Formel für einlagige lange Spulen über [vgl. Lenz S. 787 Formel (57)]. Wir haben daher für die gesuchten λ_{2n+1} das positive Vorzeichen der Wurzel zu wählen und verfolgen zunächst nur (72 a) weiter.

Man kann (71) noch vereinfachen, indem man bemerkt, daß die Wurzel sich für $\delta=0$ auf $J_0H_0-J_1H_1$ reduziert. Wir unterlassen die Mitteilung, da die so gewonnene Form nicht sonderlich viel einfacher als (71) ist.

Für größere Werte von α leiten wir uns sehr schnell eine einfache Lösung her, indem wir in (70) die asymptotischen Werte für die Besselschen Funktionen einsetzen. Für große Werte des Arguments ist nämlich

$$\frac{J_1(i\,\alpha)}{J_0(i\,\alpha)}=i;\qquad\frac{H_1^{(1)}(i\,\alpha)}{H_0^{(1)}(i\,\alpha)}=\frac{1}{i},$$

so daß (70) zunächst wird

$$\left(\frac{\lambda^2}{16\,L^2}\right)^2-\frac{\lambda^2}{16\,L^2}\left(\frac{H_0^{(1)}(i\,a)}{H_0^{(1)}(i\,\beta)}+i\,\frac{H_1^{(1)}(i\,\alpha)}{H_0^{(1)}(i\,\beta)}\right)+1=0\qquad(73)$$

oder

$$\left(\frac{\lambda^2}{16\,L^2}\right)^2-\frac{\lambda^2}{16\,L^2}\cdot2\,\frac{H_0^{(1)}(i\,\alpha)}{H_0^{(1)}(i\,\beta)}+1=0;$$

die Lösungen sind

$$\frac{\lambda^2}{16\,L^2}=\left(\frac{H_0^{(1)}(i\,\alpha)}{H_1^{(1)}(i\,\beta)}\pm\sqrt{\left(\frac{H_0^{(1)}(i\,a)}{H_0^{(1)}(i\,\beta)}\right)^2-1}\right),\qquad(74)$$

wo wir wieder das positive Vorzeichen der Wurzel zu wählen haben. Da

$$\frac{H_0^{(1)}(i\,\alpha)}{H_0^{(1)}(i\,\beta)}=1+i\,\delta\,\frac{H_0^{(1)\prime}(i\,\alpha)}{-H_0^{(1)}(i\,\alpha)}=1+i\,\delta\,\frac{H_1^{(1)}(i\,\alpha)}{H_0^{(1)}(i\,\alpha)}=1+\delta\qquad(75)$$

ist, so erhalten wir die einfache Formel

$$\lambda_1 = 4\,L\sqrt{1 + \delta + \sqrt{2}\,\delta} \tag{76}$$

mit

$$\delta = \frac{\pi d}{2\,l}$$

und der Bedingung $R \geqq \frac{1}{2} l$. Zwar war als Bedingung für die Ableitung von (76) vorausgesetzt

$$\alpha = \frac{\pi R}{4\,l} > 1.$$

Aber man erkennt leicht, wenn man

$$\frac{\lambda^2}{16\,L^2} = \frac{H_0(i\,\alpha)}{H_0(i\,\beta)}$$

in (70) einsetzt, daß $\frac{H_0(i\,\alpha)}{H_0(i\,\beta)}$ unabhängig vom Wert des Arguments eine angenäherte, zu kleine Lösung von (70) ist, jedoch besser angenähert als $\frac{\lambda^2}{16\,L^2} = 1$. Der Quotient (75) wird aber im wesentlichen auch für kleinere α-Werte schon durch $1 + \delta$ richtig dargestellt, so daß wir (76) die Bedingung $R \geqq \frac{1}{2} l$ hinzufügen konnten.

Die Oberschwingungen wird man aus (76) erhalten, indem man setzt

$$\lambda_{2n+1} = \frac{\lambda_1}{2\,n + 1},$$

wobei wir uns die Überlegungen am Anfang dieses Paragraphen zunutze machen. Der Einfluß der Dielektrizitätskonstante wird berücksichtigt, wenn wie bei (63) und (64) auch bei (76) rechter Hand der Faktor $\sqrt{\varepsilon}$ hinzugefügt wird.

Eine kurze Bemerkung erfordert noch die zweite Lösung der quadratischen Gleichung (70), die sich, wenn die Ordnungszahl p wieder eingeführt wird, darstellen lassen wird durch:

$$\lambda_p = \frac{4\,L}{p} \cdot \sqrt{\frac{J_1(i\,p\,\alpha) \cdot H_1^{(1)}(i\,p\,\alpha)}{J_0(i\,p\,\alpha) \cdot H_0^{(1)}(i\,p\,\alpha)} + \delta \ldots + \delta^2 \ldots + \ldots} \tag{78}$$

Wir werden diese Lösung für $p = 2\,n$ den gradzahligen Oberschwingungen zuordnen. Hier hat die B-Spule ein starkes magnetisches Feld im Innern der Spule, und auch das elektrische Feld liegt im wesentlichen nicht zwischen den Lagen, d. h. es ist kein großes Potentialgefälle zwischen den Lagen. Ausschnitt der unendlich langen Spule und freie Spule zeigen wesentliche Unterschiede. Während Magnetfeld und Wirbelfeld an den Enden der freien Spule noch recht erhebliche Beträge, besonders bei λ_2, haben können, sind beide am Ausschnitt gleich Null. Somit wird (78) nur größenordnungsmäßig richtige, und zwar zu kleine Werte liefern. Wir können daher aus (78) nur schließen, daß die gradzahligen Oberschwingungen etwa sein werden:

$$\lambda_{2n} \underset{\approx}{>} \frac{4\,L}{2\,n}, \quad \text{da} \quad \frac{J_1 \cdot H_1}{J_0\,H_0} \approx 1 \text{ für } p\,\alpha > 1. \tag{78a}$$

Dies Verhalten ist sehr viel von dem der A-Spule verschieden, wo die zweite Lösung der quadratischen Gleichung [36] zeigt, nämlich

$$\lambda_{2n} = \frac{4\,L}{2\,n} \cdot \sqrt{\frac{d}{i\,\pi\,R\,J_0(i\,2\,n\,\alpha) \cdot H_0^{(1)}(i\,2\,n\,\alpha)}}, \tag{79}$$

daß hier die gradzahligen Oberschwingungen außerordentlich klein ausfallen werden. Für $n > 2$ wird aus (79) ähnlich wie bei (51), ((52):

$$\lambda_{2n} = \frac{4\,L}{\sqrt{2\,n}} \cdot \sqrt{\frac{\pi d}{4\,l}}. \tag{79a}$$

Tabelle 1.

	Einlagige Spule	(Zweilagige, anschließend gewickelte) A-Spule	(Zweilagige, bifilar gewickelte) B-Spule
λ_1	$\frac{\pi}{2} L \cdot \sqrt{2 \log \frac{16 R}{l} - \frac{7}{2}}$; $R \geqq 2 l$ $2 L \cdot \sqrt{\frac{J_1\left(i \frac{\pi R}{2 l}\right) \cdot H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi R}{2 l}\right)}{J_0\left(i \frac{\pi R}{2 l}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(i \frac{\pi R}{2 l}\right)}}$; $R \ll 2 l$	$L \sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{\frac{8}{3} \log \frac{4 R}{l} - \frac{5}{6}}$; $R \geqq 1{,}5 l$ (34) $L \cdot \sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{\frac{8}{3} \log \frac{4 R}{l} - 1{,}1 + 0{,}615 \frac{l}{R}}$; $R \geqq 0{,}4 l$ (46) $4 L \sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{\frac{i R}{l} \cdot J_1\left(i \frac{\pi R}{4 l}\right) \cdot H_1^{(1)}\left(i \frac{\pi R}{4 l}\right)}$; $R < 0{,}5 l$ (49) wegen $d \ll l$ sind alle drei Ausdrücke im allgemeinen groß	$4 L \sqrt{1 + \frac{\pi d}{2 l} + \sqrt{\frac{\pi d}{l}}}$ (76)
λ_{2n+1}	$\frac{2 L}{2 n + 1}$ [1]	$\frac{4 L}{(2 n + 1)^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{4 l}{\pi d}}$ groß, wegen $d \ll l$. (53)	$\frac{\lambda_1}{2 n + 1}$ rein harmonisch (64)
λ_{2n}	$\frac{2 L}{2 n}$ [1]	$\frac{4 L}{\sqrt{2 n}} \cdot \sqrt{\frac{\pi d}{4 l}}$ klein, wegen $d \ll l$. (79a)	$\frac{\lambda_1}{2 n}$ angenähert und nicht streng harmonisch (78a)
		reduzierter Lagenabstand: $d = \frac{1}{\varepsilon}(d^* + 0{,}129 h - 1{,}15 r)$	

[1]) Die beiden Werte $\frac{2 L}{2 n + 1}$ und $\frac{2 L}{2 n}$ gelten wie (53) und (79a) für kleine Werte der Ordnungszahl $2 n + 1$, $2 n$ nur angenähert, werden aber mit höherer Ordnungszahl genauer [siehe Lenz § 8, S. 792 und Bemerkung in dieser Arbeit unter Formel (53)].

C. Numerischer Teil.

8. Diskussion der Formeln und Mitteilung einiger Kurven.

Während die Formeln des vorigen Abschnittes für die B-Spule die Abhängigkeit der Eigenschwingungen von den geometrischen Maßen in einfachster Weise aufzeigen, ist es doch nötig, die Formeln für die A-Spule kurz näher zu diskutieren. Besonders wird der Übergang von den Formeln für die kurzen Spulen zu den für lange Spulen interessieren. Wir stellen die Formeln für die Grundschwingung und die Oberschwingungen für ein- und zweilagige Spulen in Tabelle 1 zusammen.

Die Formel (49) ist etwas anders geschrieben, dadurch wird erreicht, daß in allen Formeln die Größe $L\sqrt{\frac{\pi l}{d}}$ mit einem Faktor auftritt, der nur von dem Verhältnis $\frac{R}{l}$ abhängt.. Wie der Vergleich mit den Lenzschen Formeln für die Eigenschwingungen einlagiger Spulen zeigt [vgl. Lenz (56a) S. 785 und (56b) S. 787], ist gerade die Größe $\sqrt{\frac{\pi l}{d}}$ wegen $d \ll l$ als charakteristisch für die Vergrößerung der Wellenlänge infolge Doppellagigkeit anzusehen. Diese Abhängigkeit ist leicht zu übersehen; um die Abhängigkeit von dem zweiten Faktor übersehen zu können, werden wir ähnlich wie Lenz und Drude für einlagige Spulen die Größe $f = \frac{\lambda}{2L}$ definieren, für die A-Spule definieren

$$f = \frac{\lambda_1}{2L\sqrt{\frac{\pi l}{d}}}$$

und setzen

$$f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l} - \frac{5}{6}},$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{3}\log\frac{4R}{l} - 1{,}1 + 0{,}615\frac{l}{R}},$$

$$f_3 = 2\sqrt{\frac{iR}{l}J_1(i\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\alpha)}.$$

f_1, f_2 und f_3 wurden als Funktion von $\frac{R}{l}$ in Bild 5 eingezeichnet, f_3 nach den Tabellen von Jahnke und Emde berechnet. Der Verlauf der Kurven ist im allgemeinen ähnlich wie bei Lenz Bild 9 (S. 785), nur mit dem wesentlichen Unterschied, daß f_3 gegenüber f_1 und f_2 zu groß ist, während bei Lenz Kurve II gegen I bei kürzeren Spulen zu klein ist. Der Grund ist schon in A. 6 eingehend erörtert und wird bei Lenz in § 7 (S. 785) besprochen.

Die Ausdrücke für f_1 und f_2 hängen natürlich aufs engste mit dem Induktionskoeffizienten M zweier Kreisringe zusammen. Je nachdem ob M zu groß oder zu klein gerechnet war, werden f_1, f_2 zu groß oder zu klein ausfallen. Das Bild 3 zeigt folgendes. Der der Berechnung von (34) oder f_1 zugrunde liegende Ausdruck

$$M_1 = 4\pi R\left(\log\frac{8R}{|x|} - 2\right)$$

ist für längere Spulen zu klein, also wird f_1 zu klein sein für längere Spulen. (46) oder f_2 lag zugrunde

$$M_2 = 4\pi R\left(\log\frac{8R}{|x|} - 2{,}1 + 0{,}415\frac{|x|}{R}\right),$$

der gegenüber dem exakten Ausdruck von M für längere Spulen positive Abweichungen zeigt. Da nun nicht M selbst, sondern gewisse bestimmte Integrale $\int M \cdot \dot{\gamma}\, dx$ in die Rechnung eingehen, so fallen die Abweichungen zunächst nicht sehr ins Gewicht, zumal $\dot{\gamma}$ an dem einen Ende der Spule dauernd Null ist. Bei konstantem $\dot{\gamma}$ wäre die Abweichung durch den Flächenteil $\frac{1}{4\pi R}\left(\int M\, dx - \int M_2\, dx\right)$ gegeben und augenscheinlich zunächst klein gegenüber dem gesamten von den Achsen und $\frac{M}{4\pi R}$ eingeschlossenen Flächenstück $\frac{1}{4\pi R}\int M\, dx$.

Aus allem folgt: f_2 wird sich zunächst nur sehr langsam von dem wirklichen Wert entfernen; da andererseits, wie in A. 6 bereits bemerkt, f_3 zu groß ist, werden

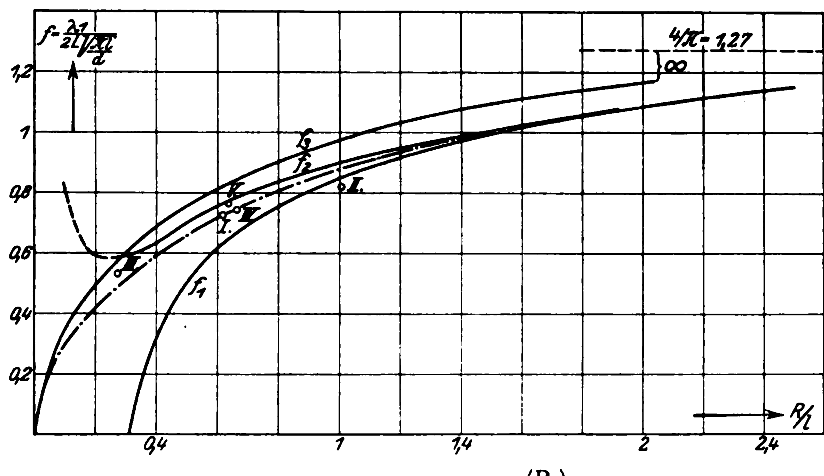


Bild 5. Verlauf von $f = f\left(\frac{R}{l}\right)$.

wir die Gültigkeit von f_2 behaupten können, solange $f_2 < f_3$ ist. Das ist der Fall solange $\frac{R}{l} > 0{,}3$. Für sehr große $\frac{R}{l}$ wird f_1 wieder größer als f_2 und schließlich auch größer als f_3, da f_1 mit $\frac{R}{l}$ beständig wächst, f_3 dagegen asymptotisch gegen $\frac{4}{\pi}$ geht. Für sehr große $\frac{R}{l}$, sehr kurze Spulen, verliert f_3 eben ganz seine Bedeutung, auch wird man (49) nicht mehr als Lösung der quadratischen Gleichung (36) auffassen können. Der wahre Verlauf der theoretischen Kurve für f wird sich also, zunächst von $\frac{R}{l} = 0$ ausgehend, eng an f_3 unterhalb anschmiegen, f_3 verlassen unter f_2 weiter verlaufen, f_2 schneiden und schließlich eng über f_1 und mit f_1 zusammenlaufen, wie unter Benutzung von Meßergebnissen strichpunktiert eingezeichnet.

Von Interesse ist schließlich noch der Zusammenhang der Formeln für λ_3:

$$\lambda_3 = L\sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{0{,}256 - \frac{1}{24 \log \frac{4R}{l} - 10}} \qquad R \geqq l \qquad (36)$$

$$\lambda_3 = \frac{4L}{3}\sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot \sqrt{\frac{iR}{l} \cdot J_1(i\,3\,\alpha) \cdot H_1^{(1)}(i\,3\,\alpha)}\,; \quad \alpha = \frac{\pi R}{4l}; \quad R < l \qquad (51)$$

Beide haben einen asymptotischen Wert für $R = \infty$ und einen gewissen Sinn werden wir auch (51) dann noch beilegen können. Es ist für $R = \infty$

$$\lambda_3 = L\sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot 0{,}506 \qquad \text{aus (36)}$$

$$\lambda_3 = L\sqrt{\frac{\pi l}{d}} \cdot 0{,}490 \qquad \text{aus (51}$$

woraus wir schließen können, daß λ_3 schon sehr angenähert unter den Satz von 6. fallen wird:

$$(\lambda n + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \lambda_{2n+1} = 4L\sqrt{\frac{+l}{\pi d}} \text{ mit } 2n + 1 = 3.$$

9. Vergleich mit Messungen von Ridder und Reinhardt.

Für die Anwendung der abgeleiteten Formeln ist es außerordentlich wesentlich, daß die Größe 2 d überall der reduzierte Lagenabstand ist, der mit dem Gitterpotential K und dem wahren Lagenabstand $2d^*$ in der Beziehung steht:

$$d = \frac{d^*}{u \cdot \varepsilon} \cdot K \qquad (80)$$

im Bereich

$$\frac{u}{\pi} = \frac{2d^*}{h} < 2; \qquad \frac{v}{\pi} = \frac{2r}{h} < 1$$

(die zweite Bedingung ist immer erfüllt) läßt sich K darstellen [s. Schröder (100) S. 228]

$$K = 0{,}81 - 1{,}15\,v + u$$

mit

$$u = \frac{2\pi d^*}{h}, \qquad v = \frac{2\pi r}{h}$$

also

$$d = \frac{1}{\varepsilon}(d^* + 0{,}129\,h - 1{,}15\,r) \qquad (81)$$

für größere Werte von $\frac{u}{\pi} = \frac{2d^*}{h}$ muß K nach der bei Schröder angegebenen Methode berechnet werden. Dies erwies sich als notwendig bei der in Tabelle 2 angegebenen Spule IV und ergibt mit den dort ebenfalls angegebenen Spulen und Drahtmassen

$$K = 23{,}9 \qquad \text{und} \qquad d = 0{,}312.$$

Leider ist bei den Ridderschen Messungen nichts über die Dielektrizitätskonstante ε des verwandten Preßspans oder der Pappe gesagt. Wir haben jedoch auf Grund der Messungen und unserer Anschauungen die Möglichkeit ε zu berechnen; an zwei Spulen, einer A-Spule IV und einer B-Spule, teilt Ridder Messungen von Wellenlängen mit, ohne und mit Pappe als Dielektrikum. Nach unserer Auffassung unterscheiden sich beide Wellenlängen nur um den Faktor $\sqrt{\varepsilon}$. In den Tabellen 4 und 6 stehen in der ersten Spalte die gemessenen Wellenlängen ohne Dielektrikum, in der zweiten Spalte mit Pappe als Dielektrikum also nach unserer Auffassung $(\sqrt{\varepsilon} \cdot \lambda p)$ gem. in der dritten Spalte wird der Quotient

$$\frac{(\sqrt{\varepsilon} \cdot \lambda p) \text{ gem.}}{\lambda p \text{ gem.}} = \sqrt{\varepsilon}$$

mitgeteilt. Man erhält so $\sqrt{\varepsilon} = 1{,}08$ als Mittel mit etwa 1 bis 2% Ungenauigkeit.

Mit diesem Wert von $\sqrt{\varepsilon}$ wurde für die in der folgenden Tabelle 2 aufgeführten A-Spulen I.—V. die Größe

$$C = 2\,L \sqrt{\frac{\pi\, l}{d}}$$

Tabelle 2.

Spule	2 L (m)	2 l (cm)	R (cm)	d* (cm)	h (cm)	2 r (cm)	K	ε (ber.)	d ε	C (m)	λ_1 (gem.)	f	R/l	gem. von
I.	386	30,23	9,35	0,05	0,079	0,055	2,27	1,17	0,0285	17000	12550	0,738	0,618	Ridder
II.	472	21,15	10,67	0,04	0,055	0,05	2,10	1,17	0,0184	21600	17850	0,826	1,01	Ridder
III.	556	51,07	6,95	0,05	0,075	0,06	2,11	1,17	0,0252	33800	18500	0,548	0,272	Ridder
IV.	389	30,75	9,79	0,45	0,082	0,055	23,9	1	0,312	4850	3600	0.742	0,65	Ridder
V.	389	30,75	9,8	0,45	0,08	0,06	23,9	1	0,312	4840	3764	0,778	0,637	Reinhardt

berechnet und die Werte $f = (\lambda_1 \text{ gem.}) : C$ wurden als Punkte I., II., III., IV., V. in Bild 5 eingetragen. Wie es sein muß, liegen f_I, f_{III}, f_{IV}, f_V etwas unterhalb f_2 bzw. f_3; f_{II} liegt ein wenig tief, weicht jedoch von der strichpunktierten Kurve um weniger als 10% ab. Abweichungen von dieser Größenordnung sind aber wohl zuzulassen; schwerlich werden die kleinen Größen d*, r und h besser als auf 10% über die ganze Spulenlängen definiert sein. Für Spule I. und IV. gibt Ridder, für Spule V. Reinhardt das ganze Spektrum an; für λ_3 sind die gemessenen und nach Formel (36) berechneten Werte diese:

	Spule	I.	IV.	V.
$\lambda_3 =$	gemessen	3580	1000	1010
	ber. n. (36)	3520	1023	1014

In der folgenden Tabelle 3 sind die gemessenen Wellenlängen λ_p für Spule I zusammengestellt und daneben die Größen $p \cdot \lambda_p$ und $p^{3/2} \lambda_p$. Es ist deutlich zu erkennen, wie $p^{3/2} \lambda_p$ mit wachsendem p [vgl. (53)] gegen einen Grenzwert wächst; der Gang wird mit größerem p allerdings durch Meßfehler verwischt. Man kann daher wohl von einem Mittelwert $p^{3/2} \lambda_p$ sprechen, den die dritte Spalte zu 19300 m gibt; die Abweichung ist kleiner als 7% von diesem Mittelwert. Der berechnete Wert

$$4\,L \cdot \sqrt{\frac{4\,l}{\pi\, d}} = \frac{4}{\pi} \cdot C$$

ergibt sich aus Tabelle 2 zu 21600 m und weicht von dem Mittelwert um 10% ab.

Tabelle 3. Spule I. (Ridder.)

p	λ_p	$p \cdot \lambda_p$	$p^{3/2} \cdot \lambda_p$	$4\,L \sqrt{\frac{4\,l}{\pi\, d}}$
1	12550	12550	12550	—
3	3580	10740	18600	—
5	1740	8700	19400	—
7	1050	7350	19400	—
9	732	6500	19800	—
11	530	5830	19300	—
45	62	2800	18700	—
47	60	2800	19300	—
49	57,5	2800	19700	21600
2	56	—	—	—

Tabelle 4. Spule IV. (Ridder.)

p	λ_p	$\sqrt{\varepsilon} \cdot \lambda_p$	$\sqrt{\varepsilon}$	$p \cdot \lambda_p$	$p^{3/2} \cdot \lambda_p$	$4L\sqrt{\frac{4l}{\pi d}}$
1	3 600	4 000	1,111	3600	3600	—
3	1 000	1 099	1,099	3000	5200	—
5	506	555	1,095	2530	5650	—
7	311	346	1,113	2200	5760	—
9	218	238,5	1,091	2000	5890	—
11	161,5	174,5	1,081	1770	5890	—
13	129,5	141	1,090	1680	6080	—
15	107	114	1,065	1610	6200	—
17	82,5	88	1,065	1400	5780	—
19	73,5*	75	1,021	1395	6100	—
21	64,5	66	1,021	1350	6220	6170
2	124	127	—	—	—	—
4	68	68	—	—	—	—

Tabelle 5. Spule V. (Reinhardt.)

p	λ_p	$p \cdot \lambda_p$	$p^{3/2} \lambda_p$	$4L\sqrt{\frac{4l}{\pi d}}$
1	3764	3764	3764	—
3	1010	3030	5250	—
5	516	2580	5760	—
7	324	2268	6000	—
9	220	1980	5940	—
11	163	1493	5950	—
13	130	1690	6094	6160
2	125,5	—	—	—

angegebene Meßgenauigkeit 1,5%

Tabelle 6. B-Spule. (Ridder.)

p	λ_p	$\sqrt{\varepsilon} \cdot \lambda_p$	$\sqrt{\varepsilon}$	$p \cdot \lambda_p$
1	880	978	1,110	880
3	294	325	1,103	882
5	176	193	1,095	880
7	128,5	138,5	1,078	899,5
9	101	110	1,090	909
11	79	85,5	1,082	869
13	66	71	1,075	858
15	60	62	1,033	900
2	536	557	—	1072
4	246,5	252	—	986
6	169	174	—	1014

An der Spule IV. (Tabelle 4) ist der Gang von $p^{\frac{3}{2}} \lambda_p$ deutlich zu erkennen. Der zu berechnende Wert von $\frac{4}{\pi} \cdot C$ ist aus Tabelle 2: 6170 m und liegt nahe bei den größten Werten der Spalte 5 von Tabelle 4.

An der Spule V. (Tabelle 5), die fast die gleichen Maße hat wie Spule IV., sind die Verhältnisse ähnlich wie bei Spule IV. und brauchen wohl nicht besonders erörtert werden.

Die angeführten Werte von λ_2, λ_4 zeigen, wie erwartet, wie klein die gradzahligen Oberschwingungen sind.

Als letztes Beispiel diene eine bifilar gewickelte Spule, die ebenfalls von Ridder mitgeteilt wurde. Die Maße der Spule sind

$2L = 402$ m $\quad 2R_1 = 18{,}6$ cm $\quad 2l = 30{,}75$ cm

$2R_2 = 20{,}5$ cm $\quad 2d^* = 0{,}9$ cm

$d = 0{,}312$ cm.

Die Abweichungen (4. Spalte, Tabelle 5) von $p \cdot \lambda_p$ von 880 m sind kleiner als 3% für ungerades p, d. h. aber die ungradzahligen Oberschwingungen sind harmonisch, während die gradzahligen ziemlich vom harmonischen Verhalten abweichen. Die Anwendung von (76) liefert, wenn man auch hier mit dem reduzierten Lagenabstand rechnet, $\delta = \frac{\pi \cdot 0{,}312}{30{,}75} = 0{,}0319$:

$$\lambda_1 = 4L\sqrt{1 + 0{,}0319 + \sqrt{0{,}0638}} = 804 \cdot 1{,}13 = \mathbf{908\ m};$$

dieser Wert unterscheidet sich von dem gemessenen 880 m um 3%.

Die angeführten Werte λ_{2n}, $2n \cdot \lambda_{2n}$ zeigen, daß die λ_{2n} von der Größenordnung von $\frac{4L}{2n}$ sind, wie am Schluß von B. 7 erörtert; die gemessenen Werte λ_{2n} übertreffen $\frac{4L}{2} = 402$ m, $\frac{4L}{4} = 201$ m, $\frac{4L}{6} = 134$ m um etwa 20%.

D. Mathematischer Teil.

10. Der Konvergenzbeweis für die Normaldeterminante; die Konvergenz der Reihen.

Wir sind in A. 4 den Beweis für die Konvergenz der Normaldeterminante schuldig geblieben, den wir jetzt nachtragen. Dort wurde schon gesagt, daß es nur nötig ist zu zeigen, daß die Summe

$$\sum \left| c_{m,n} \right| \begin{matrix} 1 < m < \infty \\ 0 < n < \infty \end{matrix}$$

existiert.

Die Koeffizienten $c_{m,n}$ waren definiert durch die Gleichungen (25), (26) und (27).

Der Übersicht wegen ist es nötig, folgende Bezeichnungen einzuführen

$$\left. \begin{aligned} F_{m,2k} &= \frac{1}{m(4k^2 - 1)} \\ G_{m,n} &= \frac{1 - n^2 - m^2}{m[(n+m)^2 - 1] \cdot [(n-m)^2 - 1]} \end{aligned} \right\} \quad (82\text{a})$$

Wir schreiben die Gleichung (26) dann in der Form:

$$\left. \begin{aligned} A_{2k+1} &= \sum_0^\infty{}^k a_{2k} \cdot F_{2l+1,2k} + a_{2k+1} \cdot G_{2l+1,2k+1} \\ A_{2l} &= \sum_0^\infty{}^k a_{2k} (F_{2l,2k} + G_{2l,2k}) \end{aligned} \right\} \quad (82\text{b})$$

Ferner definieren wir $f_{m,2k}$ und $g_{m,n}$ durch: $(m > 2)$

$$\left.\begin{aligned} f_{m,2k} &= \frac{1}{m(m-1)}(F_{m-2,2k} - F_{m,2k}) - \frac{1}{m(m+1)}(F_{m,2k} - F_{m+2,2k}) \\ g_{m,n} &= \frac{1}{m(m-1)}(G_{m-2,n} - G_{m,n}) - \frac{1}{m(m+1)}(G_{m,n} - G_{m+2,n}) \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Dann sind die Größen $c_{m,n}$ gegeben durch, wie ein Vergleich der vorstehenden Definitionen mit den Gleichungen (25), (26) und (27) lehrt:

$$\left.\begin{aligned} c_{2l+1,2k} &= f_{2l+1,2k} & \quad c_{2l+1,2k+1} &= g_{2l+1,2k+1} \\ c_{2l,2k} &= f_{2l,2k} + g_{2l,2k} & \quad c_{2l,2k+1} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Es genügt für die Konvergenz offenbar zu zeigen, daß die Summen $\Sigma|f_{m,2k}|$ und $\Sigma|g_{m,n}|$ existieren. f und F treten nur mit geradem zweitem Index auf; die Indizes von $g_{m,n}$ und $G_{m,n}$ haben denselben Geradheitscharakter, Summe oder Differenz der Indizes ist also immer gerade. Es ist nötig dies zu bemerken, da Summen und Differenzen der Indizes im Nenner von $g_{m,n}$ auftreten mit einem additiven Glied, das ungerade ist, so daß diese Nenner nicht verschwinden. Zunächst bemerke man folgendes: nach (82a) und (83) ist zusammengezogen:

$$f_{m,2k} = \frac{1}{4k^2 - 1} \cdot \frac{12}{m(m^2-1)(m^2-4)} \tag{85}$$

und daher ist die Doppelsumme $\Sigma|f_{m,2k}|$ das Produkt zweier absolut konvergenter Summen, und somit selbst absolut konvergent. Ferner sind $c_{1,n}$, $c_{1,n}'$ und $c_{2,n}$ linear aus $F_{1,2k}$, $F_{2,2k}$, $F_{3,2k}$ und $F_{4,2k}$, sowie $G_{1,n}$, $G_{2,n}$, $G_{3,n}$ und $G_{4,n}$ zusammengesetzt, diese nehmen aber mit k bzw. n quadratisch ab, so daß also auch $\Sigma_n |c_{1,n}| + |c_{1,n}'| + |c_{2,n}|$ existiert. Für das Fernere können wir also annehmen, daß m größer als 2 ist, und haben nur noch zu zeigen, daß $\Sigma|g_{m,n}|$ existiert.

Im Zähler von $G_{m,n}$ (82a) addieren und subtrahieren wir $2nm$, dann können wir den Bruch zerlegen:

$$G_{m,n} = \frac{-1}{m[(n+m)^2-1]} - \frac{2nm}{m[(n+m)^2-1]\cdot[(n-m)^2-1]}$$

Für $(m-2)$ und $(m+2)$ ist

$$G_{m-2,n} = \frac{-1}{(m-2)(n+m-1)(n+m-3)} - \frac{2n}{(n+m-1)(n+m-3)(n-m+3)(n-m+1)}$$

$$G_{m+2,n} = \frac{-1}{(m+2)(n+m+3)(n+m+1)} - \frac{2n}{(n+m+3)(n+m+1)(n-m-1)(n-m-3)} \tag{86}$$

In (83) setzen wir (86) ein und erhalten

$$g_{m,n} = \left\{\begin{aligned} &\frac{+2}{m(m^2-1)(n+m+1)(n+m-1)} + \frac{4n}{(m^2-1)(n+m+1)(n+m-1)(n-m+1)(n-m-1)} \\ &\frac{-1}{m(m-1)(m-2)(n+m-1)(n+m-3)} - \frac{2n}{m(m-1)(n+m-1)(n+m-3)(n-m+3)(n-m+1)} \\ &\frac{-1}{m(m+1)(m+2)(n+m+3)(n+m+1)} - \frac{2n}{m(m+1)(n+m+3)(n+m+1)(n-m-1)(n-m-3)} \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Die drei links stehenden Terme lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{-12(5m^2 + 4mn + n^2 - 5)}{m(m^2-1)(m^2-4)[(n+m)^2-1]\cdot[(n+m)^2-9]} \tag{88}$$

und ähnlich die drei rechten

$$\frac{-12\cdot 16n}{[(n+m)^2-1][(n+m)^2-9]\cdot[(n-m)^2-1]\cdot[(n-m)^2-9]}. \tag{89}$$

Schreiben wir für den Zähler von (88)

$$-12((n+m)^2 - 1 + 4(m^2-1) + 2mn),$$

dann können wir (88) zerlegen in (-12) mal

$$\left[\begin{array}{c}\frac{1}{m(m^2-1)(m^2-4)[(n+m)^2-9]}+\frac{4}{m(m^2-1)[(n+m)^2-1]\cdot[(n+m)^2-9]}\\+\frac{2n}{(m^2-1)(m^2-4)[(n+m)^2-1]\cdot[(n+m)^2-9]}\end{array}\right]\Bigg\} \quad (90)$$

Die einzelnen Terme von (90) sind für $m \geqq 3$ jeder einzeln kleiner als $\frac{4}{m^2 n^2}$ und lassen sich daher über alle m und n summieren. Es bleiben noch die Terme von der Form (89), die wir in solchen Gruppen zusammenfassen, in denen $(m+n)$ konstant ist. Wir setzen $m = s - x$ und $n = s + x$, dann ist, abgesehen vom Zahlenfaktor $-12 \cdot 16$ (89):

$$h_{s,x} = \frac{s+x}{(4s^2-1)(4s^2-9)(4x^2-1)(4x^2-9)}.$$

Es ist

$$h_{s,0} = \frac{s}{9\cdot(4s^2-1)(4s^2-9)} \approx \frac{1}{9\cdot 16 s^3} \quad (91$$

für große s.

Für $x = \pm 1$ ist

$$h_{s,\pm 1} = \frac{-(s \pm 1)}{15(4s^2-1)(4s^2-9)}$$

und für $x = \pm 2$ ist

$$h_{s,\pm 2} = \frac{+(s \pm 2)}{105(4s^2-1)(4s^2-9)}.$$

Allgemein ist

$$|h_{s,\pm x}| < h_{s,0}. \quad (92)$$

Es ist:

$$\sum |h_{s,x}| = \sum_{2}^{\infty}{}_s \sum_{-s}^{s-2}{}_x |h_{s,x}|.$$

Die Anzahl der Glieder in einer Gruppe mit konstantem s, also in der Teilsumme

$$\sum_{-s}^{s-2}{}_x |h_{s,x}| \quad \text{ist} \quad (2s-1),$$

also ist wegen (91) und (92)

$$\sum_{-s}^{s-2}{}_x |h_{s,x}| < \frac{1}{s^2}$$

und somit

$$\sum_{s,x} |h_{s,x}| < \sum_{2}^{\infty}{}_s \frac{1}{s^2}.$$

Damit sind alle Glieder der Summe $\Sigma g_{m,n}$ erschöpft und die ganze Summe $\Sigma |c_{m,n}|$ ist als absolut konvergent erwiesen. Auf Grund der in A. 4 zitierten Sätze I. und II. und der daran anschließenden Ausführungen haben wir also bewiesen, daß für jeden eigentlichen Wert von q^2 der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} D_\nu(q^2) = D(q^2) \quad (93)$$

existiert, oder daß bei vorgegebenem ε und q^2 ν sich so bestimmen läßt, daß

$$D_{\nu+\mu}(q^2) = D_\nu(q^2) + \varepsilon \quad (94)$$

ist, wie groß auch immer μ sein mag. Ist also q_1^2 so bestimmt, daß $D_\nu(q_1^2) = 0$

ist, dann können wir sagen, daß auch genügend genau $D_{\nu+\mu}(q_1^2) = 0$ ist Dasselbe gilt offenbar für alle Unterdeterminanten $\Delta^{(\nu)}_{m,n}$, die aus D_ν entstehen, wenn in D_ν die m-te Zeile und n-te Spalte gestrichen werden; um von den $\Delta^{(\nu)}_{m,n}$ reden zu können, muß $m < \nu$ und $n < \nu$ sein. Ist $m > \nu$ oder $n > \nu$, wollen wir die Festsetzung treffen: $\Delta^{(\nu)}_{m,n} = 0$. Daß die $\Delta^{(\nu)}_{m,n}$ nicht genau die Form einer Normaldeterminante haben, läßt sich durch Zeilen- oder Spaltenvertauschung ohne weiteres beheben. Wegen (93) können wir dann sofort für jedes Wertepaar m, n schreiben

$$\lim_{\nu=\infty} \Delta^{(\nu)}_{m,n}(q^2) = \Delta_{m,n}(q^2). \tag{95}$$

Hieraus lassen sich nun Schlüsse ziehen über die Koeffizienten a_n unserer Reihenentwicklungen. Das Gleichungssystem (27) ist doch so zu verstehen, daß man zunächst das endliche lineare homogene Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} -a_0^{(\nu)} &= \sum_1^\nu n\, a_n^{(\nu)} \\ -a_1^{(\nu)} &= \frac{1}{q^2} \sum_0^\nu \left\{c_{1,n} + c'_{1,n}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right)\right\}\cdot a_n^{(\nu)} \\ -a_m^{(\nu)} &= \frac{1}{q^2} \sum_0^\nu n\, c_{m,n}\cdot a_n^{(\nu)} \text{ mit } m = 2, 3, \ldots, \nu - 1, \nu \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

betrachtet und dann fragt, wie sich die $a_n^{(\nu)}$ und das System (96) verhalten, wenn ν wächst.

Die charakteristische Gleichung von (96) ist $D_\nu(q^2) = 0$; ist q_1 so bestimmt, daß $D_\nu(q_1^2) = 0$ ist, dann sind die Verhältnisse der $a_n^{(\nu)}$ gegeben durch

$$\frac{a_n^{(\nu)}(q_1^2)}{a_p^{(\nu)}(q_1^2)} = \frac{\Delta^{(\nu)}_{m,n}(q_1^2)}{\Delta^{(\nu)}_{m,p}(q_1^2)}$$

bei beliebigem $m \leqq \nu$.

Um etwas Bestimmtes im Auge zu haben und mit Rücksicht auf das Folgende wollen wir die willkürliche Amplitude der Eigenschwingung, also den willkürlichen Zahlenfaktor, den die $a_n^{(\nu)}$ haben können, so festsetzen, daß

$$a_n^{(\nu)}(q_1^2) = \Delta^{(\nu)}_{0,n}(q_1^2)$$

wird. Wegen (95) existieren dann für alle n die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} a_n^{(\nu)} = \Delta_{0,n}(q_1^2) = a_n.$$

Diese sind auch nicht alle gleich Null; man erkennt das am einfachsten, indem aus der Reihendarstellung von D (29a) $\Delta_{0,0}$ gebildet wird, und die schon gefundene Lösung $q_1^2 = \frac{8}{3}\log\frac{4R}{l} - \frac{5}{6}$ in $\Delta_{0,0}(q_1^2)$ eingesetzt wird.

Wir entwickeln nun D_ν nach den Elementen der nullten Zeile, die alle gleich eins sind, also ist einfach

$$D_\nu = \sum_0^\nu n\, \Delta^{(\nu)}_{0,n} = \sum_0^\nu n\, a_n^{(\nu)}.$$

Auf Grund dieser Gleichung und wegen (93) oder (94) sind wir nun zu folgender Aussage berechtigt, die einen doppelten Grenzübergang in sich schließt:

Ist ε vorgegeben und ν groß genug gewählt, ferner q_1^2 so bestimmt, daß $D_\nu(q_1^2) = 0$ ist, dann sind wir sicher, daß

$$\left|a_0(q_1^2) + \sum_1^\infty n\, a_n(q_1^2)\right| < \varepsilon \tag{98}$$

ist.

Aus (98) folgt weiter, daß die a_n von einem bestimmten n ab beständig mit n gegen 0 abnehmen müssen. Danach gibt es ein absolut größtes a_n, dies sei $\bar{a}$. Nach (27) ist

$$-a_m = \frac{1}{q_1^2} \sum_0^\infty {}_n c_{m,n} \cdot a_n,$$

also ist

$$|a_m| \leq \frac{1}{q_1^2} \sum_n |c_{m,n} \cdot a_n| < \frac{\bar{a}}{q_1^2} \cdot \sum |c_{m,n}|$$

und schließlich

$$\sum_2^\infty {}_m |a_m| < \frac{\bar{a}}{q_1^2} \sum_m \sum_n |c_{m,n}|,$$

womit über (98) hinaus auch die absolute Konvergenz der Summe a_n nachgewiesen ist, da ja $\Sigma_m \Sigma_n |c_{m,n}|$ existiert und die Reihen für φ und $\dot{\gamma}$ sind absolut und gleichmäßig konvergent und stellen stetige Funktionen dar. Aus (82b) bzw. (26) schließen wir dann noch, daß die Größen A_m mindestens mit m in der (—1)-ten Potenz abnehmen, denn es ist

$$|F_{m,2k}| = \left|\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{4k^2 - 1}\right| \leq \frac{1}{m},$$

ferner

$$G_{m,m} = \frac{2m^2 - 1}{m(4m^2 - 1)} < \frac{1}{m}$$

und für

$$m \gtrless n \quad |G_{m,n}| < |G_{m,m}|,$$

also ist nach (82)

$$|A_m| < \frac{1}{m} \sum_0^\infty {}_n |a_n|$$

und die Entwicklung (11) von $\dot{\gamma}$ in eine Sinusreihe ist berechtigt.

Endlich kann man dann aus (25b) noch schließen, indem man $|A_m|$ ungefähr $\frac{C}{m}$ einsetzt, daß a_m mindestens mit m in der dritten Potenz abnehmen.

11. Die Funktionalgleichung.

Der mathematische Teil der Arbeit läßt sich auf eine einzige Funktionalgleichung mit Grenzbedingungen zurückführen. Ich unterlasse die Ableitung und Diskussion dieser Gleichung hier, da dies nur rein mathematisches Interesse hat, und gebe nur ganz kurz den Weg und die Gleichung selbst an[1]).

Faßt man $\dot{\gamma}$, φ und $\mathfrak{K}$ (s. A. 2—4) als Funktionen von x im Bereich $-l$ bis $+l$ auf, dann lassen sich die Beziehungen (6a), (15) und (13a) zusammenziehen zu

$$\frac{\lambda^2 d l^2}{L^2 \pi} \frac{d^2 \dot{\gamma}}{dx^2} = -\int_{-l}^{+l} \left\{\log \frac{8R}{|x - \xi|} - 2\right\} \cdot \dot{\gamma}(\xi) \, d\xi. \tag{99}$$

Durch Einführung von

$$\dot{\gamma}(x) = \dot{\gamma}(s \cdot l) = \mathfrak{f}(s)$$
$$\dot{\gamma}(\xi) = \dot{\gamma}(t \cdot l) = \mathfrak{f}(t)$$

[1]) Dieser Abschnitt ist vollständig in der Bibliothek des Physikalischen Staatsinstituts, Hamburg, Jungiusstraße, hinterlegt.

$$2 = \log e^2$$
$$C = \frac{8R}{l \cdot e^2}$$

und der Abkürzung q^2 wird hieraus die Funktionalgleichung für $\mathfrak{f}(s)$:

$$\mathfrak{f}''(s) = -\frac{1}{q^2}\int_{-1}^{+1} \log \frac{C}{|s-t|} \cdot \mathfrak{f}(t)\, dt; \tag{100}$$

$\mathfrak{f}(s)$ hat wegen $\dot{\gamma}(+l) = 0$ und $\varphi(-l) = 0$ die Nebenbedingungen

$$\mathfrak{f}(-1) = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{f}'(+1) = 0.$$

Die Konvergenzbeweise des vorigen Abschnittes enthalten den Existenzbeweis für die Funktion $\mathfrak{f}(s)$. Durch zweimalige partielle Integration läßt sich (100) in eine inhomogene Integralgleichung verwandeln mit dem stetigen symmetrischen Kern

$$K(s,t) = \frac{(t-s)^2}{2} \cdot \log \frac{C \cdot e^{\frac{3}{2}}}{|s-t|}.$$

Diese Gleichung bietet aber Schwierigkeiten dar, da sie die unbekannten Funktionswerte $\mathfrak{f}(+1)$ und $\mathfrak{f}'(-1)$ enthält.

Es wurden eine Reihe von Ansätzen mit Besselschen und Kugelfunktionen durchgerechnet, die durchaus keine einfacheren Verhältnisse schafften als die geschilderten. Als Grund dafür ist wohl folgende Integralgleichung anzusehen, die zugleich der eigentliche mathematische Grund dafür ist, daß sich die Integration in A. 3 so einfach ausführen ließ:

$$1 = \frac{1}{2\pi \log 2C}\int_{-\pi}^{+\pi} \log \frac{C}{|\cos u - \cos v|}\, dv \tag{101}$$

$$\cos m u = \frac{m}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\log \frac{C}{|\cos u - \cos v|}\right) \cdot \cos m v\, dv \qquad m = 1, 2, 3 \ldots. \tag{102}$$

Diese Gleichung ist ersichtlich gleichbedeutend mit

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\cos m u}{m^2}\right) = -\frac{m^3}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \log \frac{C}{|\cos u - \cos v|}\left(\frac{\cos m v}{m^2}\right) dv. \tag{103}$$

(103) ist (100) außerordentlich ähnlich. Da nun der Übergang von den Koordinaten s und t in (100) zu $\cos u$ und $\cos v$ in (103) eine Verzerrung des Integrationsgebietes bedeutet, die nur an den Enden des Bereiches erheblich ist, so kann man vermuten, daß diese Verzerrung die Lage der Eigenwerte nicht sonderlich verschieben wird, daß also die Eigenwerte von (100) $\frac{1}{q_m^2}$ ungefähr bei denen von (103) $\frac{m^3}{2\pi}$ liegen. Diese Vermutung wird durch die physikalischen Betrachtungen von A. 6 bestätigt und trägt bis zu einem gewissen Grade zur Erklärung für das merkwürdige Verhalten der ungradzahligen Oberschwingungen bei; in der Tat stimmt die durch (52) und durch $q_m^2 = \frac{2\pi}{m^3}$ gegebene Berechnung von λ_m fast genau überein.

12. Die Berechnung der ersten Koeffizienten der Reihenentwicklung.

In den Reihen (29a) lassen sich die Koeffizienten von $\frac{1}{q^2}$ und von $\frac{1}{q^4}\left(\log \frac{16R}{l} - 2\right)$ exakt berechnen. Um bei der Aufstellung dieser Koeffizienten allzuviel Zwischen-

rechnungen zu vermeiden, leiten wir uns zuvor einige Reihenentwicklungen ab. Am übersichtlichsten gelingt dies, wenn wir uns folgende Funktionen $L^{(\nu)}(z)$ definieren:

$$L^{(\nu)}(z) = \frac{(1+z)^\nu}{\nu!}\left\{\log(1+z) - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}\right\}; \quad L^0(z) = \log(1+z). \tag{104}$$

Dann gelten folgende Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{d L^{(\nu)}}{dz} &= L^{(\nu-1)} z \\ \int z L^{(\nu)}(z)\,dz &= z \cdot L^{(\nu+1)}(z) - L^{(\nu+2)}(z) \\ L^{(\nu)}(-1) &= 0; \quad \nu > 0 \\ L^{(\nu)}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

und ähnliche.

Es ist zu beachten, daß $L^{(\nu)}(0) \neq 0$, wenn $\nu > 0$; nützlich ist eine kleine Tabelle der $L^{(\nu)}(0)$:

$v =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$L^{(\nu)}(0) =$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{36}$	$-\frac{1}{4!}\cdot\frac{25}{12}$	$-\frac{1}{5!}\cdot\frac{137}{60}$	$-\frac{1}{6!}\cdot\frac{49}{20}$	$-\frac{1}{7!}\cdot\frac{363}{140}$	$-\frac{1}{8!}\cdot\frac{761}{280}$

(106)

Es läßt sich ferner schreiben

$$\left.\begin{aligned} L^{(\nu)}(+1) &= \frac{2^\nu}{\nu!}\log 2 + 2^\nu \cdot L^{(\nu)}(0) \\ \int_0^z L^{(\nu)}(z)\,dz &= L^{(\nu+1)}(z) - L^{(\nu+1)}(0) \end{aligned}\right| \tag{107}$$

Als erste Reihe ist zu berechnen:

$$w_2 = \sum_1^\infty l\,\{(2l-1)(2l)(2l+1)(2l+2)(2l+3)\}^{-1}. \tag{108}$$

Wir schreiben

$$w_2(z) = \sum_1^\infty l\, z^{2l+3} : \{(2l-1)\,2l\,(2l+1)(2l+2)(2l+3)\}.$$

Viermalige Differentiation liefert die bekannte Reihe

$$\frac{d^4 w_2}{dz^4} = \sum_1^\infty l\,\frac{z^{2l-1}}{2l-1} = \frac{1}{2}\left\{L^0(z) - L^0(-z)\right\}. \tag{109}$$

Nach (105) bis (107) können wir sogleich nacheinander hinschreiben

$$\frac{d^3 w_2}{dz^3} = \frac{1}{2}\left\{L^{(1)}(z) + L^{(1)}(-z) - 2L^{(1)}(0)\right\} = \frac{1}{2}\left\{L^{(1)}(z) + L^{(1)}(-z) + 2\right\} \tag{110}$$

$$\frac{d^2 w_2}{dz^2} = \frac{1}{2}\left\{L^{(2)}(z) - L^{(2)}(-z) + 2z\right\} = \sum_1^\infty l\,\frac{z^{2l+1}}{(2l-1)\,2l\,(2l+1)} \tag{111}$$

$$\frac{d w_2}{dz} = \frac{1}{2}\left\{L^{(3)}(z) + L^{(3)}(-z) + z^2 - 2L^{(3)}(0)\right\}$$

$$w_2(z) = \frac{1}{2}\left\{L^{(4)}(z) - L^{(4)}(-z) + \frac{1}{3}z^3 - 2zL^{(3)}(0)\right\}$$

und für $z = +1$

$$w_2 = \frac{1}{3}\log 2 - \frac{2}{9}; \tag{112}$$

wir brauchen später (111) für $z = +1$

$$\left(\frac{d^2 w_2}{dz^2}\right)_{z=+1} = \log 2 - \frac{1}{2}. \tag{113}$$

Hier wie bei den späteren Reihen wurden die Konstanten immer so bestimmt, daß Funktion und Reihe für $z = 0$ verschwinden, daß beide auch von der richtigen Ordnung verschwinden, dafür ist durch das Verschwinden der jeweiligen vorhergehenden Differentialquotienten gesorgt. Trotzdem (109) im Punkte $z = +1$ nicht mehr konvergiert, ist von (110) an Funktion und Reihe auch in $z = +1$ übereinstimmend; denn die Reihen konvergieren in dem abgeschlossenen Intervall,

$$-1 \leq z \leq +1$$

also dort gleichmäßig, und stellen bei Annäherung vom Innern des Intervalls an die Grenzen desselben die Funktionen dar. Entsprechendes gilt für alle späteren Reihen.

Weiter muß berechnet werden

$$w_3 = \sum_2 1 \{(2l-3)(2l-1)2l(2l+1)(2l+3)\}^{-1}. \tag{114}$$

Wir setzen

$$w_3(z) = \sum_2 1\, z^{2l+3} : \{(2l-3)(2l-1)2l(2l+1)(2l+3)\}.$$

Aus

$$\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{1}{z}\frac{dw_3}{dz}\right) = \sum_2 1 \frac{z^{2l-2}}{2l-3} = \frac{1}{2}\left\{z L^0(z) - z L^0(-z)\right\} \tag{115}$$

erhält man

$$\left.\begin{aligned} w_3(z) = \frac{1}{2}\Big\{ & z^2 L^{(4)}(z) - 5 z L^{(5)}(z) + 5 L^{(6)}(z) - z^2 L^{(4)}(-z) - 5 z L^{(5)}(-z) - \\ & - 5 L^{(6)}(-z) + \frac{4}{3} z^3 L^{(3)}(0)\Big\} \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

was man durch Ausführung der Differentiationen leicht bestätigt; und für $z = +1$ unter Benutzung von (106)

$$w_3 = -\frac{1}{9}\log 2 + \frac{17}{60} - \frac{11}{54}. \tag{117}$$

Ferner soll berechnet werden

$$w_4 = \sum_1^\infty 1 \left\{(2l-3)(2l-1)2l(2l+1)(2l+2)(2l+3)(2l+5)\right\}^{-1}. \tag{118}$$

Wir setzen

$$w_4(z) = -\frac{1}{7\cdot 120} + \sum_2 1\, z^{2l+5} : \{(2l-3)\ldots\ldots(2l+5)\}.$$

Bilden wir $\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\frac{dw_4}{dz}\right)$, so erhalten wir die Reihe für $\frac{1}{z}\frac{dw_3}{dz}$, die bei der Berechnung von (116) aus (115) auftritt. Es ist

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\frac{dw_4}{dz}\right) = \frac{1}{z}\frac{dw_3}{dz} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{z L^{(3)}(z) - 3 L^{(4)}(z) + z L^{(3)}(-z) + 3 L^{(4)}(-z) + 4 z L^{(3)}(0)\right\},$$

woraus man berechnet

$$\left.\begin{aligned} w_4 = -\frac{1}{120\cdot 7} + \frac{1}{2}\Big\{ & z^2 L^{(6)}(z) - 7 z L^{(7)}(z) + 7 L^{(8)}(z) - z^2 L^{(6)}(-z) - \\ & - 7 z L^{(7)}(-z) - 7 L^{(8)}(-z) + \frac{2}{15} z^5 L^{(3)}(0) + \frac{8}{3} z^3 L^{(5)}(0)\Big\} \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

für $z = +1$

$$w_4 = -\frac{1}{45}\log 2 + \frac{1}{45}\cdot\frac{77}{120}. \tag{120}$$

Als letzte Reihe ist zu berechnen:

$$w_5 = \sum_{2}^{\infty} {}^{l} \{(2l-2)(2l-1)\,2l\,(2l+1)(2l+2)\}^{-1} \tag{121}$$

oder

$$w_5(z) = \sum_{1}^{\infty} {}^{l} z^{2l+4} : \{2l(2l+1)(2l+2)(2l+3)(2l+4)\}.$$

Es ist
$$\frac{d^4 w_5}{dz^4} = \sum \frac{z^{2l}}{2l} = \frac{1}{2}\{-L^{(0)}(z) - L^0(-z)\}, \tag{122}$$

woraus

$$\frac{d^2 w_5}{dz^2} = \frac{1}{2}\left\{-L^{(2)}(z) - L^{(2)}(-z) + 2L^{(2)}(0)\right\} = \sum \frac{z^{2l+2}}{2l(2l+1)(2l+2)} \tag{123}$$

$$w_5(z) = \frac{1}{2}\left\{-L^{(4)}(z) - L^{(4)}(-z) + z^2 L^{(2)}(0) + 2L^{(4)}(0)\right\} \tag{124}$$

für $z = +1$ ist
$$w_5 = -\frac{1}{3}\log 2 + \frac{67}{72\cdot 4}. \tag{125}$$

Wir brauchen noch (123) für $z = +1$

$$\sum_{1}^{\infty} {}^{l} \frac{1}{2l(2l+1)(2l+2)} = -\log 2 + \frac{3}{4}. \tag{126}$$

Außerdem brauchen wir einige von den ersten Gliedern der Determinante, die wir aus (25), (26), (27), (82), (83) und (84) entnehmen:

$$\left.\begin{aligned}
c_{1,0} &= \frac{1}{2}(F_{3,0} - F_{1,0}) = \frac{1}{3},\\
c_{1,1} &= \frac{1}{2}(G_{3,1} - G_{1,1}) = -\frac{1}{5},\\
F_{2,0} + G_{2,0} &= -\frac{2}{3}; \qquad F_{4,0} + G_{4,0} = -\frac{4}{15},\\
c_{2,0} &= -\frac{1}{2}(F_{2,0} + G_{2,0}) - \frac{1}{2\cdot 3}(F_{2,0} + G_{2,0} - F_{4,0} - G_{4,0}) = \frac{2}{5},\\
f_{2,2} &= -\frac{2}{3}F_{2,2} + \frac{1}{6}F_{4,2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} = -\frac{7}{72},\\
g_{2,2} &= -\frac{2}{3}G_{2,2} + \frac{1}{6}G_{4,2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{-19}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} = -\frac{137}{120\cdot 7},\\
c_{2,2} &= f_{2,2} + g_{2,2} = -\frac{82}{5\cdot 63},\\
c'_{1,0} &= -2F_{1,0} = +2,\\
c'_{1,1} &= -2G_{1,1} = -\frac{2}{3},\\
c'_{1,1} - c'_{1,0} &= -\frac{8}{3}.
\end{aligned}\right\} \tag{127}$$

Nach (29a) ist der erste Teil des Faktors von $\frac{1}{q^2}$:

$$\sum_{1}^{\infty} {}^{i} c_{ii} - \sum_{1}^{\infty} {}^{i} c_{io}. \tag{128}$$

In der Bezeichnungsweise (84)

$$\left\{c_{1,1} + c_{2,2} + \sum_{2}^{\infty} {}^{l} f_{2l,2l} + \sum_{3}^{\infty} {}^{m} g_{m,m}\right\} - \left\{c_{1,0} + c_{2,0} + \sum_{1}^{\infty} {}^{l} f_{2l+1,0} + \sum_{2}^{\infty} {}^{l} f_{2l,0} + g_{2l,0}\right\} \tag{129}$$

Es ist (84b)

$$f_{2l,2l} = \frac{12}{(4l^2-1)\,2l\,(4l^2-1)(4l^2-4)}$$

und läßt sich darstellen

$$f_{2l,2l} = 4\left\{\frac{-2l}{(2l-1)^2(2l+1)^2} + \frac{4l^2-3}{2l(4l^2-1)(4l^2-4)}\right\}.$$

Spalten wir den ersten Term und schreiben im Zähler des zweiten Terms $(4l^2-4)+1$, so wird

$$f_{2l,2l} = -\frac{1}{(2l-1)^2} + \frac{1}{(2l+1)^2} + \frac{4}{(2l-1)\,2l\,(2l+1)} + \qquad (130)$$

$$+ \frac{4}{(2l-2)(2l-1)\,2l\,(2l+1)(2l+2)}$$

bei der Summation über l wird der zweite Term immer von dem ersten Term des folgenden Summationsgliedes zerstört, es bleibt als erstes Glied nur $-\frac{1}{9}$ für $l=2$. Der dritte Term summiert, ergibt (113) bis auf das erste Glied von (113), der letzte Term gibt w_4 (125); also ist

$$\sum{}^{l} f_{2l,2l} = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{25}{9} + \frac{67}{72} \qquad (131)$$

(88) und (89) ergeben für $n=m$

$$g_{m,m} = \frac{-60(2m^2-1)}{m(m^2-1)(m^2-4)(4m^2-1)(4m^2-9)} - \frac{64m}{3(4m^2-1)(4m^2-9)}.$$

Zweckmäßigerweise zerlegen wir uns diese beiden Brüche in Partialbrüche; die Zerlegung wird am einfachsten bewiesen, indem man $g_{m,m}$ als komplexe Funktion von $m=u+iv$ auffaßt und das Residuum in den Punkten bestimmt, in denen der Nenner verschwindet. So erhält man

$$g_{m,m} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{m} - \frac{2}{3}\frac{1}{m-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{m+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{m-2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{m+2} - \frac{4}{3}\frac{1}{2m-1}$$

$$-\frac{4}{3}\frac{1}{2m+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{2m-3} + \frac{4}{3}\frac{1}{2m+3}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{1}{2m-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{2m+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{2m-3} - \frac{2}{3}\frac{1}{2m+3}$$

und erkennt, daß sich bei der Summation über m alle Terme aufheben bis auf gewisse Anfangsterme; diese lassen sich zusammenfassen zu $-\frac{19}{72}+\frac{8}{63}$. Mit $c_{1,1}$ und $c_{2,2}$ sowie (131) erhalten wir

$$\sum c_{ii} = c_{1,1} + c_{2,2} + \sum f_{2l,2l} + \sum g_{m,m}$$

$$= \frac{8}{3}\log 2 - \frac{22}{9} \qquad (132)$$

(84b) liefert uns $f_{2l+1,0} = \frac{-12}{(2l+1)[(2l+1)^2-1]\cdot[(2l+1)^2-4]}$. Daher nach (108) und (112)

$$-\sum_{1}^{\infty}{}^{l} f_{2l+1,0} = 12\sum_{1}^{\infty}{}^{l}\left\{(2l-1)\,2l\,(2l+1)(2l+2)(2l+3)\right\}^{-1} =$$

$$= 12\,w_2 = 4\log 2 - \frac{8}{3}. \qquad (133)$$

(84b) und (88), (89) geben uns weiter $f_{2l,0}$ und $g_{2l,0}$:

$$f_{2l,0} = \frac{-12}{2l(4l^2-1)(4l^2-4)}; \quad g_{2l,0} = \frac{-12(4l^2-1)\cdot 5}{2l(4l^2-1)(4l^2-4)(4l^2-1)(4l^2-9)}.$$

Zusammen ist das und nach (114) und (117):

$$-\sum_2^\infty {}_l f_{2l,0} + g_{2l,0} = 12\sum \frac{1}{2l(4l^2-1)(4l^2-9)} = 12\, w_3.$$

$$= -\frac{4}{3}\log 2 + \frac{17}{5} - \frac{22}{9}. \tag{134}$$

Mit (133) und $-c_{1,0}$, $-c_{2,0}$, (134) erhalten wir

$$-\sum_1^\infty {}_i c_{i,0} = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{22}{9}. \tag{135}$$

(132) und (135) zusammen ergeben den gesuchten Faktor von $\frac{1}{q^2}$ der Entwicklung von (29a), wenn wir noch $c_{1,1}'$ und $c_{1,0}'$ aus (127) entnehmen

$$\frac{1}{q^2}\left\{\sum c_{ii} - \sum {}^c{}_{i0} + (c_{1,1}' - c_{1,0}')\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right)\right\} = \frac{1}{q^2}\left\{\frac{8}{3}\log 4 - \frac{44}{9} - \frac{8}{3}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right)\right\}$$

Der Faktor von $\frac{1}{q^4}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right)$ in (29a) läßt sich zusammenfassen zu:

$$\sum_2^\infty {}_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_{1,0}' & c_{1,1}' & c_{1,i}' \\ c_{i,0} & c_{i,1} & c_{i,i} \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix} c_{1,1}' \sum_2 {}_i c_{ii} - c_{1,0}' \sum_2 {}_i c_{ii} - c_{1,1}' \sum_2 {}_i c_{i,0} \\ + c_{1,0}' \sum_2 {}_i c_{i,1} - \sum_2 {}_i c_{i,1}\cdot c_{1,i}' + \sum_2 {}_i c_{i,0}\cdot c_{1,i}' \end{matrix}\right\}. \tag{136}$$

Die ersten drei Summen sind bereits bekannt; $c_{i,1}$ ist (88) und (89) für $n = 1$ also, da $c_{2l,1} = 0$

$$\underset{m=2l+1}{g_{m,1}} = -12\left\{\frac{5m^2+4m-4}{m^2(m^2-1)(m^2-4)^2(m+4)} + \frac{16}{m^2(m^2-4)^2(m^2-16)}\right\}$$

oder

$$g_{m,1} = \frac{-60}{(2l-3)(2l-1)2l(2l+1)(2l+2)(2l+3)(2l+5)} \tag{137}$$

und über $m = 2l+1$ summiert, ist das nach (118), (120)

$$\sum c_{i,1} = \sum g_{m,1} = -60\, w_4 = \frac{4}{3}\log 2 - \frac{77}{90}. \tag{138}$$

Nach (82) und (25a) ist

$$c_{1,2l}' = -2F_{1,2l} = \frac{-2}{4l^2-1} \tag{139}$$

und

$$c_{1,2l+1}' = -2G_{1,2l+1} = \frac{+2}{(2l+3)(2l-1)} = \frac{2}{m^2-4}; \quad m = 2l+1. \tag{140}$$

Da $c_{2l,1} = 0$ ist, ist $-\sum c_{i1}\cdot c_1{}'_i = -\sum c_{2l+1,1}\cdot c_{1,2l+1}'$. Nach (137) und (140) ist mit $m = 2l+1$:

$$-c_{m,1}\cdot c_{1,m}' = \frac{120}{m(m^2-1)(m^2-4)^2(m^2-16)}. \tag{141}$$

Dies läßt sich zerlegen in

$$-\frac{5}{6}\frac{m}{(m-2)^2(m+2)^2} + \frac{5}{6}\frac{m^4-13m^2-36}{m(m^2-1)(m^2-4)(m^2-16)}$$

schreibt man

$$m^4 - 13m^2 - 36 = (m^2-4)(m^2-16) + 7(m^2-16) + 12$$

$$\frac{8m}{(m-2)^2(m+2)^2} = \frac{1}{(m+2)^2} - \frac{1}{(m-2)^2},$$

so sieht man, daß

$$-c_{m,1} \cdot c_{1,m}' = \frac{5}{48} \cdot \frac{1}{(m+2)^2} - \frac{5}{48} \cdot \frac{1}{(m-2)^2} + \frac{5}{6}\left\{\frac{12}{m(m^2-1)(m^2-4)(m^2-16)} + \frac{7}{m(m^2-1)(m^2-4)} + \frac{1}{m(m^2-1)}\right\}$$

über $m = 2l + 1$ summiert, zerstören sich die ersten Terme bis auf zwei am Anfang, das andere sind die Reihen (118), (120); (108), (112); (123), also bekannte Summen, so daß

$$-\sum c_{i,1} \cdot c_{1,i}' = \frac{8}{9} \log 2 - \frac{29}{45}. \tag{141}$$

Schließlich haben wir noch zu berechnen

$$\sum_2^i c_{i,0} \cdot c_{1,i}' = \sum_1^l c_{2l,0} \cdot c_{1,2l}' + \sum_1^l c_{2l+1,0} \cdot c_{1,2l+1}'$$

$-c_{2l,0}$ steht in (134) als Summationsglied und mit (139) wird

$$c_{2l,0} \cdot c_{1,2l}' = \frac{24}{2l(4l^2-1)^2(4l^2-9)}.$$

Dies läßt sich wieder spalten in

$$\frac{3}{4}\frac{1}{(2l+1)^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{(2l-1)^2} + \frac{3}{(2l-1)2l(2l+1)} + \frac{3}{(2l-3)(2l-1)2l(2l+1)(2l+3)}.$$

Bei der Summation über l zerstören sich wieder die quadratischen Anfangsterme bis auf den ersten $-\frac{3}{4}$; die beiden anderen Terme geben die Reihen (113) und (115), (117), so daß unter Berücksichtigung des Anfangsgliedes, das bei w_3 fehlt, wird

$$\sum c_{2l,0} \cdot c_{1,2l}' = -\frac{3}{4} + 3\left(\frac{d^2 w_2}{dz^2}\right)_{z=1} + 3 w_3 + \frac{3}{(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{19}{9} \tag{142}$$

$-c_{2l+1,0}$ steht in (133) als Summationsglied und mit (140) wird

$$c_{2l+1,0} \cdot c_{1,2l+1}' = \frac{-24}{m(m^2-1)(m^2-4)^2}; \quad m = 2l+1.$$

Ähnlich wie oben ist

$$c_{2l+1,0} \cdot c_{1,2l+1}' = \frac{-2m}{(m+2)^2(m-2)^2} + \frac{2(m^2+3)}{m(m^2-1)(m^2-4)}; \quad m = 2l+1.$$

Für $m^2 + 3$ setzen wir $(m^2-4)+7$, dann wird

$$c_{2l+1,0} \cdot c_{1,2l+1}' = -\frac{1}{4(2l-1)^2} + \frac{1}{4(2l+3)^2} + \frac{2}{2l(2l+1)(2l+2)} + \frac{14}{(2l-1)2l(2l+1)(2l+2)(2l+3)}$$

über l summiert, ergibt dies wegen (125) und (112)

$$\sum c_{2l+1,0} \cdot c_{1,2l+1}' = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} + 2 w_5 + 14 w_2 = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{17}{9} \tag{143}$$

und mit (142) zusammen wird

$$\sum c_{i,0} \cdot c_{1,i}' = \frac{16}{3}\log 2 - 4.$$

Um die gesuchte Größe (136) zu bekommen, brauchen wir (127), (132), (135), (138), (141) und (143) in der Reihenfolge geschrieben wie (136), wird (136)

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\log 2 - \frac{22}{9} + \frac{1}{5}\right) - 2\left(\frac{8}{3}\log 2 - \frac{22}{9} + \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{8}{3}\log 2 + \frac{22}{9} - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{4}{3}\log 2 - \frac{77}{90}\right) + \frac{8}{9}\log 2 - \frac{29}{45} + \frac{16}{3}\log 2 - 4 = \frac{8}{3}\cdot\frac{7}{18}$$

als den gesuchten Faktor von

$$\frac{1}{q^4}\left(\log\frac{16R}{l} - 2\right).$$

Bei all diesen Summationen hätte man natürlich auch mit Partialbruchzerlegungen zum Ziel kommen können, aber das Umordnen der Reihen, Bestimmen der Anfangsglieder hätte mindestens soviel Arbeit erfordert, wie vorstehende Art. Die Umstände, die hier schon erforderlich waren, lassen es nicht angezeigt erscheinen, die exakte Summation auch auf die weiteren Summen auszudehnen. Die weiteren Summen wurden numerisch aus der Determinante berechnet. Auf Grund der absoluten Konvergenz der $\sum c_{m,n}$ wurden natürlich eine Reihe von Umformungen benutzt, die zum Teil stärker konvergierende Reihen ergeben; so wurde z. B. die Doppelsumme

$$\sum_{i,k} c_{ii} \cdot c_{kk}, \quad 1 \leqq i < k$$

berechnet aus

$$\sum c_{ii} \cdot c_{kk} = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum c_{ii}\right)^2 - \sum c_{ii}^2\right\}$$

worin der erste Term bereits exakt berechnet, der zweite recht schnell mit i abnimmt.

Ähnlich ist die in A. 5 auftretende Summe

$$\sum_{i \neq K} c_{ii} \cdot \dot{c}_{KK}$$

berechnet als

$$\sum_{i \neq K} c_{ii} \cdot \dot{c}_{KK} = \left(\sum c_{ii}\right) \cdot \left(\sum \dot{c}_{KK}\right) - \sum c_{ii} \cdot \dot{c}_{ii}.$$

Außerdem stellen diese exakt ausgeführten Summationen eine recht scharfe Kontrolle für die numerische Rechnung dar, denn die Summationen wurden auch numerisch ausgeführt; dies bietet eine Gewähr, daß bei der Aufstellung der Glieder der Normaldeterminante keine groben Fehler eingelaufen sind.

Die Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Professor Lenz unternommen, dem ich für die Anregung sowie für seinen Rat und seinen wissenschaftlichen Unterricht zu großem Danke verpflichtet bin. Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinen Dank auch an dieser Stelle auszusprechen.

Zur elektrischen Induktion in Nuten.

Von

L. Kneissler-Maixdorf.

In der Arbeit „Bewegung von Induktionslinien und Maxwellsche Theorie" (Arch. f. Elektrot. XIII. Bd. 1924. 3. Heft) wird am Schlusse kurz auf eine Darstellung der elektrischen Induktion in Nuten eingegangen, in der das magnetische Induktionsfeld in zwei Teilfelder zerlegt wird und deren Geschwindigkeiten einzeln betrachtet werden.

Nachträglich sehe ich jetzt, daß dieselbe Definition der Geschwindigkeit der magnetischen Induktionslinien, die in der zitierten Arbeit durch Gleichung (7) angegeben wird, auch diejenige Darstellung rechtfertigt, wonach die Verminderung der Bewegungsinduzierung im Nutenraum, infolge der Schirmwirkung, durch die erhöhte Geschwindigkeit der magnetischen Induktionslinien kompensiert wird. Es soll dies an dem Beispiel der kreiszylindrischen Nut, die in der Arbeit „Induktion und Kraftangriff in Nuten" (Arch. f. Elektrot. wie oben) näher behandelt ist, mit der dortigen Bezeichnungsweise kurz gezeigt werden.

Die Materie, in der die Nut liegt, habe die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\, v. \qquad (1)$$

Wir untersuchen nun, welche Geschwindigkeit die Induktionslinien des zusätzlichen Feldes $\mathbf{b}_z = \mu_i \mathbf{m}_z$ innerhalb des Nutenraumes dabei annehmen. Es gilt definitionsgemäß

$$\mathbf{p}_z = \frac{c}{b_z^2}\left(\mathbf{b}_z \times \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial t}\right). \tag{2}$$

Hier ist offenbar

$$\mathbf{a}_z = \mathbf{k}\, a_z, \tag{3}$$

ferner

$$\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial t} = -\mathbf{k}\, v \frac{\partial a_z}{\partial x}, \tag{4}$$

und entsprechend der Definition von $\mathfrak{a}$

$$\left|\frac{\partial a_z}{\partial x}\right| = \frac{b_z}{c}. \tag{5}$$

Berücksichtigt man, daß im Nutenraum

$$\frac{\mathbf{b}_z}{b_z} = -\mathbf{j} \tag{6}$$

gilt, so erhält man durch Einsetzen der erhaltenen Ausdrücke in Gleichung (2)

$$\mathbf{p}_z = \mathbf{i}\, v. \tag{7}$$

Die magnetischen Induktionslinien des zusätzlichen Feldes haben demnach die gleiche Geschwindigkeit wie die Materie.

Das Bild ändert sich aber, wenn man die Geschwindigkeit der magnetischen Induktionslinien des resultierenden Feldes im Nutenraum ermittelt. Da hier

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial t} \tag{8}$$

gilt, die Richtung des resultierenden magnetischen Induktionsfeldes aber der des zusätzlichen entgegengesetzt ist, kehrt sich die Bewegungsrichtung der Induktionslinien hier um. Führt man die Konstante

$$K = \frac{b}{b_z} = \frac{\mu_i \sigma}{\mu_a - \mu_i \sigma} \tag{9}$$

ein, wobei $b = \mu_i \sigma m_0$ den Wert des resultierenden magnetischen Induktionsfeldes bedeutet, so ergibt sich durch Einsetzen in die Definitionsgleichung von $\mathbf{p}$, schließlich

$$\mathbf{p} = -\mathbf{i}\frac{v}{K}. \tag{10}$$

Die Geschwindigkeit der Induktionslinien, relativ zu einem ruhenden Bezugsystem, ist hier der materiellen Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet, wenn $\mu_a > \mu_i$. Ihr Wert ist um so größer, je größer die Differenz der Permeabilitäten, je stärker also die Schirmwirkung ist.

Setzt man den erhaltenen Ausdruck für $\mathbf{p}$ in die Gleichung

$$c(\mathbf{e} + \triangle \Phi) = \mathbf{b} \times (\mathbf{p} - \mathbf{v}) \tag{11}$$

ein, so ergibt sich, wenn $\lambda = 1 + \frac{1}{K}$ eingeführt wird,

$$c(\mathbf{e} + \triangle \Phi) = -(\lambda\, \mathbf{b} \times \mathbf{v}). \tag{12}$$

Da $\lambda\, \mathbf{b} = \mu_a \mathbf{m}_0$ das ungeschwächte magnetische Induktionsfeld bedeutet, gibt Gleichung (12) das induzierte elektrische Feld richtig an.

Die hier an einem speziellen Beispiel skizzierte Darstellung läßt sich allgemein in qualitativ gleicher Weise durchführen. Auch diese hier erörterte, von der Praxis erfundene Anschauung erweist sich damit als einwandfrei. Die polemische Bemerkung in der zweitgenannten Arbeit gegen ihre unbegründete Anwendung war an der dortigen Stelle vollkommen berechtigt, trifft heute aber natürlich nicht mehr zu.



Funkenkonstante, Zündfunken und Wanderwelle.

Von

Prof. Dr. **Max. Toepler**, Dresden.

Inhalt.

Theoretischer Teil: Für Gleitfunken war 1906 gefunden, daß der Funkenwiderstand sich ergibt als Funkenkonstante k mal Funkenlänge dividiert durch die im Funken abgeflossene Elektrizitätsmenge; Abschnitt I. Durch die Übertragung dieses Gesetzes auf die Entladung einer Kapazität durch einen Funken im Raume ließ sich der Spannungsverlauf sowie Stromstärke, Widerstand u. dgl. rechnen; Abschnitt II. Hiernach ist auch der Zeitverlauf von Stoßspannung bei Stoßanordnungen mit kurzen Leitungen sofort gegeben; Abschnitt III. Die Gestalt von Gleitbildern ließ einen die Rechnungen bestätigenden Rückschluß auf die Gültigkeit der Rechnungen nur genähert zu; Abschnitt IV. Spannungsverlauf im Zündfunken und Funkenkonstante lassen sich aber aus Wanderwellen auf langen Antennen nach zwei Methoden experimentell finden, einmal aus der Spannung zwischen den Antennen (Einhüllendenmethode) und aus der Spannung in der Schleife einer Antenne (Schleifenmethode). Im einzelnen wird dies für unendlich lange Antennen, d. h. ohne Reflexion in Abschnitt V, für lange Antennen mit vielfach reflektierter Wanderwelle in Abschnitt VI und für kurze Antennen in Abschnitt VII durchgesprochen.

Messungen: Nach der Schleifenmethode durchgeführte Bestimmungen der Funkenkonstante werden in Abschnitt A, nach der Einhüllendenmethode ausgeführte in Abschnitt B mitgeteilt. Beide geben Unabhängigkeit des Wertes k von der Zündfunkenlänge und von der Elektrodengröße. In Abschnitt C wird der Einfluß der im Funken entladenen Kapazität auf k untersucht und Unabhängigkeit innerhalb weitester Grenzen (entladene Elektrizität von $0{,}8 \cdot 10^4$ bis $1500 \cdot 10^4$ stat. Einh.) nachgewiesen. Als Absolutwert der Konstanten wird $0{,}482 \cdot 10^{-3}$ gefunden.

I. Widerstandsgesetz und Funkenkonstante k aus gleitender Entladung.

Wird an einen Metallpol, welcher auf einer Isolierplatte mit rückseitiger Metallbelegung aufsteht, plötzlich Spannung gegen diese Belegung angelegt, so ergießt sich bekanntlich von ihm aus Elektrizität auf die Plattenoberfläche. Die Untersuchung solcher gleitender Büschel- und Funkenbildung auf ebenen Glasplatten ermöglichte[1]) die Bestimmung folgender Größen: Aus der von Gleitpole aus geladenen Fläche O, der mittleren Spannung $\overline{P}$ auf ihr und der Kapazität c der Plattenoberflächeneinheit bestimmte ich die durch den Büschelanfang, d. h. auch durch den ersten Zentimeter Büschelstiel, d. h. ein Funkenstück geflossene Elektrizitätsmenge E gleich $O \cdot \overline{P} \cdot c$; — dies nicht nur für fertig gebildetes Gleitbüschel, sondern auch (durch Abfangen des Büschelwachsens mittels vorzeitigen Kurzschlusses) für das noch im Vorwachsen begriffene Gleitbüschel. Demnach war die durch ein angebbares Potentialgefälle $dP : dl$ auf dem ersten Zentimeter Büschelstiel durch dieses getriebene Elektrizitätsmenge dE bestimmbar. Die Zeit t, die zum Fließen von E nötig war, ließ sich mittels Schlierenmethode durch Ausmessen des Radius r der Schallwelle, die vom Gleitbüschelursprunge ausgelöst und vom Gleitbüschelende beleuchtet wurde, feststellen; t ist gleich r dividiert durch die Schallgeschwindigkeit. Wieder ließ sich durch Abschneiden der Gleitbüschelbildung (bis 110 cm lange Gleitbüschel wurden untersucht), während ihres Vorwachsens nicht nur die Gesamtzeit, sondern auch die Wachstumsgeschwindigkeit (Größenordnung 10^7 cm/sec)

[1]) M. Toepler, Ann. d. Phys. 21, S. 193, 1906.

während der Gleitbüschelbildung finden und damit die zum Abfließen von dE unter der Kraft dP·dl nötige Zeit dt.

Definiert man schließlich als Widerstand W von 1 cm des Gleitbüschelstieles bzw. Gleitfunkens die Größe (Gefälle gleich dP:dl):(Stromstärke gleich dE:dt), so fand ich als Grundgleichung der Gleitfunkenbildung, gültig für 1 cm Funkenstück die Beziehung

$$E \cdot W = \text{konst} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} = k. \qquad (1\,a)$$

(E die durch das Funkenstück geflossene gesamte Elektrizitätsmenge in Coulom, W der Widerstand von 1 cm Funkenstück in Ohm.)

Für den Widerstand von F cm gleichartiger Funkenlänge gilt also

$$W_F = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{F}{E}. \qquad (1\,b)$$

Die Gültigkeit des Gesetzes[1]) wurde nachgewiesen für E gleich 10^4 bis E gleich $30 \cdot 10^4$ statische Einheiten.

Zu bemerken ist, daß die Konstanz von E·W recht weitgehend durch diese Messungen sichergestellt wurde, daß aber dem speziell ermittelten Absolutwerte der Grundkonstanten k vor allem die Unsicherheit anhaftet, daß er mit der normalen Schallgeschwindigkeit berechnet wurde. Inzwischen habe ich[2]) die bekannte Tatsache, daß Funkenknallwellen eine übergroße Schallgeschwindigkeit besitzen, selbst nachprüfen können. Die Konstante $0{,}8 \cdot 10^{-3}$ ist also sicher etwas zu groß.

II. Spannungsverlauf am Funken.

Die besprochene Bildung des Gleitfunkens erfolgt im Gasraume am Isolator, da Rauhung, Befeuchtung, Bepulverung der Gleitfläche kaum stört. Der Funken muß schon sehr stark sein, ehe die Isolatoroberfläche störend angeschmolzen wird. Die Übertragung meines Grundgesetzes Gleichung (1) der Gleitfunken auf die Funkenbildung im Raume erschien hiernach unbedenklich[3]). Es ließ sich dann der zeitliche Verlauf der Spannung zwischen den Funkenelektroden rechnerisch bestimmen[4]).

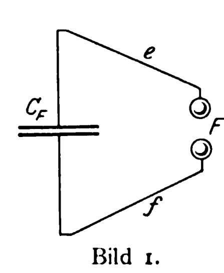


Bild 1.

Eine Kapazität C_F, vgl. Bild 1, sei ohne wesentlichen Ohmschen Widerstand[5]) und ohne wesentliche Selbstinduktion der Zuleitungen e und f mit den Elektrodenkugeln der Funkenstrecke F verbunden. Bedeutet E_0 die ursprünglich vor Funkenbildung in F vorhandene Ladung, E die jeweils schon durch den Funken abgeflossene Ladung, i die Stromstärke in F, P_F die Anfangsspannung (Funkenspannung) zwischen e und f, P die laufende, d. h. momentan vorhandene Spannung beiderseits F zwischen e und f, so ist

$$i = \frac{dE}{dt} = \frac{E_0 - E}{C_F} \cdot \frac{E}{k \cdot F} \qquad (2)$$

---

[1]) Dies Gesetz: Leitfähigkeit des Funkens ist proportional der geflossenen Elektrizitätsmenge, ist ionentheoretisch einfach dahin zu deuten, daß jede geflossene Elektrizitätsmenge eine ihr proportionale Ionenmenge hinterläßt. Zur merklichen Rekombination der Elektronenpaare ist die Zeit zu kurz und die Temperatur im Funken zu hoch. Da das Gesetz eine Summenwirkung über Zeit und Querschnitt darstellt, so wird es streng nur als beschränkter Grenzfall, angenähert aber für ein größeres Artgebiet von Funkenbildung gelten (ähnlich wie das Gasgesetz zunächst nur für ideale Gase streng, darüber hinaus angenähert gilt).

[2]) M. Toepler, Ann. d. Phys. 27, S. 1051, 1908.

[3]) Freilich nur für so lange Funken, daß der Anodenfall und Kathodenfall an den Elektroden unwesentlich bleibt.

[4]) M. Toepler, Ann. d. Phys. 21, S. 220, 1906; ferner Arch. f. Elektrot. X, S. 173, 1921 und ETZ 1924, H. 40, S. 1045.

[5]) Diese Bedingung ist leicht zu erfüllen; für ein System mit Ohmschem Widerstande in e und f sind alle Formeln ETZ l. c. zu finden.

oder mittels $E_0 = C_F \cdot P_F$ und $E_0 - E = C_F \cdot P$

$$\frac{dP}{dt} = -P \frac{P_F - P}{k \cdot F} \tag{3}$$

also für die Funkenmitte, d. h. für $P = P_F : 2$

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{max} = \frac{P_F^2}{4kF} = \frac{P_F}{4} \cdot \alpha. \tag{4}$$

Die Gleichung (3) gibt als Verlauf der Spannung P bei F für Zeitzählung von der Funkenmitte

$$P = P_F \frac{1}{1 + e^{\alpha t}}, \tag{5}$$

wobei zur Abkürzung eingeführt wurde

$$\alpha = \frac{P_F}{k \cdot F} = \frac{E_0}{C_F \cdot k \cdot F}. \tag{6}$$

In Bild 1*) ist gemäß Gleichung (5) der Verlauf der Potentialdifferenz P zwischen den Elektroden von F dargestellt, er verläuft symmetrisch zur Funkenmitte.

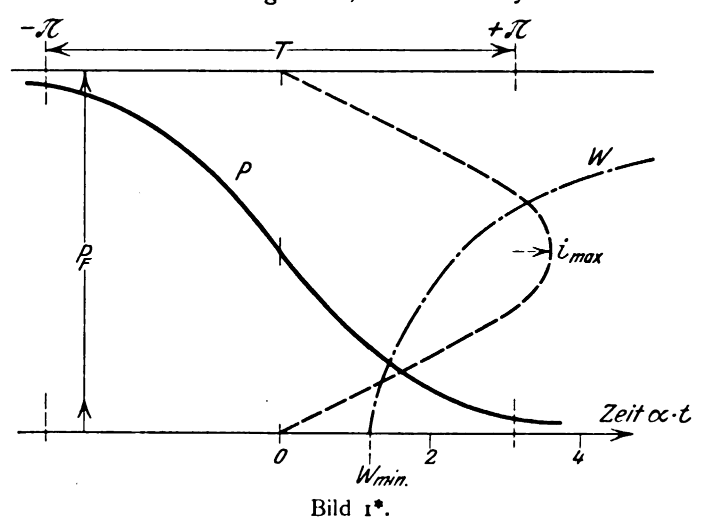


Bild 1*.

Hiernach beginnt der Funken unendlich langsam und endigt ebenso; in Wirklichkeit ist Anfang und Ende verkürzt[1]).

Wir können näherungsweise den Verlauf nach Gleichung (5) auch durch ein harmonisches Abklingen mit der gleichen Neigung in der Funkenmitte ersetzen. Man erhält bei Zeitzählung von der Funkenmitte

$$P = \frac{P_F}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha t}{2}\right) \tag{5*}$$

als Annäherung für Gleichung (5) und bei Zeitzählung von dem jetzt wohl definierten Funkenbeginne

$$P = \frac{P_F}{2}\left(1 + \cos\frac{\alpha t}{2}\right). \tag{5**}$$

Die Funkendauer T, d. h. die Gesamtzeit zwischen P gleich P_F und $P = 0$ wird jetzt

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \frac{kF}{P_F}; \tag{7}$$

in Bild 1* ist die Zeit T eingetragen.

[1]) Der Anfang hängt von der Anzahl der im Schlagraum normal vorhandenen Ionen u. dgl. ab und kann bekanntlich großen Verzug besitzen; das letzte Ende ist noch mehr Luftströmungen und anderen Zufälligkeiten ausgesetzt.

Die Kapazität C_F ist in Gleichung (5) nicht enthalten, die Kurve Bild 1* gilt also für große und kleine Kapazitäten, was in Abschnitt C der Messungen sich bestätigt finden wird.

Die Stromstärke im Funken F rechnet sich aus Gleichung (3) zu

$$i = -C_F \frac{dP}{dt} = +C_F P \frac{P_F - P}{kF}, \tag{8}$$

zur Zeit der Funkenmitte ist i am größten

$$i_{max} = C_F \cdot \frac{P_F}{4} \alpha. \tag{9}$$

Der Widerstand im Funken ist nach Gleichung (1) zu finden; er wird am Schlusse des Funkens, d. h. für E gleich E_0 ein Minimum

$$W_{min} = \frac{kF}{E_0} = \frac{kF}{C_F \cdot P_F} = \frac{1}{C_F \alpha}. \tag{10}$$

In Bild 1* sind i (gestrichelt) und W (strichpunktiert) als Funktion von P dargestellt.

III. Funken F als Zündfunken für plötzliche Spannungsstöße.

In vielen Anordnungen findet der Funken Anwendung zur Erzielung raschester Spannungsänderungen zwischen zwei gegebenen Leiterpunkten. Bild 2 gibt wohl die älteste und meistbenutzte mit dem großen Vorzuge völliger Symmetrie.

Alle Leitungen seien wieder möglichst widerstandslos, möglichst selbstinduktionslos, möglichst kurz angenommen. Die Gleichstromquelle M ladet die Kapazitäten C_1 und C_2 (sowie, falls es vorhanden ist, C_F) langsam durch die großen Schutzwiderstände R_1 und R_2 hindurch. Der große Widerstand W ermöglicht diese Aufladung ohne wesentliche Spannungsbildung zwischen a und b.

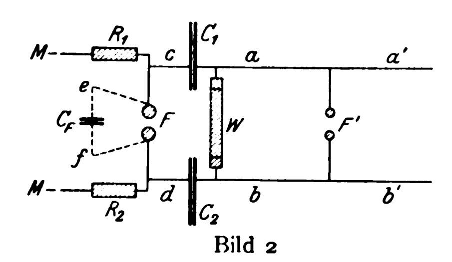


Bild 2

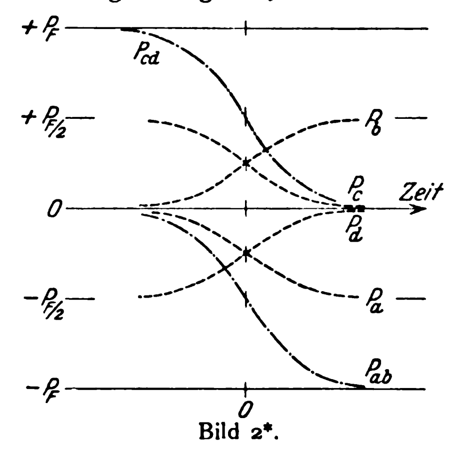


Bild 2*.

Nach Funkenausbruch bei F, Anfangsspannung wieder P_F, sinkt die Spannung P bei F und damit auch zwischen c und d und auf den linken Belegungen von C_1 und C_2. Die auf den rechten Belegungen von C_1 bzw. C_2 freiwerdenden Elektrizitäten können während der kurzen Entladungsdauer bei F nicht durch W abfließen, also entsteht zwischen ihnen, also auch zwischen a und b Spannung mit der Geschwindigkeit der Funkenbildung bei F. Sind C_1 und C_2 streng gleich und symmetrisch gebaut (genauer, haben sie gleiche Kapazitätskoeffizienten) und ist die Kapazität der Leitungen c, d, a und b verschwindend klein (oder einander streng gleich), so fließt bei dieser Spannungsänderung auch nur verschwindend wenig Ladung von C_1 und C_2 nach F hin. Wir haben also auf e, c, a und f, d, b die Potentiale, Zeit gezählt von der Funkenmitte,

$$\left.\begin{aligned} P_c = P_e = \frac{P_F}{2} \frac{1}{1 + e^{\alpha t}}; \quad P_a = P_c - \frac{P_F}{2} = -\frac{P_F}{2} \frac{e^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}} \\ P_d = P_f = -\frac{P_F}{2} \frac{1}{1 + e^{\alpha t}}; \quad P_b = P_d + \frac{P_F}{2} = +\frac{P_F}{2} \frac{e^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Es ist also die Spannung zwischen a und b

$$P_{ab} = -P_F \frac{e^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}} \tag{12}$$

oder wieder mit genügender Annäherung

$$P_{ab} = -\frac{P_F}{2}\left(\sin\frac{\alpha t}{2} + 1\right) \tag{12*}$$

oder bei Zeitzählung vom Funkenanfange aus

$$P_{ab} = +\frac{P_F}{2}\left(\cos\frac{\alpha t}{2} - 1\right).$$

In Bild 2* ist außer dem Verlaufe der Potentiale P_a, P_b, P_c und P_d auch der Verlauf der Spannungen P_{ab}, d. h. $P_a - P_b$ und von P_{cd} d. h. $P_c - P_d$ dargestellt.

IV. Spannungsverlauf und Gleitbüschelbildung.

Die Stoßspannung zwischen a und b kann man zur Erzeugung von Gleitbüscheln auf Glasplatten benutzen. Hierbei wurde früher[1]) gefunden, daß Gleitlänge und innerer Ausbau der Gleitbüschel, speziell deren Ruckstufenbildung vom Spannungsverlaufe, d. h. speziell von $(dP:dt)_{max}$ an den Gleitpolen abhängt. Erzeugte man nun einmal die Gleitbilder durch gedämpft harmonische Schwingungen, deren $(dP:dt)_{max}$ man kannte, dann mittels Stoßspannung, so ließ sich aus gleicher Ausbildung des Gleitbüschels auf gleiches $(dP:dt)_{max}$ schließen. Dieser Bestimmungsweg vom Gleitbilde über $(dP:dt)_{max}$ zur Funkenkonstanten k hat jedoch bisher wegen experimenteller Unsicherheit nur zu einer Bestätigung der Größenordnung von k geführt.

V. Zündfunken und Wanderwelle auf ∞ langen Antennen.

Die parallel gespannten Leitungsstücke c und d seien nicht sehr kurz und die Antennen aa′ und bb′ unendlich lang. Vom Funken F geht längs c über C_1 nach a ins Unendliche und längs d über C_2 nach b und ins Unendliche je eine Potentialwelle, deren Differenz die Spannungswelle zwischen den Paralleldrähten darstellt. Die Lauf- oder Wandergeschwindigkeit dieser Wellen sei c, sie ist[2]) auf hinreichend dicken nicht zu nahe gespannten Drähten gleich der Lichtgeschwindigkeit, d. h. gleich $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec.

Ist die Größe der beiden Metallbelege von C_1 bzw. C_2 genau gleich und endigen die Zuleitungen c bzw. d dicht gegenüber den Antennenanfängen a bzw. b[3]), so verliert die Potentialwelle von c nach a in C_1 genau $P_F/2$, ebensoviel gewinnt die Potentialwelle auf d nach b beim Hindurchgange durch C_2; im übrigen geht jede Potentialwelle ungeschwächt und unverzögert durch C_1 bzw. C_2 hindurch, also auch die Spannungswelle.

Bezeichnet man mit x den Abstand einer Stelle auf c oder a bzw. auf d oder b vom Funken F und zählt die Zeit von der Funkenmitte, so wird

$$\left.\begin{aligned} P_e &= \frac{P_F}{2}\frac{1}{1+e^{\alpha t}}; & P_c &= \frac{P_F}{2}\frac{1}{1+e^{\alpha(t-x/c)}}; & P_a &= -\frac{P_F}{2}\frac{e^{\alpha(t-x/c)}}{1+e^{\alpha(t-x/c)}} \\ P_f &= -P_e; & P_d &= -P_c; & P_b &= -P_a \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

also

$$P_{ef} = 2\,P_e; \qquad P_{cd} = 2\,P_c; \qquad P_{ab} = 2\,P_a$$

[1]) M. Toepler, Arch. . Elektrot. l. c. S. 167.

[2]) Vgl. z. B. auch Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen Kap. XVII, 374, S. 708.

[3]) Bei belegten Glasplatten als Kapazitäten läßt sich dies sehr nahe erreichen, bei tech. Kondensatoren, z. B. Meirowskys Papierkondensatoren, liegen Zu- und Ableitung oft sehr entfernt.

Es ist also die Spannung zwischen a und b

$$P_{ab} = -P_F \frac{e^{\alpha(t - x/c)}}{1 + e^{\alpha(t - x/c)}}. \tag{14}$$

Der experimentellen Messung leicht zugänglich ist an jeder Stelle x:

einmal der maximale Wert von (P_{cd} bzw.) P_{ab}, und zwar am einfachsten mittels einer Hilfsfunkenstrecke F' zwischen den Antennen am Orte x und demnach auch aus der Gesamtheit dieser Maximalwerte von P_{ab} als Funktion von x, d. h. aus der Einhüllenden der Spannungswerte längs x der Wert von $(dP_{ab}:dx)_{max}$ für jede Stelle x — Einhüllendenmethode,

zweitens der Maximalwert der Potentialdifferenz ΔP_{21} zwischen den Punkten $x_m + l$ und $x_m - l$ einer Antenne, z. B. der Antenne aa', indem man die Antenne bei x_m zu einer Schleife umbiegt und zwischen die einander genäherten Schleifenpunkte $x_m + l$ und $x_m - l$ eine Meßfunkenstrecke F_{21} einfügt (vgl. Bild 5); so ist für die Nachbarschaft ($\pm l$) jeder Stelle x_m der Wert $\Delta P_{21}:2l$ feststellbar — Schleifenmethode.

Aus Gleichung (14) erhält man für Einfüllendenmethode

$$(dP_{ab}:dx)_{max} = 0, \tag{15}$$

woraus bezüglich k nicht zu entnehmen ist.

Aus Gleichung (13) bei Schleife in Antenne aa' für Schleifenmethode

$$\Delta P_{21} = -\frac{P_F}{2} \frac{e^{\alpha\left(t - \frac{x_m + l}{c}\right)}}{1 + e^{\alpha\left(t - \frac{x_m + l}{c}\right)}} + \frac{P_F}{2} \frac{e^{\alpha\left(t - \frac{x_m - l}{c}\right)}}{1 + e^{\alpha\left(t - \frac{x_m - l}{c}\right)}} \tag{16}$$

eine Verschiebung des Anfangspunktes der Zeitzählung ändert natürlich nichts am Werte ΔP_{21}; setzt man

$$\tau = t - \frac{x_m}{c},$$

so erhält man

$$\Delta P_{21} = \frac{P_F}{2}\left[\frac{1}{1 + e^{-\alpha(\tau - l/c)}} - \frac{1}{1 + e^{-\alpha(\tau + l/c)}}\right]. \tag{16*}$$

Der durch F_{21} meßbare Maximalwert von ΔP_{21} wird für $\tau = 0$ erreicht, er ist

$$(\Delta P_{2e})_{max} = \frac{P_F}{2} \frac{1 - e^{2\alpha l/c}}{(1 + e^{\alpha l/c})^2} \tag{17}$$

für kurze Schleifen, d. h. für kleine Werte 2 l relativ zur Wanderwellenlänge λ gleich $c \cdot T$, ist schließlich

$$(\Delta P_{21})_{max} = -\frac{P_F \cdot \alpha}{8c} \cdot 2l = -\frac{P_F^2}{8cF} \cdot \frac{1}{k} \cdot 2l = -\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{max} \cdot 2l, \tag{18}$$

demnach ist k und $\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{max}$ aus Messungen in kleiner Schleife zu finden.

Aber nicht nur letzteres, sondern auch der Gesamtverlauf der Funkenspannung, d. h Gleichung (5) und Bild 1* sind experimentell durch Messung von ΔP_{21} für variierte Schleifenlänge feststellbar. Es ist nach Gleichung (17)

$$(\Delta P_{21})_{max} + \frac{P_F}{2} = P_F \frac{1}{1 + e^{\alpha l/c}}. \tag{19}$$

Die rechte Seite ist aber, wenn man für l/c den Wert t einsetzt, identisch mit Gleichung (5), also folgt, vgl. Bild 3: Trägt man die Schleifenspannung (Potentialdifferenz zwischen $x_m + l$ und $x_m - l$ auf Antenne aa') als Funktion von $\alpha l/c$ auf (Kurve pp') und addiert $P_{F/2}$, so erhält man den Spannungsverlauf (Kurve qq') im Zündfunken, wenn man als Abszissen statt $\alpha l/c$ die Werte t setzt; für negative Werte t ist qq' natürlich doppelspiegelbildlich zu ergänzen (Kurvenstück ss').

VI. Zündfunken und Wanderwelle auf langen (relativ zu $c \cdot T$) Antennen.

Die langen Antennen aa' bzw. bb' mögen vom Funken F aus gerechnet bei x_e ohne Endkapazität endigen.

Am Antennenende x_e findet Reflexion der Potentialwellen mit Spannungsbauch und Stromstärkenknoten statt ohne Verzerrung oder Verflachung der Welle. Die reflektierten unverzerrten Wellen superponieren sich den ankommenden, laufen ohne Gestaltsänderung aber mit Spannungssprung über C_1 bzw. C_2 hinweg und erreichen F, laufen durch F hindurch von ac nach db bzw. von bd nach ca weiter. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn man annimmt, jede Potentialwelle werde bei F mit Spannungsknoten und Strömungsbauch reflektiert. Diese bei F reflektierten Potentialwellen laufen wieder über C_1 bzw. C_2 in alter Weise hinweg, werden am Antennenende von aa' bzw. bb' erneut mit Spannungsbauch und Stromknoten reflektiert usw. Aus den Potentialwellen auf den Antennen ergibt sich die Spannungswelle zwischen ihnen.

Auch hier wieder kann mit der Einhüllendenmethode und der Schleifenmethode gemessen werden, nur ist zu berücksichtigen, daß die Meßfunkenstrecken jetzt nicht

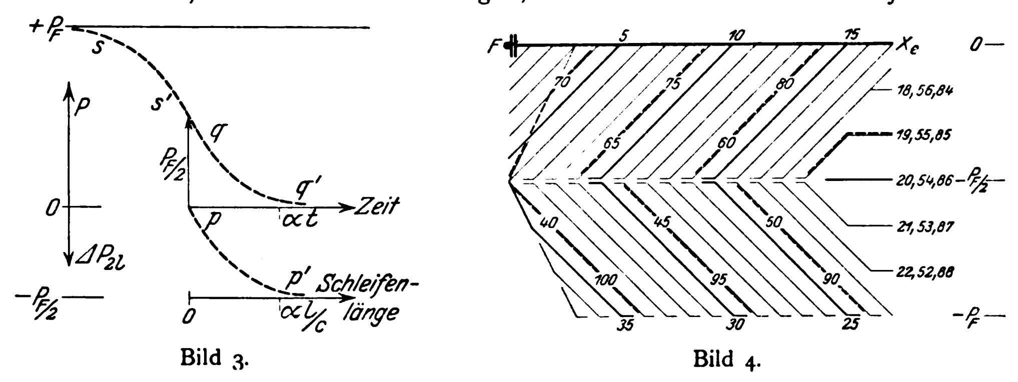


Bild 3. Bild 4.

unter dem Einflusse einer einzigen Wanderwelle, sondern dem der Superposition aller hin- und herlaufenden stehen. Das Ergebnis, soweit es für die Bestimmung von k wesentlich ist, kann man am bequemsten auch schon an den Reflexionen einer Wanderwelle konstanter Frontneigung ersehen, wie in Bild 4 dargestellt ist. Die Leitungslängen c und d sind hierbei verschwindend kurz angenommen, C_1 und C_2 fallen also mit F und dem Antennenanfange im Bilde zusammen. Dargestellt ist die Wanderwelle zwischen $x = 0$ und dem Antennenende $x = x_e$ zu verschiedenen Zeiten 1, 2, 3 . . . . . . 100; jede fünfte Position ist verstärkt gezeichnet.

Wie Bild 4 erkennen läßt, sind jetzt drei Antennengebiete von wesentlich verschiedenem Verhalten zu unterscheiden: I. Anfang, II. Mitte, III. Ende.

Für unsere Wanderwelle, d. h. Gleichung (14), ergeben die vielfachen Superpositionen folgendes:

1. Für die Einhüllendenmethode:

Die Gleichung der Einhüllenden ist

$$(P_{ab})_{max} = -2\, P_F \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}}{1 + e^{\frac{\alpha x}{c}}}. \tag{20}$$

Aus dieser Einhüllenden Gleichung (20) kann man ganz ähnlich wie aus Gleichung (17), vgl. Bild 3, zur Konstruktion von Bild 1*, d. h. zu Gleichung (5) gelangen.

Mißt man diese maximale Potentialdifferenz zwischen den Antennen an zwei verschiedenen Orten mit Lauflänge x und $x + \Delta x$ vom Funken aus und bildet die Differenz

$$\Delta P_{ab} = (P_{ab})_{x+\Delta x} - (P_{ab})_x,$$

so rechnet sich

$$\Delta P_{ab} = \Delta x \frac{2 P_F^2}{c F \cdot k} \frac{e^{\alpha x/c}\left[1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{\alpha \Delta x}{c}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\alpha \Delta x}{c}\right)^2 + \ldots\right]}{1 + e^{\alpha x/c} + e^{\alpha (x+\Delta x)/c} + e^{\alpha (2x+\Delta x)/c}} \tag{21}$$

hieraus schließlich

$$k = k' \cdot K, \tag{21a}$$

worin k' den experimentell bestimmbaren Näherungswert

$$k' = \frac{P_F^2}{2 c F} \frac{\Delta x}{\Delta P_{ab}}$$

bedeutet und K einen Korrektionsfaktor, welcher außer x, Δx und $c = 3 \cdot 10^{10}$ nur noch $\alpha = \frac{P_F}{k \cdot F}$ enthält; dieses α des Korrektionsgliedes kann man unbedenklich mit dem Näherungswerte $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ für k berechnen. Derart ist in den Messungstabellen VI—XII k' und k berechnet worden.

Für kleine Abstände Δx wird hieraus

$$d P_{ab} : dx = -\frac{2 P_F^2}{c \cdot F} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha x}{c}}}{(1 + e^{\alpha x/c})^2}. \tag{21*}$$

Im Gebiete I und speziell für den experimentell leider wegen C_1 und C_2 daselbst schwer zugänglichen, also nur extrapolierbaren Grenzort $x = 0$ hat man

$$\left(\frac{d P_{ab}}{d x}\right)_{x=0} = -\frac{P_F^2}{2 c F} \cdot \frac{1}{k} = \frac{2}{c}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{max} \tag{21**}$$

für die Neigung der Einhüllenden.

Dagegen wird auf II und III, d. h. für sehr große Werte x schließlich

$$\left(\frac{d P_{ab}}{d x}\right)_{x=\infty} = 0. \tag{22}$$

2. Für die Schleifenmethode:

Die Schleifenmessung ergibt stets den größten Wert der Spannung zwischen den Punkten $x_m + l$ und $x_m - l$ der gleichen Antenne, z. B. aa', gleichgültig ob dieser größte Wert der Einhüllenden oder der fortlaufenden Wanderwelle angehört! Demnach mißt die Schleifenmethode im Antennengebiete I nahe $x = 0$ die Neigung der Einhüllenden aller Potentialwellen auf a, also den Halbwert der Spannungsneigung nach Gleichung (21). Auf I nahe $x = 0$ ist demnach

$$\Delta P_{2l} = -\frac{P_F^2}{4 c F} \cdot \frac{1}{k} \cdot 2 l = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{max} \cdot 2 l. \tag{23}$$

Für größere Abstände x von F sinkt der Wert der Neigung der Einhüllenden unter den der Wanderwelle. Im Antennengebiete II und III mißt man also in der Schleife die maximale Neigung der hin- und herlaufenden Potentialwelle auf aa'. Man hat also auf II und III in der Schleife

$$\Delta P_{ab} = -\frac{P_F^2}{8 c F} \cdot \frac{1}{k} \cdot 2 l = -\frac{1}{2 c}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{max} \cdot 2 l. \tag{24}$$

Im Übergangsgebiete zwischen I und II, also um $\lambda/_4 = c \cdot T/_4$ herum, mißt man Zwischenwerte zwischen Gleichung (23) und Gleichung (24).

VII. Zündfunken und Wanderwelle auf kurzen (relativ zu c·T) Antennen.

Ist die Antennenlänge x_e kürzer als die halbe Wanderwellenlänge, dann fehlt Teil II von Bild 4 und Teil I und III schieben sich ineinander.

Die Einhüllende verläuft jetzt nur nahe an $x = 0$, wie vorangehend in Gleichung (20) angegeben, endigt hier also nach wie vor mit einer Neigung wie Gleichung (21**). Für größere x bleibt die Einhüllende jetzt im Vergleiche zu

Gleichung (20) zurück und endigt bei $x = x_e$ mit $dP_{ab}:dx = 0$, wie auch Beobachtungen ergaben [1]).

Die Schleifenmethode liefert außer nahe am Antennenende die Neigung der Einhüllenden, also nach Gleichung (23) wieder nahezu

$$k = -\frac{P_F^2}{4cF} \frac{2l}{\Delta P_{21}} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{max} \frac{2l}{\Delta P_{21}}. \quad (25)$$

Erst nahe am Antennenende sinkt diese Neigung unter die maximale der hin- und herwogenden Wanderwelle; hier wird dann diese in der Schleife gemessen, so daß

$$\Delta P_{21} = -\frac{P_F^2}{8cF} \cdot \frac{1}{k} \cdot 2l = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{max} \cdot 2l \quad (26)$$

auch am Antennenende nicht unterschritten wird.

Messungen von k.

Die Gültigkeit von Gleichung (1) vorausgesetzt, bieten die vorangehend entwickelten Beziehungen eine Reihe von Möglichkeiten, aus Wanderwellen die Funkenkonstante k experimentell zu bestimmen. Mit dem Nachweise, daß solche Bestimmungen für k wirklich immer den gleichen Wert ergeben, ist umgekehrt zugleich wieder die allgemeine Gültigkeit von Gleichung (1) auch für Funken im Raume bewiesen. Dabei werden natürlich mit der gleichen Anordnung bestimmte Werte jeweils einen viel schärferen Vergleich relativ untereinander und damit Nachweis der Konstanz von k ermöglichen, als er in den Absolutwerten verschiedener Meßgruppen experimentell zu erhalten ist.

A. Messungen mit der Schleifenmethode (Tabellen I—V).

Eine Gleichstromhochspannungsmaschine MM (vgl. Bild 5) lieferte Strom über die beiden großen Flüssigkeitswiderstände R_1 und R_2 (je etwa 10^6 Ohm). Verändert wurde von Tabelle zu Tabelle der Durchmesser der Messingkugeln des Zündfunkens F. Von F führten 40 cm lange 1 cm starke Messingrohre nach den Meirowsky-Papierkondensatoren C_1 bzw. C_2. Die Elektrodenkapazität, d. h. die für den Funken F sofort verfügbare Kapazität der Leitungen R_1 F C_1 bzw. R_2 F C_2 war auf höchstens je 200 cm zu schätzen.

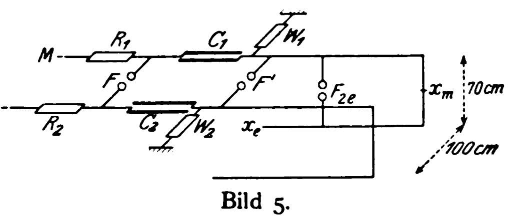


Bild 5.

C_1 und C_2 hatten je 3600 cm Kapazität, die Ladungen auf ihnen waren durch die Widerstände W_1 W_2 von etwa $5 \cdot 10^6$ Ohm am sofortigen Abfließen durch F verhindert. Die Meirowsky-Kondensatoren C_1 C_2 hatten 160 cm Abstand von Zu- und Ableitung, also war die Lauflänge bis zum Antennenanfange auf 200 cm zu schätzen. Die Antennen, je 850 cm lange, 2 cm starke Messingrohre, liefen in 100 cm gegenseitigem Abstande; x_e betrug also etwa 1050 cm. Zwischen beide Antennen, 50 cm von C_1 bzw. C_2 entfernt, war eine Kontrollfunkenstrecke F' mit 15-cm-Nickelkugeln querübergeschaltet. Die Schleifenmitte x_m lag 425 cm vom Antennenende x_e, also 625 cm vom Zündfunken F. Die Schleife, rechteckig gebogen, hatte 70 cm Schleifenbreite. Die Schleifenlänge 2l betrug 550 cm, reichte also von $x = 350$ cm bis $x = 900$ cm. Der Meßfunken F_{21} in der Schleife hatte Messingkugeln von 5 cm Durchmesser und wurde außer bei Tabelle V zur sicheren Vermeidung von Funkenverzug durch eine Bogenlampe belichtet. Die Messungen erfolgten derart, daß F_{21} stufenweise vergrößert wurde und jeweils die zu seinem Ansprechen nötige kleinste Zündfunkenlänge F gemessen wurde, worauf schließlich auch noch F' bis zum Ansprechen verkleinert wurde.

[1]) Vgl. M. Toepler ETZ 1924, S. 1048, Bild 7.

Die zu F_{2e} angegebenen Anfangsspannungen [d. h. also ΔP_{2l} der Gleichung (25)], ebenso die zu F gehörigen Anfangsspannungen P_F sind nach den Zusammenstellungen von O. Schumann[1]) interpoliert. Statt F' ist in den Tabellen das Verhältnis $P_{F'} : P_F$ angegeben.

Durch Tabelle I bis IV ist der experimentelle Nachweis geliefert, daß k weder von der Größe der Kugelelektroden des Zündfunkens noch, von dessen Länge abhängt. Die Abweichungen von der Konstanz bewegen sich fast alle innerhalb der

		Tabelle I. F zwischen 25-cm-∅-Kugeln; 2 l = 550 cm				Tabelle II. F zwischen 15-cm-∅-Kugeln; 2 l = 550 cm			
F_{2l} in cm	ΔP_{2l} in kV	F in cm	P_F in kV	$P_{F'}/P_F$	$k \cdot 10^3$	F in cm	P_F in kV	$P_{F'}/P_F$	$k \cdot 10^3$
0,2	8,14	0,85	27,6	1,11	0,506	0,95	30,4	1,10	0,549
0,3	11,33	1,35	42,5	1,25	0,593	1,60	50,0	1,06	0,632
0,4	14,44	1,75	53,5	1,21	0,518	2,00	60,0	1,14	0,569
0,5	17,64	2,40	71,3	1,16	0,548	—	—	—	—
0,6	20,80	3,05	88,0	1,15	0,579	3,45	97,0	1,15	0,623
0,7	23,92	4,15	117,0	1,13	0,632	—	—	—	—
0,8	26,70	4,85	134,5	1,12	0,639	5,10	186	1,17	0,622
0,9	29,63	6,10	164,5	1,11	0,686	—	—	—	—
1,0	32,40	6,70	178,0	1,14	0,668	7,05	175	1,07	0,615
1,1	35,20	7,25	190,0	1,11	0,648	—	—	—	—
1,2	37,90	8,45	214,0	1,06	0,654	8,10	193	1,11	0,557
1,4	44,00	—	—	—	—	8,70	202,5	1,16	0,492
					Mittel: $0{,}606_5$				Mittel: $0{,}582_8$

Tabelle III. F zwischen 10-cm-∅-Kugeln; 2 l = 550 cm				Tabelle IV. F zwischen 5-cm-∅-Kugeln; 2 l = 550 cm				Tabelle V. F zwischen 15-cm-∅-Kugeln; F_{2c} nicht belichtet; 2 l = 550			
F in cm	P_F in kV	$P_{F'}/P_F$	$k \cdot 10^3$	F in cm	P_F in kV	$P_{F'}/P_F$	$k \cdot 10^3$	F in cm	P_F in kV	$P_{F'}/P_F$	$k \cdot 10^3$
1,00	32,1	1,14	0,580	0,96	30,1	1,14	0,533	1,10	35,0	1,20	0,627
1,50	47,0	1,20	0,595	1,30	40,0	1,31	0,499	—	—	—	—
1,95	59,0	1,22	0,565	1,95	58,0	1,22	0,546	2,00	60,0	1,23	0,570
2,80	80,0	1,17	0,593	2,80	76,0	1,18	0,534	—	—	—	—
3,70	111,5	1,07	0,635	3,60	91,5	1,19	0,532	3,30	93,0	1,20	0,597
4,50	120,5	1,15	0,618	4,70	107,5	1,11	0,471	—	—	—	—
5,20	132,0	1,19	0,575	—	—	—	—	5,50	144,0	1,27	0,644
5,80	142,5	1,18	0,534	—	—	—	—	—	—	—	—
7,70	172,0	1,12	0,543	—	—	—	—	6,70	168,5	1,15	0,620
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	7,50	183,0	1,17	0,540
—	—	—	—	—	—	—	—	8,50	199,5	1,18	0,489
			Mittel: $0{,}582_0$				Mittel: $0{,}519_1$				Mittel: 0,5839

[1]) W. O. Schumann, „Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen", Tabelle I, S. 9. Alle Spannungsangaben in Tabelle I—V sind auf 76,0 cm Hg und 20° C bezogen, während die Messungen bei 72,8 cm Hg und 18° C und 38 % Luftfeuchte erfolgten; die Umkorrektion würde alle Werte von k um 3,6 % verkleinern.



Versuchsunsicherheiten, vielleicht daß k mit dem Verhältnisse (Länge des Zündfunkens : Durchmesser seiner Kugelelektroden) erst etwas ansteigt, dann etwas fällt; ersteres ließe sich aus dem Einflusse von Metalldämpfen der Elektroden bei kurzen Zündfunken erklären. Daß die Belichtung (vgl. Tabelle II mit V) ohne Einfluß ist, zeigt, daß der Verzug schon durch die Spannungswiederholung infolge der vielfachen Reflexion bei so kurzen Antennen beseitigt ist.

Die Tabellenangaben für k sind zwar relativ einwandfrei vergleichbar, um brauchbare Absolutwerte zu erhalten, sind aber noch gemeinschaftliche Korrektionen anzubringen. Abgesehen von der Korrektion (3,6% abzuziehen) wegen Luftdruck und Temperatur, ist die wechselseitige Wirkung von Hin- und Rückleitung in der Schleife zu berücksichtigen[1]). Beides korrigiert, erhält man für 72,8 cm Hg Druck und 18° C

$$k = 0{,}470 \cdot 10^{-3}$$

als wahrscheinlichsten Absolutwert.

B. Messungen mit der Einhüllendenmethode (Tabellen VI, VII und VIII).

Mit Anordnung Bild 2 ohne C_F, also Elektrodenkapazität von F weniger als 500 cm, wurden Wanderwellen erzeugt. Die Zuleitungen von F bis C_1 bzw. C_2 (Meirowsky-Papierkondensatoren von je 2700 cm) waren jetzt 90 cm lang, so daß die Lauflänge bis zum Antennenanfange 250 cm betrug. Die 2 cm starken Messingrohrantennen waren 1370 cm lang, x_e also 1620 cm. Für stufenweise vergrößertes F wurde jeweils an den Orten 12 cm, 100 cm, 325 cm, 535 cm und 1370 cm vom Antennenanfange, also für $x = 262$ cm, $x = 350$ cm, $x = 575$ cm usw. die Funkenstrecke F′ (Nickelkugeln 15 cm ∅) zwischen die in 1 m Abstand parallellaufenden Antennen querübergeschaltet. W am Antennenanfange etwa $5 \cdot 10^6 \Omega$.

Für jede Zündfunkenlänge F konnte aus dem in den Tabellen VI, VII und VIII angegebenen Schlagweiten F′ (Einhüllende!) mit Hilfe der zugehörigen Anfangsspannungen, wieder nach den Tabellen von W. O. Schumann interpoliert, zweimal die Konstante k berechnet werden; einmal aus F′ bei $x = 262$ cm und $x = 575$ cm, dann aus F′ bei $x = 350$ cm und $x = 785$ cm. Gerechnet wurde nach Gleichung (21), in den Tabellen ist, um die Größe der Korrektion zu zeigen, außer dem korrigierten Werte k auch der Näherungswert k′ nach Gleichung (21a) angegeben.

Bei Tabelle VII waren im Vergleich zur vorhergehenden bei F Kugeln von 5 cm ∅ und war F′ nur für $x = 350$ cm und $x = 750$ cm gemessen.

Bei Tabelle VIII war nur die Antennenlänge auf 465 cm, also x_e auf 715 cm verkürzt; F′ wurde bei $x = 262$ cm, $x = 350$ cm, $x = 575$ cm und $x = 714$ cm bestimmt, berechnet wurde hier k und k′ nur aus $x = 262$ und 575 cm, da ja F′-Werte zu nahe am Antennenende wenig brauchbar (zu klein) ausfallen (vgl. Abschnitt VII).

Auch so bestimmt zeigen die Werte von k wieder Unabhängigkeit von der Zündfunkenlänge, wobei besonders auf Tabelle VII hingewiesen sei.

Die Zuverlässigkeit der k-Werte, nicht relativ, sondern absolut, wird hier stark von der Unsicherheit, welche der lange Laufweg in den Mirowsky-Kondensatoren mit sich brachte, verringert, ganz abgesehen davon, daß hierdurch wohl auch eine wesentliche Wellenverflachung veranlaßt werden könnte. Bei den Messungen des nächsten Abschnittes[2]) wurden daher Glasplattenkondensatoren mit möglichst dicht einander gegenüberstehender Zu- und Ableitung verwandt, so daß die gesamte Lauflänge von F bis zu dem Antennenanfange auf beiderseits je 30 cm herabgedrückt war.

[1]) Vgl. die Messungen von L. Binder, ETZ 1917, H. 30, Bild 7.

[2]) Diese Messungen in Dresden wurden zum größten Teile aus Hilfsmitteln der Helmholtz-Gesellschaft ermöglicht, die Messungen zu Abschnitt A und B erfolgten im Versuchsfelde der Porzellanfabrik Hermsdorf i. Th.

Tabelle VI.

F zwischen 10-cm-∅-Messingkugeln; $x_e = 1620$ cm.

Luftdruck cm Hg Temperatur °C	73,1 13,0	73,1 13,5	73,1 13,5	73,1 13,2	73,0 18,0	aus Δx von 262–575		aus Δx von 350–785	
F in cm	F' in cm für x gleich 262 cm	350 cm	575 cm	785 cm	1620 cm	$k' \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$	$k' \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
1,0	1,10	1,08	(1,49)	1,39	1,53	(0,955)	(0,782)	0,785	0,541
2,0	2,02	2,13	2,60	2,79	3,39	0,526	0,443	0,733	0,534
4,0	3,82	4,10	4,90	5,43	6,97	0,601	0,518	0,684	0,530
6,0	5,63	6,34	7,32	8,15	11,23	0,555	0,491	0,747	0,601
8,0	7,23	7,76	9,30	10,44	15,58	0,596	0,542	0,639	0,544
10,0	8,12	8,49	10,30	11,58	19,19	0,622	0,580	0,648	0,559
12,5	9,37	9,73	12,20	13,50	22,10	0,534	0,503	0,761	0,675
							Mittel: $0{,}512_8$		Mittel: $0{,}569_1$

Tabelle VII.

F zwischen 5-cm-∅-Messingkugeln; $x_e = 1620$ cm.

Luftdruck cm Hg Temperatur °C	73,0 18°	73,0 18°	aus Δx von 350–750	
F in cm	F' in cm für x gleich 350 cm	750 cm	$k' \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
1,0	1,18	1,43	0,951	0,680
2,0	2,20	2,79	0,744	0,559
4,0	3,87	5,08	0,541	0,443
6,0	4,91	6,31	0,499	0,434
8,0	5,61	7,00	0,565	0,505
10,0	6,05	7,45	0,619	0,561
12,5	6,65	8,12	0,519	0,491
15,0	7,33	8,59	0,610	0,585
17,5	7,62	9,12	0,476	0,461
20,0	7,85	9,44	0,438	0,428
25,0	8,40	9,83	0,485	0,476
				Mittel: $0{,}511_2$

Tabelle VIII.

F zwischen 10-cm-∅-Messingkugeln; x_e nur 715 cm.

Luftdruck cm Hg Temperatur °C	73,1 16	73,1 14	73,1 18	73,1 18	aus Δx von 262–575	
F in cm	F' in cm für x gleich 262 cm	350 cm	575 cm	714 cm	$k' \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
1,0	1,23	1,35	1,51	1,53	0,650	0,533
2,0	2,20	2,41	2,70	2,85	0,708	0,596
4,0	4,00	4,36	4,96	5,04	0,645	0,557
6,0	5,90	6,59	7,46	7,85	0,608	0,536
8,0	7,09	8,05	9,18	10,25	0,578	0,525
10,0	7,75	8,90	9,93	10,73	0,589	0,541
12,5	9,00	10,00	11,40	12,2	0,595	0,560
						Mittel: $0{,}549_7$

C. Funkenkonstante k und entladene Kapazität (Tabellen IX bis XII).

Ohne C_F fließt bei Anordnung wie Bild 2 durch den Funken F zunächst nur

$$P_{F/2}\,[\delta c + 2\,\delta_F + \delta_a] = P_F \cdot C_0,$$

wobei δc den Kapazitätskoeffizienten der Leitung c allein, δ_F den Kapazitätskoeffizienten von F allein, δ_a den Kapazitätskoeffizienten der Antenne aa′ ohne C_1 bedeutet [1]). Dies ist bei kurzen Antennen und kurzen Leitungen F nach C_1 bzw. C_2 sehr wenig, C_0 ist also sehr klein, der Funken F sehr schwach. Diesem schwachen nur C_0 entladenden „Initialfunken" folgt dann etwas später erst und wieder durch den Schlagraum F hindurch das durch W gebremste langsame Abfließen der Ladungen von C_1 und C_2 und zwar in Form einer Aureole oder einer Reihe von Nachentladungen eventuell wieder in Funkenform. Nur für den „Initialfunken" ist Gültigkeit von Gleichung (5) ohne weiteres vorauszusetzen.

C_F verstärkt den die Wanderwelle veranlassenden Initialfunken bei F nur dann, wenn die Zuleitungen e und f zu C_F kurz sind. Bei langen Zuleitungen und bei langen Antennen entläd sich nach wie vor nur C_0 im Initialfunken, der Rest fließt als Aureole oder als Funkenreihe in F erst später nach, ganz wie dies wegen W die Ladungen von C_1 und C_2 ohnedies tun. Bei den Messungen zu nachstehenden Tabellen waren daher e bzw. f möglichst kurz, für 2800 cm Kapazität je 20 cm, bei 20000 cm und 40000 cm Kapazität je 40 cm lange 0,2 cm starke Messingstäbe, bei den noch größeren Kapazitäten waren die Zuleitungen zur fernstliegenden Teilkapazität bis zu 100 cm lang. Letzteres war nur möglich durch Anwendung von Schachtelbatterien mit ihrer kompendiösen Bauart [je 8 große Leydnerflaschen ineinander gestellt [2])].

Die Entladung der Kapazität C_F durch F hindurch gibt Schwingungen. Haben die Leitungen e bzw. f mit c bzw. d auch nur ein kurzes Stück gemeinsam, so wird ein Teil der Schwingungen auch den Wanderwellen superponiert. Man erhält dann viel flachere Kurven als Einhüllende längs der Antennen. Ja man kann so sogar die Einhüllende fast neigungslos, d. h. $dP_{ab}:dx$ fast zu null auf nicht zu langen Antennen (bis 7 m) machen! Um diesen verflachenden Einfluß möglichst auszuschalten, wurden bei den Messungen zu den Tabellen dieses Abschnittes die Zuleitungen C bzw. f beiderseits unmittelbar hinter den Elektrodenkugeln (6 cm ∅) von F senkrecht zu c bzw. d abgezweigt.

Im übrigen war bei den Tabellen dieses Abschnittes: M eine sechzigplattige Influenzmaschine; F zwischen 6-cm-∅-Messingkugeln; Lauflänge von F bis zum Antennenanfange beiderseits nur je 30 cm einschließlich C_1 und C_2; Antennendicke und -länge ist in den Tabellen angegeben, sie liefen in 40 cm Abstand parallel, 130 cm über dem Erdboden; F′ hatte 5-cm-∅-Messingkugeln. Gemessen wurde F′ an Orten 50 cm, 150 cm, 250 cm und 350 cm vom Antennenanfange, also für $x = 80$ cm, $x = 180$ cm usw. Die gesamte Lauflänge x_e (Antennenlänge + 30 cm) ist in den Tabellen angegeben,

Gerechnet wurde nach Gleichung (21), wieder sind außer k auch Werte k′ angegeben. Die zu F gehörige Spannung P_F, sowie zu F′ die Spannungen ΔP_{ab} wurden wieder aus den zitierten Tabellen für Anfangsspannungen von W. O. Schumann interpoliert.

Die k-Werte rechnen sich aus kleinen Differenzen von Schlagweiten F′, etwa aus 0,2—0,4 cm; da die Meßgenauigkeit für F′ nur ± 0,01 cm betrug, entsteht schon hieraus eine Unsicherheit bis zu ± 5 %. Ebenso groß dürfte die Gesamtsumme aller übrigen Meßunsicherheiten sein.

---

[1]) Alle übrigen Leiterteile des Vierleitersystems sind hierbei je auf dem Potentiale Null zu denken.

[2]) Vgl. Müller-Pouillet III, Fig. 188.

Tabelle IX. | **Tabelle X.**

	Tab. IX	Tab. X					
	F = 1,6 cm	F = 1,50 cm zwischen 6 cm-∅-Messingkugeln					
$C_1 = C_2$ in cm je	$5,6 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$5,6 \cdot 10^3$	$5,6 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$
Luftdruck cm Hg	75,0	75,1	74,9	74,9	75,1	75,1	75,1
Temperatur °C	20,0	19,8	21,1	21,1	19,8	19,8	19,8
F' in cm für							
x = 80 cm	1,69	1,46	1,50	1,67	1,61	1,63	1,61
x = 180 cm	1,87	1,61	1,72	1,84	1,79	1,81	1,74
x = 280 cm	2,05	1,76	1,88	2,08	2,07	2,07	1,99
x = 380 cm	2,27	2,01	1,97	2,21	2,18	2,22	2,13
x_e in cm	430	677	430	430	677	677	677
Antennendicke in cm	0,15	0,50	0,15	0,15	0,50	0,50	0,50
C_0 in cm	60	80	60	60	80	80	80
C_F in cm	$2,8 \cdot 10^3$	0	300	$2,8 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$
$k' \cdot 10^3$ aus Δx von 80—280	0,467	0,613	0,484	0,465	0,409	0,427	0,488
$k' \cdot 10^3$ „ Δx „ 180—380	0,537	0,479	0,743	0,527	0,493	0,473	0,488
$k \cdot 10^3$ „ Δx „ 80 280	0,448	0,587	0,464	0,445	0,392	0,410	0,469
$k \cdot 10^3$ „ Δx „ 180—380	0,494	0,441	0,686	0,487	0,455	0,436	0,449

$k \cdot 10^3$ = Mittel: 0,471 | Mittel: $0,476_5$

Tabelle XI. | **Tabelle XII.**

Tab. XI				Tab. XII						
F = 1,00 cm zwischen 6 cm-∅-Kugeln				F = 0,85 cm zwischen 6 cm ∅-Messingkugeln						
$5,6 \cdot 10^3$	$5,6 \cdot 10^3$	$5,6 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$
74,9	74,2	74,2	75,2	74,8	74,1	74,1	74,8	74,8	74,8	74,1
21,1	21,7	21,8	19,0	20,0	19,5	19,5	20,0	20,0	20,0	19,5
1,12	0,97	1,09	1,06	0,89	0,91	0,96	0,97	1,01	1,01	1,01
1,27	1,12	1,24	1,18	1,06	1,06	1,11	1,07	1,11	1,04	1,07
1,42	1,26	1,39	1,34	1,16	1,19	1,19	1,24	1,27	1,20	1,26
1,47	1,42	1,46	1,39	1,27	1,26	1,33	1,31	1,35	1,27	1,35
430	430	430	677	677	677	677	677	677	677	677
0,15	0,15	0,15	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
60	60	60	80	80	80	80	80	80	80	80
$2,8 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^3$	$11,2 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	0	0	$2,8 \cdot 10^3$	$20 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$120 \cdot 10^3$	$160 \cdot 10^3$
0,415	0,429	0,411	0,435	0,484	0,463	0,563	0,477	0,498	0,560	0,513
0,632	0,415	0,579	0,593	0,613	0,644	0,585	0,538	0,537	0,472	0,615
0,401	0,414	0,397	0,420	0,460	0,445	0,541	0,454	0,475	0,533	0,494
0,577	0,380	0,528	0,541	0,556	0,584	0,530	0,488	0,486	0,428	0,556

Mittel: $0,457_3$ | Mittel: $0,502_1$

Die gefundenen Werte von k lassen **völlige** Unabhängigkeit innerhalb **weitester** Grenzen von der entladenen Kapazität erkennen; z. B. in Tabelle XII werden Elektrizitätsmengen zwischen $0,75 \cdot 10^4$ und $1500 \cdot 10^{-4}$ statische Einheiten entladen. Damit ist rückwärts auch die Gültigkeit von Gleichung (1) und des Spannungsverlaufes nach Gleichung (5) innerhalb dieses Intervalls bewiesen.

Berücksichtigt man auch noch den durch Tabelle I—VI hinsichtlich Elektrodengröße und Funkenlänge nachgewiesenen großen Bereich der angenäherten Gültigkeit der Konstanz von k, so erscheint Gleichung (1) für Funkenbildung im Raume weitgehendst nachgewiesen.

Aus allen 36 Werten für k in den Tabellen IX—XII ergibt sich

$$k = 0,482 \cdot 10^{-3}$$

als Mittelwert und zugleich als zuverlässigster Absolutwert.



Über die Spannungs- und Stromverteilung in von Starkstromleitungen induktiv beeinflußten pupinisierten Kabeladern.

Von

H. W. Droste, Nürnberg.

Inhaltsübersicht.

1. Ziel der Arbeit.

Die bisher bekannt gewordenen Arbeiten über die Spannungs- und Stromverteilung in elektromagnetisch beeinflußten Leitungen[1]) beziehen sich ausschließlich auf homogene Kabeladern und Freileitungen. Bei der Bedeutung, die gerade das pupinisierte Kabel für den Fernmeldeverkehr über weite Entfernungen hat, scheint es nun nicht unwichtig zu sein, die Untersuchungen auf die pupinisierte Kabelader auszudehnen. Dieses Ziel hat die vorliegende Arbeit.

Auf ideal symmetrischen Spulenleitungen, bei denen lediglich die Stämme in der bekannten Weise[2]) pupinisiert sind, würde die durch induktive Beeinflussung erzeugte Spannungs- und Stromverteilung sich so ausbilden wie auf homogenen Leitungen. Denn die Induktivitäten der Stammspulen sind in diesem Falle unwirksam, weil die magnetischen Kraftflüsse, welche durch die in jedem Zweige der Doppelleitung in gleicher Richtung fließenden induzierten Ströme hervorgerufen werden, in dem gemeinsamen Spulenkern sich dann gegenseitig vollkommen aufheben.

In Wirklichkeit werden aber die Stammspulen immer einen Beitrag zur wirksamen Induktivität der Einzeladern beisteuern, der durch Unsymmetrie der Wicklungen und Verschiedenheit der Spulenströme in beiden Zweigen bedingt ist.

Bei Vorhandensein von Viererspulen verlaufen die auf die Beeinflussung zurückzuführenden elektrischen Vorgänge dagegen auch bei vollkommenster Symmetrie nach den Gesetzen für die Spulenleitung.

[1]) G. Krause und A. Zastrow, Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern Bd. 2, S. 422, 1922. — M. H. Pleijel in „Untersuchungen über Schwachstromstörungen bei Einphasen-Wechselstrombahnen“. Übersetzt von F. Kuntze, Berlin-München 1920.

[2]) A. Ebeling, ETZ 42, S. 874, 1924.



Es wird im II. Teil der Arbeit insbesondere auf die Einflüsse von Abweichungen der Leitungs- und Spulenwerte von den Regelwerten eingegangen werden, wie sie in den wirklich ausgeführten Pupinleitungen, selbst bei der Beobachtung sorgfältigster Fabrikation, immer auftreten.

Die Behandlung der pupinisierten Freileitung würde wesentlich komplizierter sein, da diese mit dem störenden System auch kapazitiv gekoppelt ist. Wir führen sie indessen nicht durch, weil die pupinisierte Freileitung sich in der Praxis nicht bewährt hat und deshalb kaum noch ausgeführt wird[1]. Die Frage ist mithin für die Entwicklung der modernen Fernmeldetechnik bedeutungslos geworden.

I. Teil.

Die Strom- und Spannungsverteilung in dem induktiv beeinflußten Pupinkabel aus gleichartigen Gliedern.

2. Die Spannungs- und Stromgleichungen für ein einzelnes elektromagnetisch beeinflußtes Spulenfeld.

Die Überlegungen gelten zunächst nur für die pupinisierte Einzelader; die angegebenen Spannungen beziehen sich daher „auf Erde". Wir betonen ausdrücklich, daß alle im folgenden vorkommenden elektrischen Werte der behandelten Leitungen, sowie Fortpflanzungsgröße, Wellenwiderstand usw. diejenigen der Einzelader sind und sich nicht, wie es meist gebräuchlich ist, auf die Doppelleitung beziehen. Wir müßten sie deshalb eigentlich mit einem darauf hinweisenden Index versehen. Der Einfachheit halber lassen wir diesen jedoch im allgemeinen fort und begnügen uns mit dieser Bemerkung.

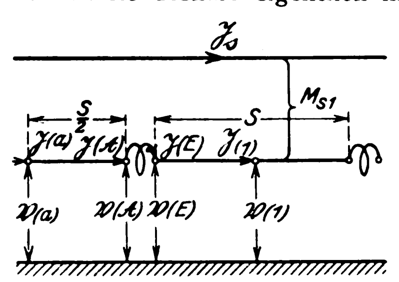


Bild 1. Elektromagnetisch beeinflußtes Spulenfeld.

Das Spulenfeld möge mit dem halben Spulenabstand als „Anlauflänge" beginnen. Die Spannung $\mathfrak{V}(1)$ und der Strom $\mathfrak{J}(1)$ seien in der Mitte des die 1. mit der 2. Spule verbindenden Leitungsstückes vorhanden (Bild 1), allgemein: der Strom $\mathfrak{J}(\mu)$ und die Spannung $\mathfrak{V}(\mu)$ in einem Punkte wirksam, der um den halben Spulenabstand von der μ-ten Spule entfernt ist.

Wir nehmen an, daß ein einphasiger Störstrom auf unser System wirkt. Die so erhaltenen Gleichungen lassen sich dann durch Superposition auf die Form bringen, die sie bei der Beeinflussung durch mehrphasige Ströme erhalten müssen.

Die Beziehungen zwischen $\mathfrak{V}(1)$ und $\mathfrak{J}(1)$ hinter der „Abschlußlänge" des 1. Feldes und den Werten am Anfang der Leitung ergeben sich bei eingeschwungenen, erzwungenen Sinusschwingungen unter Benutzung der komplexen Rechnungsweise folgendermaßen:

Für die induktiv beeinflußte „Anlauflänge" gelten bekanntlich[2] die Gleichungen:

$$\mathfrak{V}(A) = \mathfrak{V}(a) \cdot \operatorname{Cof} \gamma s/2 - \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{J}'(a) \cdot \operatorname{Sin} \gamma s/2. \tag{1a}$$

$$\mathfrak{J}'(A) = \mathfrak{J}'(a) \cdot \operatorname{Cof} \gamma s/2 - \frac{\mathfrak{V}(a)}{\mathfrak{Z}} \cdot \operatorname{Sin} \gamma s/2. \tag{1b}$$

Für die Abschlußlänge ist entsprechend:

$$\mathfrak{V}(1) = \mathfrak{V}(E) \cdot \operatorname{Cof} \gamma s/2 - \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{J}'(A) \cdot \operatorname{Sin} \gamma s/2. \tag{2a}$$

$$\mathfrak{J}'(1) = \mathfrak{J}'(A) \cdot \operatorname{Cof} \gamma s/2 - \frac{\mathfrak{V}(E)}{\mathfrak{Z}} \cdot \operatorname{Sin} \gamma s/2, \tag{2b}$$

[1] Vgl. Die Beschlüsse der alleuropäischen Fernsprechkonferenz in Paris (28. IV. bis 3. V. 1924). Das Fernkabel, H. 6, S. 9, 1924.

[2] Vgl. G. Krause und A. Zastrow, l. c.

da

$$\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{J}(E)$$

ist.

Dabei ist:

$$\mathfrak{J}'(x) = \mathfrak{J}(x) + \bar{k} \cdot \mathfrak{J}_s, \tag{3}$$

$$k = j\omega \frac{M_{s1} - k_m \cdot M_{m1}}{R + j\omega L}, \tag{4}$$

s der Spulenabstand in km,
$j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit,
$\mathfrak{J}_s$ der Störstrom, etwa der Fahrstrom einer elektrischen Lokomotive,
$\omega = 2\pi n$ die Kreisfrequenz,
M_{s1} die Gegeninduktivität zwischen Störkreis und Kabeladerstromkreis in H/km,
M_{m1} die Gegeninduktivität zwischen Kabelmantel- und Kabeladerstromkreis in H/km,
R der Wirkwiderstand der Kabelader in Ω/km,
L die Selbstinduktivität des Aderstromkreises in H/km,

$$k_m = j\omega \frac{M_{sm}}{R_m + j\omega L_m}, \tag{5}$$

M_{sm} die Gegeninduktivität zwischen Störstromkreis und Mantelstromkreis in H/km,
R_m der Wirkwiderstand des Kabelmantels in Ω/km,
L_m die Selbstinduktivität des Mantelstromkreises in H/km,

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \sqrt{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{g}} = \beta + j\alpha \text{ die Fortpflanzungsgröße,} \tag{6}$$

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}}} \text{ der Wellenwiderstand,} \tag{7}$$

β die Dämpfung,
α das Winkelmaß,
$\mathfrak{r} = R + j\omega L$ der Operator der Längsimpedanz der Leitung,
$\mathfrak{g} = G + j\omega C$ der Leitwertsoperator der Leitung,
G die Ableitung in μS/km,
C die Kapazität der Einzelader gegen Erde in μF/km,

$\bar{k}$ nimmt die in (4) angegebene Form an, wenn man berücksichtigt, daß die ebenfalls in dem Mantel des Schwachstromkabels induzierten Ströme ihrerseits wieder in dem Aderstromkreis eine Spannung hervorrufen[1]). Es findet sich in Gleichung (11) der oben zitierten Arbeit von G. Krause und A. Zastrow ein unserem $\bar{k}$ entsprechender Ausdruck.

Der Spannungsabfall an der eingeschalteten Spule beträgt:

$$\mathfrak{V}(A) - \mathfrak{V}(E) = \mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{J}(A), \tag{8}$$

wobei

$$\mathfrak{R}_0 = R_0 + j\omega L_0$$

der Scheinwiderstand der Spule ist.

Mit den Gleichungen (1), (2) und (8) wird:

$$\mathfrak{V}(1) = \mathfrak{V}(a)\left(\mathfrak{Cof}\,\gamma s + \frac{\mathfrak{R}_0}{2\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s\right) -$$
$$- \mathfrak{J}'(a) \cdot (\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s + \mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{Cof}^2 \gamma s/2) + \bar{k} \cdot \mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{J}_s \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2 \tag{9a}$$

und

[1]) Die Rückwirkung der Aderströme auf den Kabelmantelstrom und des Mantelstromes auf den störenden Starkstrom hat dabei keine Berücksichtigung gefunden.

$$\mathfrak{J}'(1) = \mathfrak{J}'(a) \cdot \left(\mathfrak{Cos}\,\gamma s + \frac{\mathfrak{R}_0}{2\,\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s\right) -$$

$$- \mathfrak{V}(a) \cdot \left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}{\mathfrak{Z}} + \mathfrak{R}_0 \cdot \frac{\mathfrak{Sin}^2\,\gamma s/2}{\mathfrak{Z}^2}\right) - k \cdot \mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma s/2}{\mathfrak{Z}}. \tag{9b}$$

Die Faktoren von $\mathfrak{V}(a)$ und $\mathfrak{J}'(a)$ in diesen beiden Gleichungen sind genau dieselben, die sich bei der Berechnung der nicht beeinflußten Pupinleitung ergeben [1]).

Da γs so klein ist, daß man bei der Entwicklung der hyperbolischen Funktionen in unendliche Reihen mit guter Annäherung

$$\mathfrak{Sin}\,\gamma s \approx \gamma s$$

und

$$\mathfrak{Cos}\,\gamma s \approx 1 + \frac{(\gamma s)^2}{2}$$

setzen darf, erhält man für den Faktor von $\mathfrak{V}(a)$ in Gleichung (9a)

$$\mathfrak{Cos}\,\gamma s + \frac{\mathfrak{R}_0}{2\,\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s = 1 + \frac{(\gamma s)^2}{2} + \frac{\mathfrak{R}_0}{2}\,g\,s = 1 + \frac{s^2}{2} \cdot \left(\mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{R}_0}{s}\right) \cdot g.$$

Es ist nun gebräuchlich, die Wellenkonstante für die Pupinleitung γ so zu definieren, daß man

$$\mathfrak{Cos}\,\gamma s + \frac{\mathfrak{R}_0}{2\,\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s = 1 + \frac{s^2}{2} \cdot \bar{\mathfrak{r}} \cdot g = \mathfrak{Cos}\,\gamma s \tag{10}$$

setzt, wobei zur Abkürzung $\mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{R}_0}{s} = \bar{\mathfrak{r}}$ geschrieben ist.

Da nach dieser Definition für das Produkt der übrigen Klammerausdrücke in (9a) und (9b) sich

$$(\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s + \mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{Cos}^2\,\gamma s/2) \cdot \left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}{\mathfrak{Z}} + \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{Z}^2} \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\gamma s/2\right) = \mathfrak{Sin}^2\,\gamma s$$

ergibt, anderseits der Wellenwiderstand der Pupinleitung mit (9a) und (9b) (vgl. Breisig l. c. S. 345):

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{V}(1)}{\mathfrak{J}(1)}\right)_{\mathfrak{J}(a)=0} \cdot \left(\frac{\mathfrak{V}(1)}{\mathfrak{J}(1)}\right)_{\mathfrak{V}(a)=0}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s + \mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{Cos}^2\,\gamma s/2}{\frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}{\mathfrak{Z}} + \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{Z}^2} \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\gamma s/2}}$$

ist, kann

$$\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s + \mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{Cos}^2\,\gamma s/2 = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s \approx \bar{\mathfrak{r}} \cdot s \tag{11}$$

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}{\mathfrak{Z}} + \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{Z}^2} \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\gamma s/2 = \frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}{\mathfrak{Z}} \approx g \cdot s \cdot \mathfrak{Cos}^2\,\gamma s/2 \tag{12}$$

und mithin näherungsweise:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\bar{\mathfrak{r}}}{g}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\gamma s/2} \tag{13}$$

gesetzt werden [2]).

Um nun noch die Faktoren von $k \cdot \mathfrak{J}_s$ in (9a) und (9b) durch die in (10) und (13) eingeführten Spulenleitungsgrößen ausdrücken zu können, setzen wir $\mathfrak{Cos}\,\gamma s/2 \approx 1$ und $\mathfrak{Sin}\,\gamma s/2 \approx \gamma s/2$.

Mit Gleichung (12) wird dann:

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma s/2}{\mathfrak{Z}} \approx g\,s/2 = \frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2}{\mathfrak{Z}} = \frac{\mathfrak{Cos}\,\gamma s - 1}{\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s}. \tag{14}$$

[1]) Vgl. z. B. A. Campbell, Phil. Mag. Ser. 6, 5, S. 313, 1903 oder F. Breisig, Theoretische Telegraphie, Braunschweig 1924, S. 378.

[2]) M. J. Pupin, Trans. American. Inst. El. Eng. 16, S. 245, 1900; S. P. Thompson, ETZ 1893, S. 601.

Die Spannungs-Gleichung für ein beeinflußtes Spulenfeld lautet mithin:

$$\mathfrak{V}(1) = \mathfrak{V}(a) \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma s - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(a) \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s + k \cdot \mathfrak{J}_s \cdot (\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s),$$

wenn man gleichzeitig wieder

$$\mathfrak{J}'(a) = \mathfrak{J}(a) + \bar{k} \cdot \mathfrak{J}_s$$

setzt. Da nach (13)

$$\bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s = \left(\frac{\mathfrak{R}_0}{s} + \mathfrak{r}\right) \cdot s$$

ist, erhält man schließlich:

$$\mathfrak{V}(1) = \mathfrak{V}(a) \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma s - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(a) \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s - \bar{k} \cdot \mathfrak{J}_s \cdot s\,\mathfrak{r} \tag{15a}$$

und entsprechend:

$$\mathfrak{J}(1) = \mathfrak{J}(a) \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma s - \frac{\mathfrak{V}(a)}{\bar{\mathfrak{Z}}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s + k \cdot \mathfrak{J}_s \cdot s\,\mathfrak{r} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\,\gamma s - 1}{\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s}. \tag{15b}$$

3. Der Kopplungsfaktor.

Die Gleichungen (15a) und (15b) gehen in die bekannten Gleichungen für das nicht beeinflußte Feld über, wenn

$$k = 0$$

ist. Wie man aus Gleichung (4) ersieht, tritt dieser Fall ein, wenn

$$M_{s1} = k_m \cdot M_{m1} = j\,\omega \frac{M_{sm} \cdot M_{m1}}{R_m + j\,\omega L_m} \tag{16}$$

ist. Nun ist natürlich in Wirklichkeit immer: $M_{s1} \approx M_{sm}$. Daher ist die Bedingung (16) erfüllt, wenn einerseits

$$R_m = 0 \tag{17a}$$

anderseits

$$L_m = M_{m1}. \tag{17b}$$

Es lassen sich bei Berücksichtigung dieser Bedingungen, wie die Erfahrung gelehrt hat, Kabel bauen, bei denen die Kompensation der in einer Ader induzierten EMK. durch den Mantelstrom ganz beträchtlich ist. So betrug in einem an einer elektrisierten Bahnstrecke in Schlesien verlegten 5 km langen Versuchskabel der Firma Siemens u. Halske, das über einer normalen Seele zur Verminderung von R_m 63 blanke Kupferdrähte von 1 mm Durchmesser hatte, die induzierte EMK. statt 10 Volt/100 A km nur 2 Volt/100 A km[1]).

Ist die Gleichung (17a) nicht angenähert erfüllt, so läßt sich der Ausdruck (4) für $\bar{k}$ auf eine übersichtliche Form auf Grund folgender Überlegungen bringen:

Zunächst ist, wie schon oben bemerkt, mit größter Annäherung $M_{s1} \approx M_{sm}$, so daß

$$\bar{k} = j\,\omega \frac{M_{s1} \cdot [R_m + j\,\omega (L_m - M_{m1})]}{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_m}$$

wird, wobei wir

$$R_m + j\,\omega L_m = \mathfrak{r}_m$$

gesetzt haben[2]).

Außerdem ist in Wirklichkeit auch immer $L_m \approx M_{m1}$[3]), also

$$\bar{k} = j\,\omega \frac{M_{s1} \cdot R_m}{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}_m} = \frac{K}{\mathfrak{r}}. \tag{18}$$

[1]) Vgl. P. Jäger, ETZ 45, S. 422, 1924 oder F. Lüschen, Das Fernkabel, Heft 6, S. 26, 1924.

[2]) Diese Überlegungen gelten streng nur für Kabel ohne ausgezeichnete Eisenbewehrung (Bleikabel, Kabel mit Flachdrahtarmierung). Bei Vorhandensein einer wirksamen Eisenarmierung (Bandeisenarmierung) sind sie nur angenähert richtig, weil dann die Eisenverluste durch Hysterese und Wirbelströme berücksichtigt werden müssen.

[3]) G. Krause und A. Zastrow, l. c. S. 428.

Wir wollen den Ausdruck

$$K = j\,\omega\, M_{s\,1} \cdot \frac{R_m}{r_m} = \omega\, M_{s\,1} \cdot \frac{R_m}{\sqrt{R_m^2 + \omega^2 \cdot L_m^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \omega \frac{L_m}{R_m}\right)} \tag{19}$$

„Kopplungsfaktor“ nennen.

In dieser Darstellung ist der Kopplungsfaktor unabhängig von den Eigenschaften der Kabelader; er besitzt daher für pupinisierte und homogene Kabel dieselbe Größe.

Es ist von Interesse, die Abhängigkeit des Kopplungsfaktors K von der Frequenz zu untersuchen. Wir legen dabei der Berechnung die Erfahrungswerte für einige Kabeltypen:

$$R_m = 1\,\Omega/\text{km}$$

und

$$L_m = 5 \cdot 10^{-3}\,\text{H/km}$$

zugrunde.

Die berechneten Werte enthält die folgende Tabelle I, ihre Abhängigkeit von der Frequenz veranschaulicht Kurvenbild 2.

Tabelle 1.

Abhängigkeit von $\left|\frac{K}{M_{s_1}}\right|$ von der Frequenz:

$\omega = 2\pi n$	$\left\|\frac{K}{M_{s_1}}\right\|$	$\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \omega \frac{L_m}{R_m}$	ω	$\left\|\frac{K}{M_{s_1}}\right\|$	$\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \omega \frac{L_m}{R_m}$
100	89,45	63° 16′	3 000	199,55	3° 49′
200	141,42	45°	4 000	199,78	2° 52′
400	178,90	26° 34′	5 000	199,85	2° 17′
600	189,75	18° 25′	6 000	199,92	1° 55′
800	194,05	14°	7 000	199,93	1° 38′
1 000	196,10	11° 18′	8 000	199,94	1° 26′
1 200	197,30	9° 27′	9 000	199,95	1° 16′
1 400	197,97	8° 8′	10 000	199,96	1° 9′
1 600	198,45	7° 7′	11 000	199,98	1° 3′
1 800	198,80	6° 20′	12 000	200,00	57′
2 000	198,99	5° 42′	13 000	200,00	53′
2 500	199,35	4° 34′	14 000	200,00	49′
			15 000	200,00	46′

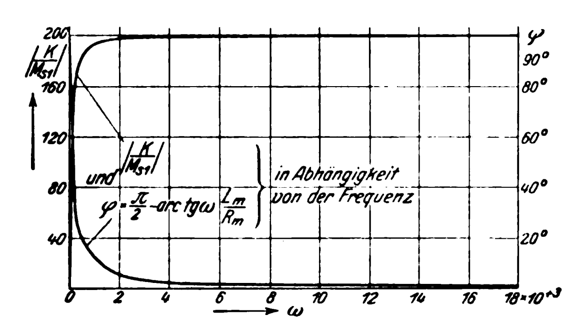


Bild 2. Der Kopplungsfaktor in Abhängigkeit von der Frequenz.

Man sieht, daß man für Kreisfrequenzen, die $\geqq 2000$ sind, R_m gegen $\omega\, L_m$ vernachlässigen kann und für den „Kopplungsfaktor“ den Näherungsausdruck

$$K = M_{s1} \cdot \frac{R_m}{L_m} \tag{20}$$

erhält, der scheinbar unabhängig von der Frequenz ist. In Wirklichkeit hängt aber auch M_{s1}, R_m und L_m von ω ab. Näheren Aufschluß darüber vermitteln die Untersuchungen von Prof. Lindström[1]) und M. H. Pleijel[2]). Pleijel berücksichtigt insbesondere den Skineffekt.

In diesem Zusammenhang ist es angebracht, auf die Frequenz der Störströme einzugehen.

Die Grundschwingung beträgt gewöhnlich für einphasige Bahnanlagen $\omega = 104{,}6$ ($n = 16^2/_3$ Hertz), seltener $\omega = 314$ ($n = 50$ Hertz). Außerdem besitzen die Störströme aber noch eine Reihe auf Generator, Transformator und Lokomotiv-Motor zurückzuführender ausgeprägter Oberschwingungen, die sich im Fernsprechverkehr deswegen besonders störend bemerkbar machen, weil sie im Gegensatz zu den Grundschwingungen in den Bereich gut hörbarer Frequenzen hineinfallen. Während die vom Generator und Transformator herrührenden Oberschwingungen frequenzunabhängig sind, ändern sich die störenden Harmonischen des Lokomotiv-Motors mit der Geschwindigkeit[3]). Beim Umlauf des Rotors treten nämlich „magnetische Harmonische“, die durch Variation des magnetischen Widerstandes bedingt sind, und „Kommutierharmonische“ („Kollektoroberschwingungen“) infolge der Stromwendung und Induktionswirkung der kurzgeschlossenen Spulen auf[4]). Durch geeignete Konstruktionsmaßnahmen können die „magnetischen“ Harmonischen weitgehend beseitigt werden, so daß die Kollektoroberschwingungen meistens die störenderen sind. Beim Anfahren einer elektrischen Lokomotive durchläuft die Frequenz des Störstromes einen Bereich, der bei der Grundschwingung beginnt und etwa bis zu einer Kreisfrequenz von 15000 hinaufreicht, also umfassender ist als der Frequenzbereich, für den man gewöhnlich Fernmeldeprobleme zu diskutieren pflegt.

4. Die Strom- und Spannungsgleichungen für das induktiv beeinflußte Pupinkabel aus n gleichartigen Gliedern.

Um die Leitungsgleichungen für das aus n gleichartigen Gliedern bestehende Pupinkabel ableiten zu können, bringt man die Gleichungen (15a) und (15b) am besten auf die Form:

$$\mathfrak{V}(n) = \mathfrak{V}(n-1) \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{J}^*(n-1) \cdot \mathfrak{B} \tag{21a}$$

$$\mathfrak{J}^*(n) = \mathfrak{J}^*(n-1) \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{V}(n-1) \cdot \mathfrak{C}, \tag{21b}$$

wobei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s \tag{22a}$$

$$\mathfrak{B} = -\bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s \tag{22b}$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s}{\bar{\mathfrak{Z}}} \tag{22c}$$

und

$$\mathfrak{J}^*(n) = \mathfrak{J}(n) + \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s} \tag{22d}$$

---

[1]) Zeitschrift der Asea 1922, S. 179.
[2]) Teknisk Tidskrift (Elektroteknik 9) 1922, S. 109.
[3]) P. Jäger, l. c. S. 426.
[4]) Vgl. R. Liljeblad, Teknisk Tidskrift 1923, S. 164 oder Referat in ETZ 45, S. 754, 1924.

ist. Für dieses System linearer Differenzen-Gleichungen machen wir die Ansätze:

$$\mathfrak{B}(n) = A \cdot e^{n\Gamma} \tag{23a}$$

$$\mathfrak{J}^*(n) = B \cdot e^{n\Gamma}, \tag{23b}$$

mit denen (21a) und (21b) zu

$$A \cdot e^{\Gamma} = \mathfrak{A} \cdot A + \mathfrak{B} \cdot B$$

und

$$B \cdot e^{\Gamma} = \mathfrak{A} \cdot B + \mathfrak{C} \cdot A$$

werden. Daraus erhält man

$$\frac{A}{B} = \frac{\mathfrak{B}}{e^{\Gamma} - \mathfrak{A}} = \frac{e^{\Gamma} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \tag{24}$$

oder

$$e^{2\Gamma} - 2\mathfrak{A} \cdot e^{\Gamma} + \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = 0. \tag{25}$$

Nun ist aber nach den Definitionsgleichungen (22a—22c):

$$\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = 1.$$

Aus der Gleichung

$$e^{\Gamma} = \mathfrak{A} \pm \sqrt{\mathfrak{A}^2 - 1} = \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s \pm \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s$$

ergeben sich zwei entgegengesetzt gleiche Lösungen für Γ, nämlich

$$\Gamma_1 = +\bar{\gamma} s$$

und

$$\Gamma_2 = -\bar{\gamma} s.$$

Auf Grund der beiden Lösungen zerfällt Gleichung (24) in

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{\mathfrak{B}}{e^{+\bar{\gamma} s} - \mathfrak{A}} = \frac{e^{+\bar{\gamma} s} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = -\bar{\mathfrak{Z}} \tag{26a}$$

und

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{\mathfrak{B}}{e^{-\bar{\gamma} s} - \mathfrak{A}} = \frac{e^{-\bar{\gamma} s} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = +\bar{\mathfrak{Z}}. \tag{26b}$$

Da unsere Ausgangsgleichungen linear sind, setzt sich ihre allgemeinste Lösung als Summe der Partiallösungen zusammen:

$$\mathfrak{B}(n) = A_1 \cdot e^{+n\bar{\gamma} s} + A_2 \cdot e^{-n\bar{\gamma} s} \tag{27a}$$

$$\mathfrak{J}^*(n) = B_1 \cdot e^{+n\bar{\gamma} s} + B_2 \cdot e^{-n\bar{\gamma} s} = -\frac{A_1}{\bar{\mathfrak{Z}}} \cdot e^{+n\bar{\gamma} s} + \frac{A_2}{\bar{\mathfrak{Z}}} \cdot e^{-n\bar{\gamma} s}. \tag{27b}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir mit $n = 0$ als Werte am Anfang:

$$\mathfrak{B}(a) = A_1 + A_2 \tag{28a}$$

und

$$\bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}^*(a) = -A_1 + A_2. \tag{28b}$$

Wir sind nunmehr in der Lage, die Koeffizienten A_1, A_2, B_1 und B_2 in (27a) und (27b) durch die Anfangswerte auszudrücken:

$$A_1 = \frac{\mathfrak{B}(a)}{2} - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \frac{\mathfrak{J}^*(a)}{2}$$

$$A_2 = \frac{\mathfrak{B}(a)}{2} + \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \frac{\mathfrak{J}^*(a)}{2}$$

$$B_1 = -\frac{\mathfrak{B}(a)}{2\,\mathfrak{Z}} + \frac{\mathfrak{J}^*(a)}{2}$$

$$B_2 = +\frac{\mathfrak{B}(a)}{2\,\mathfrak{Z}} + \frac{\mathfrak{J}^*(a)}{2}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung (27a) und (27b) ein, so erhält man als Lösung für die n-gliedrige Pupinleitung:

$$\mathfrak{B}(n) = \mathfrak{B}(a) \cdot \mathfrak{Cos}\, n\bar{\gamma} s - \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{J}(a) \cdot \mathfrak{Sin}\, n\gamma s - K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, n\gamma s}{\mathfrak{Sin}\, \gamma s} \tag{29a}$$

$$\mathfrak{J}(n) = \mathfrak{J}(a) \cdot \mathfrak{Cos}\, n\bar{\gamma} s - \frac{\mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\, n\bar{\gamma} s + K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, n\bar{\gamma} s - 1}{\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\, \gamma s}. \tag{29b}$$

5. Die am Anfang einer elektromagnetisch beeinflußten aus n gleichartigen Gliedern bestehenden pupinisierten Doppelleitung induzierte EMK.

Von größter Bedeutung ist die Kenntnis der am Anfang einer elektromagnetisch beeinflußten Doppelleitung induzierten Spannung, weil man durch Vergleich mit der am Anfang eingeschalteten Nutz-Betriebsspannung sich dann leicht ein Bild von der Größe der Störung machen kann. Die in einer Kabeldoppelleitung induzierte EMK ergibt sich auch für die Pupinleitung, genau so wie bei der homogenen Kabelleitung[1]), als Differenz der in jedem isolierten Zweig am Anfang gegen Erde bestehenden Potentialdifferenz.

Die Potentialdifferenz gegen Erde erhält man aus Gleichung (29b) mit den Randwerten:

$$\mathfrak{J}(a) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{J}(n) = 0.$$

Sie beträgt:

$$\mathfrak{B}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\, \gamma s} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, n\gamma s - 1}{\mathfrak{Sin}\, n\gamma s} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\, \gamma s} \cdot \mathfrak{Tg}\, \frac{n}{2}\gamma s. \tag{30}$$

Für lange Leitungen und solche von großer Dämpfung erreicht dieser Ausdruck einen Grenzwert, der nicht mehr von der Länge $n \cdot s$ der Leitung abhängt; denn mit $|n\bar{\gamma} s|$ bzw. $n\beta s > 5$ ist näherungsweise

$$\mathfrak{Tg}\, \frac{n}{2}\gamma s \approx 1,$$

so daß dann

$$\mathfrak{B}(a)_{10} = K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, \gamma s} \tag{30a}$$

wird.

Wir wollen die Abhängigkeit der Gleichung (30) von der Frequenz untersuchen.

Für alle Frequenzen, für die

$$\mathfrak{Sin}\, n\bar{\gamma} s = 0$$

ist, nimmt $\mathfrak{B}(a)_{10}$ ausgezeichnete Werte an. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$n\bar{\gamma} s = j k \pi$$

d. h. die Dämpfung $= 0$ und

$$n\bar{\alpha} s = k \cdot \pi$$

ist, wobei $k = 1, 2, 3 \ldots n$ sei. ($k = 0$ entspricht einem Gleichstrom.)

Die Beziehung zwischen Winkelmaß und Frequenz vermittelt die bekannte Gleichung[2])

[1]) Vgl. K. Küpfmüller, ETZ 44, S. 452, 1923.
[2]) Vgl. F. Breisig, Theoret. Telegraphie, Braunschweig 1924, S. 387.



$$\sin\frac{\bar{\alpha}\,s}{2} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

wobei ω_0 die Grenzfrequenz ist. Ihr zufolge ist die Bedingung für alle Frequenzen

$$\omega_k = \omega_0 \cdot \sin\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{31}$$

erfüllt. Das sind bekanntlich die n verschiedenen Eigenfrequenzen der kurzgeschlossenen Pupinleitung[1]).

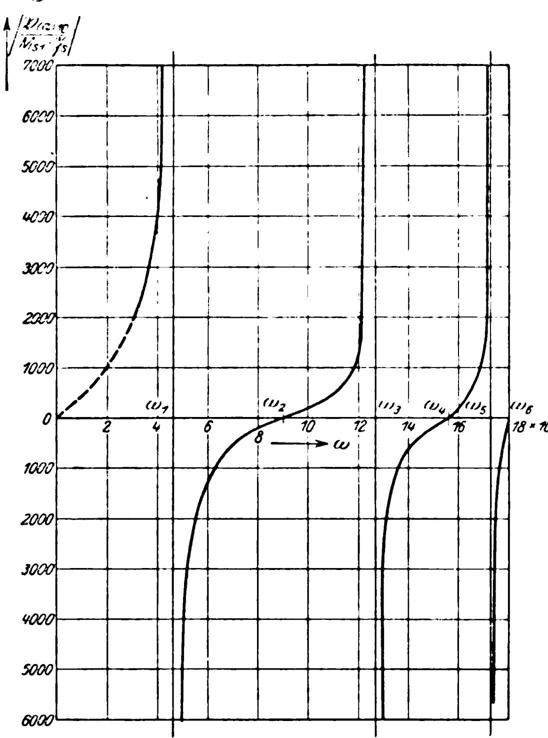


Bild 3. Die am Anfang einer aus 6 gleichartigen Feldern bestehenden verlustlosen Pupinleitung induzierte Potentialdifferenz in Abhängigkeit von der Frequenz.

An diesen kritischen Frequenzstellen ist

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = K\cdot s\cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\operatorname{tg} k\cdot\frac{\pi}{2}}{\sin k\,\frac{\pi}{n}}.$$

a) Ist nun k eine gerade Zahl, so wird (außer für $k = n$):

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = 0.$$

Für $k = 0$ erhält man zunächst einen unbestimmten Ausdruck von der Form: $\frac{0}{0}$.

Dieser besitzt den Wert:

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = K\cdot s\cdot \mathfrak{J}_s\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\cos\pi\cdot\cos^2\frac{n}{2}\pi} = -K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s\cdot\frac{n}{2}.$$

b) Für ein ungerades k wird

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = \pm\infty.$$

Der Verlauf der am Anfang einer 6gliedrigen Spulenleitung gegen Erde bestehenden Potentialdifferenz in Abhängigkeit von der Frequenz ist in Bild 3 dargestellt, und zwar der Einfachheit halber für Kreisfrequenzen, die $\geqq 3000$ sind. Für diese darf man nämlich näherungsweise die Verluste vernachlässigen und kann somit in 1. Annäherung

$$\bar{\gamma}\,s = j\,\bar{\alpha}\,s$$

setzen, so daß an die Stelle der hyperbolischen Funktionen einfach die Kreisfunktionen treten.

Es ist also in unserem Beispiel für alle von den Eigenfrequenzen genügend entfernten Frequenzstellen

$$\frac{\mathfrak{V}(a)_{10}}{M_{s1}\cdot\mathfrak{J}_s} = \frac{R_m}{L_m}\cdot s\,\frac{\operatorname{tg} 3\,\bar{\alpha}\,s}{\sin\bar{\alpha}\,s} = 400\cdot\frac{\operatorname{tg} 3\,\bar{\alpha}\,s}{\sin\bar{\alpha}\,s},$$

mit den Werten

$$s = 2\,\text{km},\qquad R_m = 1\,\Omega/\text{km}\quad\text{und}\quad L_m = 5\cdot 10^{-3}\ \text{H/km}.$$

Für die „geraden Eigenfrequenzen" ist:

$$\frac{\mathfrak{V}(a)_{10}}{M_{s1}\cdot\mathfrak{J}_s} = 0 \text{ bzw. } -1200 \text{ für } \omega_0$$

und für die „ungeraden" wird

[1]) Vgl. F. Breisig l. c. S. 388.

$$\frac{\mathfrak{B}(a)_{10}}{M_{s1} \cdot \mathfrak{J}_s} = \infty.$$

Die kritischen Frequenzen sind in diesem speziellen Falle:

$$\omega_1 = 4659, \qquad \omega_4 = 15\,588,$$
$$\omega_2 = 9000, \qquad \omega_5 = 17\,386,$$
$$\omega_3 = 12\,728, \qquad \omega_6 = 18\,000,$$

wenn wir als Grenzfrequenz $\omega_0 = 18\,000$ zugrunde legen.

In Wirklichkeit können aber an den kritischen Frequenzstellen keine unendlichen Werte für $\mathfrak{B}(a)_{10}$ auftreten, wie folgende Betrachtung zeigen wird.

Wenn man die natürlich immer vorhandenen Verluste im Leiter und dem ihn umhüllenden Dielektrikum berücksichtigt, aber gleichzeitig annimmt, daß sie klein sind, so erhält man mit größter Annäherung:

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\gamma s \approx \frac{\frac{n}{2}\bar{\beta} s + j\,\mathrm{tg}\,\frac{n}{2}\bar{\alpha} s}{1 + j\,\frac{n}{2}\bar{\beta} s \cdot \mathrm{tg}\,\frac{n}{2}\bar{\alpha} s}.$$

Es ist ersichtlich, daß an den „ungeraden“ Eigenfrequenzstellen $\omega_1, \omega_3 \ldots$, für die man bei Vernachlässigung der Verluste

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\bar{\gamma} s = j\,\mathrm{tg}\,\frac{k \cdot \pi}{2} = \pm j\,\infty$$

erhält, bei Berücksichtigung der Dämpfung:

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\gamma s = \frac{1}{\frac{n}{2}\bar{\beta} s}$$

und somit

$$\mathfrak{B}(a)_{10} = K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{e^{-j\delta}}{\frac{n}{2}\bar{\beta} s \cdot \sqrt{\sin^2 \frac{k \cdot \pi}{2} + \left(\bar{\beta} s \cdot \cos \frac{k \cdot \pi}{n}\right)^2}}$$

ist, wobei

$$\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}}{\bar{\beta} s} = \delta$$

gesetzt ist.

Für die geraden Eigenfrequenzen $\omega_2, \omega_4 \ldots$ wird statt

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\bar{\gamma} s = j\,\mathrm{tg}\,\frac{k \cdot \pi}{2} = 0$$

bei der verlustlosen Leitung, bei Berücksichtigung der Verluste

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\bar{\gamma} s = \frac{n}{2}\bar{\beta} s,$$

also

$$\mathfrak{B}(a)_{10} = K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\frac{n}{2}\bar{\beta} s \cdot e^{-j\delta}}{\sqrt{\sin^2 \frac{k\,\pi}{n} + \left(\bar{\beta} s \cdot \cos \frac{k\,\pi}{n}\right)^2}}.$$

An den Eigenfrequenzstellen nimmt demnach $\mathfrak{B}(a)_{10}$ sehr hohe und sehr niedrige, aber keineswegs unendliche und verschwindende Werte an.

Es sei bemerkt, daß diese Spannung in demselben Kabel, wenn es nicht pupinisiert ist, unter denselben Bedingungen

$$\mathfrak{B}(a)_{10} = K \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma \frac{l}{2}}{\mathfrak{Sin}\,\gamma}$$

ist. Das Verhältnis der in einer pupinisierten Leitung am Anfang induzierten Spannung zu der unter denselben Bedingungen in einer homogenen Leitung bestehenden ist demnach, da

$$n \cdot s = l$$

ist:

$$\Theta = s \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma \frac{l}{2}}{\mathfrak{Tg}\,\gamma \frac{l}{2}}$$

oder mit größter Näherung:

$$\Theta = \frac{\gamma s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma \frac{l}{2}}{\mathfrak{Tg}\,\gamma \frac{l}{2}}.$$

Für lange Leitungen ist

$$\Theta = \frac{\gamma s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s},$$

also unabhängig von der Leitungslänge.

Kennzeichnen wir die auf die Ader 1 bzw. 2 eines Stammkreises zu beziehenden Leitungsgrößen und elektrischen Werte durch die Zeiger 1 und 2, so ist die am Anfang eines Stammkreises induzierte Spannung:

$$\mathfrak{B}(a)_{12} = \mathfrak{B}(a)_{10} - \mathfrak{B}(a)_{20} = K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \left(\frac{\mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\gamma_1 s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma_1 s} - \frac{\mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\gamma_2 \cdot s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma_2 \cdot s} \right). \tag{32}$$

Bei Leitungen, für die Gleichung (30a) gilt, ist näherungsweise

$$\mathfrak{B}(a)_{12} = K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\gamma_2 s - \mathfrak{Sin}\,\gamma_1 s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma_1 s \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma_2 s}. \tag{32a}$$

Dieser Ausdruck entspricht dem von K. Küpfmüller[1]) für eine homogene oder nur mit Stammspulen pupinisierte Kabeldoppelader angegebenen. Allerdings hat Küpfmüller nicht die Schutzwirkung der Kabelmantelströme berücksichtigt, was für seine weiteren von der betreffenden Gleichung ausgehenden Schlüsse ja auch gleichgültig ist.

$\mathfrak{B}(a)_{12}$ verschwindet, wenn

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2$$

ist.

Nach diesem Resultat hat es den Anschein, daß jedes Spulenfeld die gleiche Fortpflanzungskonstante haben muß, damit Störungsfreiheit besteht.

Die folgenden Untersuchungen werden aber zeigen, daß diese Forderung viel zu eng ist. Es genügt vielmehr zur Unterdrückung einer Potentialdifferenz in einer Doppelleitung die Symmetrie jedes einzelnen Spulenfeldes.

II. Teil.

Die Strom- und Spannungsverteilung in dem induktiv beeinflußten Pupinkabel mit abweichenden Spulenfeldern.

6. Einleitende Bemerkungen.

In Wirklichkeit wird sich nämlich die Strom- und Spannungsverteilung in der Ader eines pupinisierten Kabels nicht ganz so ausbilden, wie es die Gleichung (29a)

[1]) l. c.



und (29b) angeben, die wir unter der Voraussetzung erhalten haben, daß alle Spulenfelder in allen ihren Leitungskonstanten und Spulenwerten genau übereinstimmen. Die Bedingung ist in Wirklichkeit niemals erfüllt.

Selbst bei sorgfältigster Fabrikation lassen sich Abweichungen der Spuleninduktivitäten oder der Leitungskonstanten von vorgeschriebenen Sollwerten niemals vermeiden. Insbesondere ist es bei dem heutigen Stande der Kabeltechnik noch nicht erreicht worden, daß die Leitungskapazitäten der Kabeladern vollkommen regelmäßig ausfallen. Aber alle diese Abweichungen können recht klein gestaltet werden. Hinzu kommt noch, daß infolge der Abhängigkeit der Spuleninduktivität von dem die Spulenwicklung durchfließenden Strom bei der Ausbildung von stehenden Wellen notwendig Abweichungen der Induktivitäten der im Zuge der beeinflußten Leitungen liegenden Spulen auftreten müssen. Um nun unsere Theorie auf wirklich ausgeführte Pupinleitungen anwenden zu können, ist es notwendig, den Abweichungen der Leitungskonstanten in den Gliedern Rechnung zu tragen.

Wir gehen dabei so vor, daß wir voraussetzen, alle Spulenfelder — bis auf eins — seien vollkommen gleichartig, und nun den Einfluß der Abweichungen dieses einen Gliedes auf die Strom- und Spannungsverteilung berechnen. Die Wirkungen der Unregelmäßigkeiten in n Gliedern superponieren sich dann ungestört. Wir schlagen damit denselben Weg ein wie K. W. Wagner und K. Küpfmüller in ihrer Untersuchung über den „Einfluß von Unregelmäßigkeiten im Aufbau von Spulenleitungen auf den Wellenwiderstand“[1]).

In den folgenden Ausführungen beschränken wir uns auf die Behandlung von Abweichungen der Spuleninduktivität, des Widerstandes von Spule und Leitung und der Leitungskapazität, die sich hauptsächlich störend bemerkbar machen. Die Wirkung der dielektrischen Verluste ist an und für sich schon nicht groß, so daß Abweichungen der „Ableitung“ von ihrem Sollwert erst recht keine Rolle spielen. Die Selbstinduktivität der Leitung selbst kommt neben der hohen Spuleninduktivität nicht in Betracht, zudem liegt es in der Natur der Sache, daß bei Verwendung von Leitern desselben Durchmessers Unterschiede in den Leitungsinduktivitäten kaum auftreten können.

7. Die Strom- und Spannungsgleichungen für eine Leitung mit einem unnormalen Gliede.

Wir setzen voraus, daß alle Abweichungen der Leitungs- und Spulenkonstanten von den Regelwerten sehr klein sind, wie es ja in Wirklichkeit gewöhnlich auch

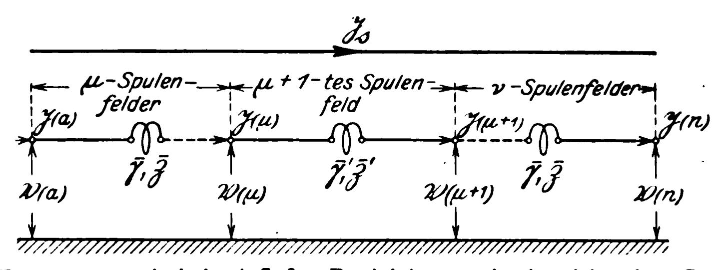


Bild 4. Elektromagnetisch beeinflußte Pupinleitung mit abweichendem Spulenfelde.

der Fall ist. Von den $n = \mu + \nu + 1$ Spulenfeldern sei das $\mu + 1$-te unnormal (Bild 4).

Es besitzt infolgedessen den abweichenden Wellenwiderstand

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} + \zeta \cdot \mathfrak{Z}$$

und die abweichende Fortpflanzungskonstante

[1]) Arch. f. Elektrotechnik Bd. 9, S. 461, 1921 oder Mitteilungen aus dem Telegraph.-Technischen Reichsamt Bd. 9, S. 135, 1923.

$$\bar{\gamma}' = \bar{\gamma} + \bar{g}.$$

Für das $\mu + 1$-te Glied gelten dann gemäß Gleichung (15a) und (15b) bei Beachtung von (18) die Gleichungen:

$$\mathfrak{V}(\mu + 1) = \mathfrak{V}(\mu) \cdot \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma}' s - \bar{\mathfrak{Z}}' \cdot \mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma}' s - K s \cdot \mathfrak{J}_s.$$

$$\mathfrak{J}(\mu + 1) = \mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma}' s - \frac{\mathfrak{V}(\mu)}{\bar{\mathfrak{Z}}'} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma}' s + K s \cdot \mathfrak{J}_s \frac{\mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma}' s - 1}{\bar{\mathfrak{Z}}' \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma}' s}.$$

Da $\bar{g}$ und $\bar{\zeta} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}$ sehr klein sein sollen, kann in 1. Annäherung gesetzt werden:

$$\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma}' s = \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s + \bar{g} s \cdot \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s,$$

$$\mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma}' s = \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s + \bar{g} s \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s,$$

$$\frac{1}{\bar{\mathfrak{Z}}'} = \frac{1}{\bar{\mathfrak{Z}}} (1 - \bar{\zeta}).$$

Mit diesen Näherungsformeln wird:

$$\mathfrak{V}(\mu + 1) = \mathfrak{V}(\mu) \cdot \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s - K s \cdot \mathfrak{J}_s + \\ + \bar{g} s \cdot [\mathfrak{V}(\mu) \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s] - \bar{\zeta} \cdot \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s \cdot \mathfrak{J}(\mu)$$

und

$$\mathfrak{J}(\mu + 1) = \mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s - \frac{\mathfrak{V}(\mu)}{\bar{\mathfrak{Z}}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s + K s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s - 1}{\bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s} + \\ + \bar{g} s \cdot \left[\mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s - \frac{\mathfrak{V}(\mu)}{\bar{\mathfrak{Z}}} \mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s + K s \cdot \mathfrak{J}_s \frac{\mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s - 1}{\bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}^2\,\bar{\gamma} s}\right] + \\ + \bar{\zeta} \left[\frac{\mathfrak{V}(\mu)}{\bar{\mathfrak{Z}}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s - K s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s - 1}{\bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s}\right],$$

wenn solche Glieder, in denen Produkte von $\bar{g}$ und $\bar{\zeta} \cdot \bar{\mathfrak{Z}}$ vorkommen, als kleine Größen höherer Ordnung gegenüber den anderen Summanden vernachlässigt werden.

Wir gehen nun dazu über festzustellen, wie sich der Einfluß des unnormalen $\mu + 1$-ten Gliedes auf die Spannung und den Strom am Ende der n-gliedrigen Leitung geltend macht.

Zu diesem Zweck führen wir in die Gleichung

$$\mathfrak{V}(n) = \mathfrak{V}(\mu + 1) \cdot \mathfrak{Cof}\,\nu \bar{\gamma} s - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(\mu + 1) \cdot \mathfrak{Sin}\,\nu \bar{\gamma} s - K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\nu \bar{\gamma} s}{\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s}$$

die oben erhaltenen Werte für $\mathfrak{V}(\mu + 1)$ und $\mathfrak{J}(\mu + 1)$ ein. Es ist sodann

$$\mathfrak{V}(n) = \mathfrak{V}(\mu) \cdot \mathfrak{Cof}\,(\nu + 1) \bar{\gamma} s - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Sin}\,(\nu + 1) \bar{\gamma} s - K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,(\nu + 1) \bar{\gamma} s}{\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s} + \\ + \bar{g} s \cdot \left[\mathfrak{V}(\mu) \cdot \mathfrak{Sin}\,(\nu + 1) \bar{\gamma} s - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Cof}\,(\nu + 1) \bar{\gamma} s - K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \mathfrak{Sin}\,\nu \bar{\gamma} s \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s - 1}{\mathfrak{Sin}^2\,\bar{\gamma} s}\right] - \\ - \bar{\zeta} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s \cdot \left[\mathfrak{V}(\mu) \cdot \mathfrak{Sin}\,\nu \bar{\gamma} s + \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(\mu) \cdot \mathfrak{Cof}\,\nu \bar{\gamma} s - K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\nu \bar{\gamma} s}{\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s} (\mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s - 1)\right].$$

Wenn man nun noch $\mathfrak{V}(\mu)$ und $\mathfrak{J}(\mu)$ mittels der Gleichung (29a) und (29b) durch die Werte am Anfang ausdrückt, so erhält man nach einigen leichten Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}(n) = {} & \mathfrak{V}(a) \cdot [\mathfrak{Cof}\,n \bar{\gamma} s + \bar{g} s \cdot \mathfrak{Sin}\,n \bar{\gamma} s + \bar{\zeta} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s \cdot \mathfrak{Sin}\,(\mu - \nu) \bar{\gamma} s] - \\ & - \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{J}(a) \cdot [\mathfrak{Sin}\,n \bar{\gamma} s + \bar{g} s \cdot \mathfrak{Cof}\,n \bar{\gamma} s + \bar{\zeta} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s \cdot \mathfrak{Cof}\,(\mu - \nu) \bar{\gamma} s] - \\ & - \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s} \cdot \Bigg[\mathfrak{Sin}\,n \bar{\gamma} s + \bar{g} s \cdot (\mathfrak{Cof}\,n \bar{\gamma} s - \mathfrak{Cof}\,(\nu + 1) \bar{\gamma} s + \mathfrak{Sin}\,\nu \bar{\gamma} s \cdot \mathfrak{Tg}\,\bar{\gamma} s/2) + \\ & + \bar{\zeta} \cdot \mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma} s \cdot \left(\mathfrak{Cof}\,(\mu - \nu) \bar{\gamma} s - \frac{\mathfrak{Cof}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \bar{\gamma} s}{\mathfrak{Cof}\,\bar{\gamma} s/2}\right)\Bigg]. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Für $\mathfrak{J}(n)$ folgt in entsprechender Weise:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}(n) = {} & \mathfrak{J}(a)\cdot\left[\mathfrak{Cos}\, n\bar{\gamma}s + \bar{g}s\cdot\mathfrak{Sin}\, n\bar{\gamma}s - \bar{\zeta}\cdot\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma}s\cdot\mathfrak{Sin}\,(\mu-\nu)\bar{\gamma}s\right] - \\ & - \frac{\mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{Z}}\cdot\left[\mathfrak{Sin}\, n\bar{\gamma}s + \bar{g}s\cdot\mathfrak{Cos}\, n\bar{\gamma}s - \bar{\zeta}\cdot\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma}s\cdot\mathfrak{Cos}\,(\mu-\nu)\bar{\gamma}s\right] + \\ & + \frac{K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Sin}\,\gamma s}\cdot\Bigg[\mathfrak{Cos}\, n\bar{\gamma}s - 1 + \bar{g}s\cdot\left(\mathfrak{Sin}\, n\bar{\gamma}s - \mathfrak{Sin}\,(\nu+1)\bar{\gamma}s + \mathfrak{Tg}\,\bar{\gamma}s/2\cdot\mathfrak{Cos}\,\nu\bar{\gamma}s\right) - \\ & - \bar{\zeta}\cdot\mathfrak{Sin}\,\bar{\gamma}s\cdot\left(\mathfrak{Sin}\,(\mu-\nu)\bar{\gamma}s + \frac{\mathfrak{Sin}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\bar{\gamma}s}{\mathfrak{Cos}\,\bar{\gamma}s/2}\right)\Bigg]. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Die hier angegebenen Gleichungen können nur dann angewendet werden, wenn Induktivitäts- und Widerstandsabweichungen auftreten. Die Berechnung des Einflusses abweichender Leitungskapazitäten auf die Strom- und Spannungsverteilung erfordert dagegen eine besondere Betrachtung, die in Abschnitt 10 durchgeführt wird, da es umständlich ist, die Ausdrücke für $\bar{g}$ und $\bar{\zeta}$ abzuleiten, wenn in der „Anlauf-" und „Abschlußlänge" eines Feldes verschieden große Kapazitätsabweichungen vorkommen.

8. Der Einfluß einer Abweichung der Induktivität der $\mu+1$-ten Spule.

Es sollen nun die Größen $\bar{g}$ und ζ für den Fall berechnet werden, daß die $\mu+1$-te Pupinspule eine Abweichung der Induktivität $\lambda_{\mu+1}$ von dem Sollwert L_0 besitzt.

Diese Berechnung ist von K. Wagner und K. Küpfmüller[1]) schon durchgeführt worden, jedoch unter Vernachlässigung des Widerstandes. Wir wollen diesen mit Rücksicht auf die uns auch interessierenden niederen Frequenzen berücksichtigen.

Die Induktivität der Spule ist also:

$$L_0 + \lambda_{\mu+1}.$$

Unter dem Einfluß dieser Induktivitätsabweichung wird die Fortpflanzungskonstante des $\mu+1$-ten Feldes zu

$$\gamma' = \gamma + \bar{g} = \gamma(L_0 + \lambda_{\mu+1}).$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Taylorsche Reihe und bricht die Entwicklung wegen der geringen Größe von $\lambda_{\mu+1}$ nach dem 2. Gliede ab, so wird:

$$\gamma + \bar{g} = \gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial L_0}\cdot\lambda_{\mu+1}$$

oder

$$\bar{g} = \frac{\partial\gamma}{\partial L_0}\cdot\lambda_{\mu+1}. \quad (35)$$

Aus der Definitionsgleichung (10) folgt nach Differentiation

$$\mathfrak{Sin}\,\gamma s\cdot\partial\gamma s = j\omega s/2\cdot\mathfrak{g}\cdot\partial L_0$$

oder mit Gleichung (13) und (14):

$$\frac{\partial\gamma s}{\partial L_0} = j\omega\frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2}{\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Sin}\,\gamma s} = j\omega\frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2}{\mathfrak{r}\cdot s}.$$

Demnach ist

$$\bar{g}s = j\omega\frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2}{\mathfrak{r}\cdot s}\cdot\lambda_{\mu+1}. \quad (36)$$

Für solche Frequenzen, bei denen R_0 gegenüber ωL_0 vernachlässigt werden kann, wird daraus der von den genannten beiden Autoren angegebene Ausdruck:

[1]) l. c.

$$g\,s = \frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2}{L_0} \cdot \lambda_{\mu+1}.$$

Entsprechend ergibt sich für die Abweichung des Wellenwiderstandes:

$$\zeta = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial L_0} \cdot \frac{\lambda_{\mu+1}}{\mathfrak{Z}}. \tag{37}$$

Aus der Gleichung (14) wird durch Differentiation nach L_0

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial L_0} = \frac{\dfrac{\partial \gamma}{\gamma L_0}}{g \cdot \mathfrak{Cof}^2 \gamma\, s/2}$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial L_0} = \frac{j\,\omega}{2\, \mathfrak{Sin}\,\gamma\, s \cdot \mathfrak{Cof}^2 \gamma\, s/2}$$

und damit

$$\zeta = \mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}^2 \gamma\, s} = \frac{g\,s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma\, s}. \tag{38}$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (33) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(n) = \mathfrak{V}(a) \cdot \Big[\mathfrak{Cof}\, n\,\gamma\, s + \mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot (\mathfrak{Sin}\, n\,\gamma\, s + \mathfrak{Sin}\,(\mu-\nu)\,\gamma\, s)\Big] - \\ - \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{J}(a) \cdot \Big[\mathfrak{Sin}\, n\,\gamma\, s + \mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot (\mathfrak{Cof}\, n\,\gamma\, s + \mathfrak{Cof}\,(\mu-\nu)\,\gamma\, s)\Big] - \\ - \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma\, s} \cdot \Big[\mathfrak{Sin}\, n\,\gamma\, s + \mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot (\mathfrak{Cof}\, n\,\gamma\, s + \mathfrak{Cof}\,(\mu-\nu)\,\gamma\, s - \mathfrak{Cof}\,(\nu+1)\,\gamma\, s - \mathfrak{Cof}\,\nu\,\gamma\, s)\Big].\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen läßt sich diese Gleichung noch folgendermaßen umformen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}(n) = \mathfrak{V}(a) \cdot \Big[\mathfrak{Cof}\, n\,\gamma\, s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Cof}\left(n-\mu-\frac{1}{2}\right)\gamma\, s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma\, s\Big] - \\ - \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{J}(a) \cdot \Big[\mathfrak{Sin}\, n\,\gamma\, s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Cof}\left(n-\mu-\frac{1}{2}\right)\gamma\, s \cdot \mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma\, s\Big] - \\ - \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma\, s} \cdot \Big[\mathfrak{Sin}\, n\,\gamma\, s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Cof}\left(n-\mu-\frac{1}{2}\right)\gamma\, s \cdot \left(\mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma\, s - \mathfrak{Cof}\,\gamma\, s/2\right)\Big].\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Entsprechend erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}(n) = \mathfrak{J}(a) \cdot \Big[\mathfrak{Cof}\, n\,\gamma\, s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n-\mu-\frac{1}{2}\right)\gamma\, s \cdot \mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma\, s\Big] - \\ - \frac{\mathfrak{V}(a)}{\mathfrak{Z}} \cdot \Big[\mathfrak{Sin}\, n\,\gamma\, s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n-\mu-\frac{1}{2}\right)\gamma\, s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma\, s\Big] + \\ + \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma\, s} \cdot \Big[\mathfrak{Cof}\, n\,\gamma\, s - 1 + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n-\mu-\frac{1}{2}\right)\gamma\, s \cdot \left(\mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma\, s - \mathfrak{Cof}\,\gamma\, s/2\right)\Big].\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

9. Der Einfluß einer Abweichung der Wirkwiderstände im $\mu + 1$-ten Felde.

Die Größe der Abweichung der Wirkwiderstände im $\mu + 1$-ten Spulenfelde, die sowohl die Abweichung des Leitungs-, als auch des Spulenwiderstandes von ihren Regelwerten $R = R + \frac{R_0}{s}$ umfaßt, sei

$$\varrho_{\mu+1}\ \Omega/\text{km}.$$

Die Abweichung der Fortpflanzungskonstante ist sodann:

$$\bar{g}\,s = \frac{\partial \bar{\gamma} s}{\partial R} \cdot \varrho_{\mu+1} = \mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{r} \tag{41}$$

und die des Wellenwiderstandes:

$$\bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{Z}}}{\partial R} \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{\mathfrak{Z}} = \frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{r} = \frac{\bar{g}\,s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}, \tag{42}$$

so daß die Leitungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}(n) = {} & \mathfrak{V}(a) \cdot \left[\mathfrak{Cof}\, n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{r} \cdot \mathfrak{Cof}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s\right] - \\ & - \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{J}(a) \cdot \left[\mathfrak{Sin}\, n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{r} \cdot \mathfrak{Cof}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s\right] - \\ & - \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \left[\mathfrak{Sin}\, n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{r} \cdot \mathfrak{Cof}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \left(\mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2\right)\right] \end{aligned} \tag{43}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(n) = {} & \mathfrak{J}(a) \cdot \left[\mathfrak{Cof}\, n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{r} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s\right] - \\ & - \frac{\mathfrak{V}(a)}{\mathfrak{Z}} \cdot \left[\mathfrak{Sin}\, n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{r} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s\right] + \\ & - \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \left[\mathfrak{Cof}\, n\gamma s - 1 + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{\varrho_{\mu+1}}{r} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \left(\mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2\right)\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Da diese Gleichungen mit den bei Vorhandensein einer Induktivitätsabweichung geltenden weitgehend übereinstimmen, in ihnen aber $\varrho_{\mu+1}$ nicht mit der Kreisfrequenz ω multipliziert ist, ist offenbar der Einfluß der Widerstandsungleichmäßigkeiten weit geringer als der der Induktivitätsunregelmäßigkeiten. Für höhere Frequenzen haben sie demnach den Induktivitätsabweichungen gegenüber keine Bedeutung und können vernachlässigt werden.

10. Über den Einfluß einer Kapazitätsabweichung der Verbindungsleitung zwischen der μ-ten und $\mu + 1$-ten Spule.

Am einfachsten gestaltet sich die Untersuchung des Einflusses der Kapazitätsabweichung eines Leitungszwischenstückes, wenn man sich die Pupinleitung durch einen Kettenleiter nach Bild 5 ersetzt denkt[1]).

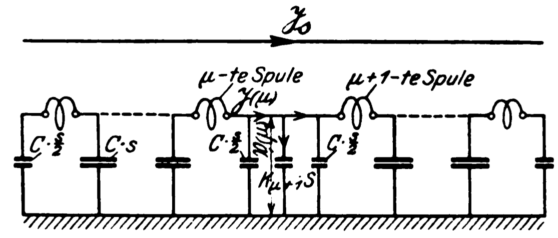


Bild 5. Elektromagnetisch beeinflußte Pupinleitung mit Kapazitätsabweichung eines Leitungszwischenstückes.

Wir veranschaulichen die Kapazitätsabweichung des auf die μ-te Spule folgenden Leitungszwischenstückes durch den in Bild 5 eingezeichneten Querkondensator $\varkappa_{\mu+1} \cdot s$.

[1]) K. W. Wagner, Arch. f. Elektrot. Bd. 3, S. 315, 1915 und Bd. 8, S. 61, 1919.

Hinter dem μ-ten Felde besteht nach Gleichung (29a) die Spannung

$$\mathfrak{V}(\mu) = \mathfrak{V}(a)\cdot\mathfrak{Cof}\,\mu\gamma s - \mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{J}(a)\cdot\mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s - K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \qquad (45\,a)$$

gegen Erde und der Strom:

$$\mathfrak{J}(\mu) = \mathfrak{J}(a)\cdot\mathfrak{Cof}\,\mu\gamma s - \frac{\mathfrak{V}(a)}{\mathfrak{Z}}\cdot\mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s + K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\,\mu\gamma s - 1}{\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Sin}\,\gamma s}. \qquad (45\,b)$$

Die Spannung und der Strom am Ende der Leitung ist:

$$\mathfrak{V}(n) = \mathfrak{V}(\mu)\cdot\mathfrak{Cof}(n-\mu)\gamma s - \mathfrak{Z}\cdot[\mathfrak{J}(\mu) - j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}\cdot s\,\mathfrak{V}(\mu)]\cdot\mathfrak{Sin}(n-\mu)\gamma s - K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s\,\frac{\mathfrak{Sin}(n-\mu)\gamma s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}$$

und

$$\mathfrak{J}(n) = [\mathfrak{J}(\mu) - j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}\cdot s\,\mathfrak{V}(\mu)]\cdot\mathfrak{Cof}(n-\mu)\gamma s - \frac{\mathfrak{V}(\mu)}{\mathfrak{Z}}\cdot\mathfrak{Sin}(n-\mu)\gamma s + K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s\cdot\frac{\mathfrak{Cof}(n-\mu)\gamma s - 1}{\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Sin}\,\gamma s}.$$

Die Spannung und der Strom am Ende soll nun wie üblich mittels der Gleichungen (45a) und (45b) durch die Werte am Anfang ausgedrückt werden, wobei wir gleichzeitig, um die Gleichungen rein formell in größere Übereinstimmung mit den Gleichungen (39) und (40) bzw. (43) und (44) zu bringen, mit Gleichung (14)

$$j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}\cdot s\,\mathfrak{Z} = 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2\cdot\frac{j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}}{\mathfrak{g}}$$

setzen. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}(n) = \mathfrak{V}(a)\cdot&\left[\mathfrak{Cof}\,n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2\cdot\frac{j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}}{\mathfrak{g}}\cdot\mathfrak{Sin}(n-\mu)\gamma s\cdot\mathfrak{Cof}\,\mu\gamma s\right] - \\ -\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{J}(a)\cdot&\left[\mathfrak{Sin}\,n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2\cdot\frac{j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}}{\mathfrak{g}}\cdot\mathfrak{Sin}(n-\mu)\gamma s\cdot\mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s\right] - \\ -\frac{K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}\cdot&\left[\mathfrak{Sin}\,n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2\cdot\frac{j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}}{\mathfrak{g}}\cdot\mathfrak{Sin}(n-\mu)\gamma s\cdot\mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s\right]\end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}(n) = \mathfrak{J}(a)\cdot&\left[\mathfrak{Cof}\,n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2\cdot\frac{j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}}{\mathfrak{g}}\cdot\mathfrak{Cof}(n-\mu)\gamma s\cdot\mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s\right] - \\ -\frac{\mathfrak{V}(a)}{\mathfrak{Z}}\cdot&\left[\mathfrak{Sin}\,n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2\cdot\frac{j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}}{\mathfrak{g}}\cdot\mathfrak{Cof}(n-\mu)\gamma s\cdot\mathfrak{Cof}\,\mu\gamma s\right] + \\ +\frac{K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Sin}\,\gamma s}\cdot&\left[\mathfrak{Cof}\,n\gamma s - 1 + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2\cdot\frac{j\,\omega\,\varkappa_{\mu+1}}{\mathfrak{g}}\cdot\mathfrak{Cof}(n-\mu)\gamma s\cdot\mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s\right]\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

11. Über den Einfluß aller möglichen Abweichungen.

Im allgemeinen werden in allen n-Spulengliedern einer wirklich ausgeführten Pupinleitung alle möglichen Abweichungen auftreten. Falls sie klein sind, überlagern sich ungestört die Einflüsse aller Ungleichmäßigkeiten. Für diesen Fall ergeben sich die dann gültigen Gleichungen durch Addition der Störungsglieder in den Gleichungen (39), (43) und (46) bzw. (40), (44) und (47) und Summation über alle n Glieder.

Für die Kapazitätsabweichung ist die Summierung für $\mu + 1 = 1$ bis $n + 1$ vorzunehmen. Da es durchaus ersichtlich ist, welche Gestalt die Gleichungen in dem vorliegenden Falle annehmen, wollen wir sie nicht niederschreiben.

12. Die am Anfang einer n-gliedrigen Doppelleitung bestehende Potentialdifferenz, wenn im $\mu + 1$-ten Felde

a) eine Induktivitätsunsymmetrie $\Delta\,\lambda_{\mu+1}$ besteht.

Wir wenden uns vielmehr wieder einem Problem zu, dem wir schon in Abschnitt 5 unsere Aufmerksamkeit schenkten, nämlich der Frage nach der Größe der in einem Stammkreis bestehenden Potentialdifferenz,



In dem hier zu behandelnden Fall soll im $\mu + 1$-ten Gliede eine Induktivitätsunsymmetrie bestehen.

Um darüber Rechenschaft geben zu können, müssen wir zunächst — wie wir schon oben sahen — die am Anfang jeder Einzelader gegen Erde bestehende Potentialdifferenz bestimmen.

Sie ist in diesem Falle, da im $\mu + 1$-ten Gliede eine Induktivitätsabweichung von $\lambda_{\mu+1}$ vom Regelwert vorhanden sein soll,

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot$$

$$\frac{\mathfrak{Cof}\,n\gamma s - 1 + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\omega\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \left(\mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2\right)}{\left[\mathfrak{Sin}\,n\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,s/2 \cdot \frac{j\omega\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s\right]} \cdot \tag{48}$$

Es ist interessant festzustellen, wie sich $\mathfrak{V}(a)_{10}$ mit der Frequenz ändert. Ganz offenbar nimmt der obige Ausdruck ausgezeichnete Werte an für alle Eigenfrequenzen ($\mathfrak{Sin}\,n\gamma s = 0$).

Für diese kritischen Frequenzstellen läßt sich die Gleichung für $\mathfrak{V}(a)_{10}$ folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot$$

$$\frac{\cos k\pi - 1 + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\omega\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \left(\mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2\right)}{2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\omega\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s} \cdot \tag{49}$$

Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

Es sei

a) $k = 2, 4, 6 \ldots$, also eine gerade Zahl;

dann ist

$$\cos k\pi = +1$$

und mithin der Ausdruck für $\mathfrak{V}(a)_{10}$ besonders einfach, nämlich

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2}{\mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s} \cdot \tag{50}$$

Ist dagegen

b) $k = 1, 3, 5 \ldots$ eine ungerade Zahl,

so ist

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot$$

$$\frac{-1 + \mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\omega\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \left(\mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2\right)}{\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\omega\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s} \cdot \tag{51}$$

Für alle Frequenzen, die von den Eigenfrequenzstellen genügend entfernt sind, ist der 2. Summand im Nenner der Gleichung (48) sehr viel kleiner als der 1., so daß man mit bester Annäherung setzen darf:

$$\mathfrak{B}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \left\{ \mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\,\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1}}{r \cdot s} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s}{\mathfrak{Sin}\,n\,\gamma s \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{n}{2}\,\gamma s} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\mathfrak{Cof}\left(\frac{n}{2} - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2 \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{n}{2}\,\gamma s \right] \right\}. \tag{52}$$

Nun sind wir ohne weiteres imstande, die in einer Doppelleitung induzierte EMK anzugeben. Wir kennzeichnen zu diesem Zweck die Abweichungen der Spulen- und Leitungswerte in beiden Adern eines Stammes durch die Zeiger 1 und 2 und bezeichnen die Differenz der Induktivitätsabweichungen mit

$$\pm \Delta\,\lambda_{\mu+1}.$$

Wir lassen $\Delta\,\lambda_{\mu+1}$ als positiv gelten, wenn bei positiven Induktivitätsabweichungen die des a-Zweiges, bei negativen die des b-Zweiges die größere ist oder wenn $\lambda_{\mu+1,1} > 0$, während $\lambda_{\mu+1,2} < 0$ ist.

Für alle „geraden Eigenfrequenzen" ist nun

$$\mathfrak{B}(a)_{12} = \mathfrak{B}(a)_{10} - \mathfrak{B}(a)_{20} = 0. \tag{53}$$

Dagegen wird für alle „ungeraden Eigenfrequenzen"

$$\mathfrak{B}(a)_{12} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \Delta\,\lambda_{\mu+1}}{2\,\mathfrak{Sin}^2\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\,\omega\,\lambda_{\mu+1,1} \cdot \lambda_{\mu+1,2}}{r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s}. \tag{54}$$

Merkwürdig an diesem Resultat ist, daß $\mathfrak{B}(a)_{12}$ um so größer wird, je kleiner eine der Abweichungen $\lambda_{\mu+1,1}$ oder $\lambda_{\mu+1,2}$ ist. Ist insbesondere beispielsweise $\lambda_{\mu+1,2} = 0$, so wird $\mathfrak{B}(a)_{12} = \infty$. Dieses zunächst überraschende Ergebnis wird verständlich, wenn man bedenkt, daß nach den Ausführungen im 5. Abschnitt die am Anfang einer verlustfreien Einzelader gegen Erde bestehende Potentialdifferenz für alle ungeraden Eigenfrequenzen unendlich ist, falls in keinem der Spulenfelder eine Abweichung von den Sollwerten der Leitungs- und Spulengrößen besteht.

Für alle von den Eigenfrequenzen verschiedenen Frequenzen ist schließlich:

$$\mathfrak{B}(a)_{12} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot j\,\omega\,\Delta\,\lambda_{\mu+1}}{\mathfrak{Sin}\,n\,\gamma s \cdot \mathfrak{Cof}^2\,\gamma s/2 \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{n}{2}\,\gamma s \cdot r \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \left[\mathfrak{Cof}\left(\frac{n}{2} - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2 \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{n}{2}\,\gamma s\right]. \tag{55}$$

Die Gleichung (53) gibt uns eine Handhabe, besonders störende frequenzbeständige Oberschwingungen durch passende Wahl der Spulenzahl unschädlich zu machen. Wenn man nämlich gemäß Gleichung (31) die Pupinleitung aus so viel Gliedern erbaut, daß die Gleichung

$$n = \frac{k \cdot \frac{\pi}{2}}{\arcsin \frac{\omega_k}{\omega_0}} \tag{56}$$

erfüllt ist für besonders störende Harmonische bei $k = 2, 4, 6 \ldots$, so wird durch diese Oberschwingungen in der Doppelleitung keine Induktion mehr stattfinden können.

Anderseits muß man darauf achten, daß die Gleichung (56) unter keinen Umständen für $k = 1, 3, 5 \ldots$ und ausgeprägte Oberschwingungen erfüllt sein darf, da andernfalls die Störungen ganz beträchtlich sein werden.

Beispiel.

Die Abhängigkeit der Größe der in einer Doppelleitung induzierten EMK von der Frequenz wollen wir an einem einfachen Beispiel erläutern, und zwar für Kreis-



frequenzen, die $\geqq$ 3000 sind. Wir vernachlässigen wieder den Einfluß der Verluste und setzen in 1. Annäherung: $\bar{\gamma} s = j \bar{\alpha} s$. Damit treten an die Stelle der hyperbolischen Funktionen einfach die trigonometrischen.

Es sei eine 4gliedrige Pupinleitung unseren Betrachtungen zugrunde gelegt.

Die Induktivitätsdifferenz sei

$$\frac{j\,\omega\,\Delta\,\lambda_{\mu+1}}{\bar{r}\cdot s} \approx \frac{\Delta\,\lambda_{\mu+1}}{L_0} = 0{,}2\,\%\,^{1)}.$$

Demgemäß gilt für alle Frequenzen außer den Eigenfrequenzen nach Gleichung (55):

$$\frac{\mathfrak{B}(a)_{12}}{M_{s1}\cdot\mathfrak{J}_s} = \frac{R_m}{L_m}\cdot s\,\frac{2\cdot 10^{-3}}{\sin 4\,\alpha s\cdot\cos^2\alpha s/2\cdot\cos 2\,\alpha s}\cdot\sin\left(\frac{7}{2}-\mu\right)\alpha s\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\left(\frac{3}{2}-\mu\right)\alpha s - \cos\alpha s/2\cdot\cos 2\,\alpha s\right].$$

An den „ungeraden Eigenfrequenzstellen" ist

$$\frac{\mathfrak{B}(a)_{12}}{M_{s1}\cdot\mathfrak{J}_s} = \frac{R_m}{L_m}\cdot s\,\frac{2\cdot 10^{-3}}{2\sin^2\alpha s/2\cdot\varepsilon_{\mu+1,1}\cdot\varepsilon_{\mu+1,2}\cdot\sin\left(\frac{7}{2}-\mu\right)\alpha s\cdot\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\alpha s},$$

wobei wir

$$\frac{\lambda_{\mu+1,1}}{L_0} = \varepsilon_{\mu+1,1}$$

und entsprechend

$$\frac{\lambda_{\mu+1,2}}{L_0} = \varepsilon_{\mu+1,2}$$

gesetzt haben.

Für die Berechnung der Anfangsspannung an den „ungeraden" kritischen Frequenzstellen nehmen wir an, daß die „Abweichung" der in der Ader 1 geschalteten Spuleninduktivität vom Regelwert

$$\frac{\lambda_{\mu+1,1}}{2\,L_0} = 2\cdot 10^{-3}$$

und

$$\frac{\lambda_{\mu+1,2}}{2\,L_0} = 1\cdot 10^{-3}$$

betragen soll.

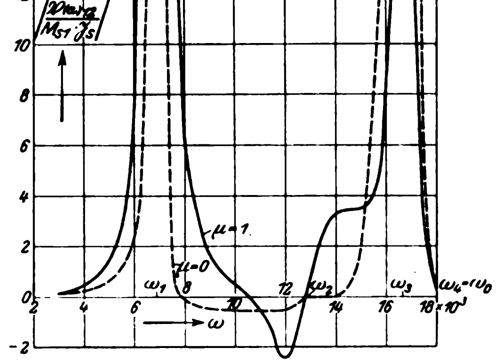
Die kritischen Frequenzstellen sind nach Gleichung (31)

$$\omega_1 = 6888$$
$$\omega_2 = 12728$$
$$\omega_3 = 16630$$

und

$$\omega_0 = \omega_4 = 18000.$$

Die so ermittelten Werte enthält die folgende Tabelle; ihren Verlauf zeigt Bild 6.



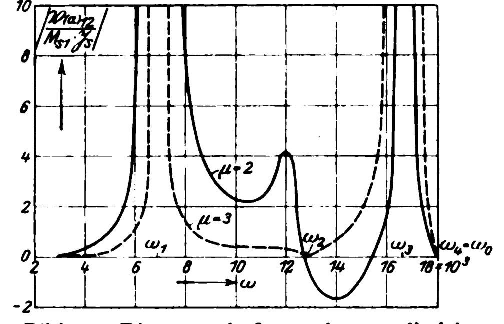


Bild 6. Die am Anfang einer 4gliedrigen (verlustlosen) pupinisierten Doppelader induzierte EMK in Abhängigkeit von der Frequenz bei einer Induktivitätsabweichung im $\mu+1$-ten Felde.

[1]) Das entspricht einer Induktivitätsunsymmetrie der beiden Wicklungshälften von 0,1 %, bezogen auf die Gesamtinduktivität der Viererspulen, die nach den Bestimmungen der Reichspost nicht überschritten werden darf.

Tabelle II.

ω	$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{V(a)_{12}}{M_{s_1} \cdot \mathfrak{J}_s}$ bei einer Induktivitätsunsymmetrie von 0,1 %				Bemerkungen
		im 1. Feld $\mu = 0$	im 2. Feld $\mu = 1$	im 3. Feld $\mu = 2$	im 4. Feld $\mu = 3$	
3 000	0,1667	+ 0,103	+ 0,171	+ 0,111	+ 0,019	
4 000	0,2222	+ 0,239	+ 0,454	+ 0,314	+ 0,053	$R_m = 1\ \Omega$/km
5 000	0,2778	+ 0,600	+ 1,403	+ 1,061	+ 0,181	$L_m =$
6 000	0,3333	+ 2,346	+ 7,694	+ 6,607	+ 1,131	$= 5 \cdot 10^{-3}$ H/km
$\omega_1 = 6\,888$	0,3827	+ 2 331 350	+ 399 990	+ 399 990	+ 2 331 350	
8 000	0,4445	− 0,257	+ 6,045	+ 7,990	+ 1,363	
9 000	0,5000	− 0,533	+ 1,600	+ 3,200	+ 0,533	
10 000	0,5556	− 0,535	+ 0,453	+ 2,278	+ 0,357	
11 000	0,6111	− 0,510	− 0,368	+ 2,339	+ 0,314	
12 000	0,6667	− 0,466	− 2,458	+ 4,119	+ 0,337	
$\omega_2 = 12\,728$	0,7071	0	0	0	0	
14 000	0,7778	0,044	+ 3,450	− 1,611	+ 0,736	
15 000	0,8333	+ 1,285	+ 3,442	− 0,654	+ 1,865	
16 000	0,8889	+ 15,590	+ 8,308	+ 1,638	+ 14,110	
$\omega_3 = 16\,630$	0,9239	+ 68 625	+ 399 990	+ 399 990	+ 68 625	
$\omega_4 = \omega_0 = 18\,000$	1,0000	0	0	0	0	

b) eine Widerstandsunsymmetrie $\Delta \varrho_{\mu+1}$ auftritt.

Auf Grund der weitgehenden Übereinstimmung der Spannungs- und Stromgleichungen, die man erhält, wenn in dem $\mu + 1$-ten Gliede eine Widerstandsabweichung besteht, mit den bei Vorhandensein einer Induktivitätsabweichung in demselben Gliede geltenden kann man ohne jede weitere Rechnung schließen, daß die am Anfang einer induktiv beeinflußten Doppelleitung bestehende EMK beträgt:

$$\mathfrak{V}(a)_{12} = 0 \tag{57}$$

für die „geraden“ Eigenfrequenzen,

$$\mathfrak{V}(a)_{12} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{2\,\mathfrak{Sin}^2 \gamma s/2} \cdot \frac{\Delta \varrho_{\mu+1}}{\frac{\varrho_{\mu+1,1} \cdot \varrho_{\mu+1,2}}{r} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s} \tag{58}$$

für die „ungeraden“ Eigenfrequenzen und schließlich für alle anderen Frequenzen

$$\mathfrak{V}(a)_{12} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\, n \gamma s} \cdot \frac{\Delta \varrho_{\mu+1}}{\mathfrak{Cof}^2 \gamma s/2 \cdot \mathfrak{Cof} \frac{n}{2} \gamma s \cdot r} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot$$

$$\cdot \left[\mathfrak{Cof}\left(\frac{n}{2} - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2 \cdot \mathfrak{Cof} \frac{n}{2} \gamma s\right]. \tag{59}$$

c) eine Kapazitätsunsymmetrie der Leitungszwischenstücke zwischen der μ-ten und $\mu + 1$-ten Spule auftritt.

In diesem Fall ist die am Anfang einer Einzelader gegen Erde bestehende Potentialdifferenz:

1. für die geraden Eigenfrequenzen:

$$\mathfrak{V}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\, \gamma s} \cdot \mathfrak{Tg}\, \mu \gamma s, \tag{60}$$



2. für die „ungeraden" Eigenfrequenzen:

$$\mathfrak{B}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \frac{-1 + \mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\omega \varkappa_{\mu+1}}{g} \cdot \mathfrak{Cof}\,(n-\mu)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s}{\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\omega \varkappa_{\mu+1}}{g} \cdot \mathfrak{Cof}\,(n-\mu)\gamma s \cdot \mathfrak{Cof}\,\mu\gamma s}, \quad (61)$$

3. und für alle von den „Eigenfrequenzen" genügend entfernten Frequenzstellen:

$$\mathfrak{B}(a)_{10} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \left[\mathfrak{Tg}\,\frac{n}{2}\gamma s + 2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma s/2 \cdot \frac{j\omega \varkappa_{\mu+1}}{g \cdot \mathfrak{Sin}\,n\gamma s} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\,(n-\mu)\gamma s}{\mathfrak{Cof}\,\frac{n}{2}\gamma s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu - \frac{n}{2}\right)\gamma s\right]. \quad (62)$$

Tritt nun in dem a-Zweig zwischen der μ-ten und der $\mu + 1$-ten Spule eine Kapazitätsabweichung $\varkappa_{\mu+1,1}$ auf und besteht in dem b-Zweig zwischen den entsprechenden Spulen die Abweichung $\varkappa_{\mu+1,2}$, so wollen wir die Unsymmetrie $\varkappa_{\mu+1,1} - \varkappa_{\mu+1,2}$ mit $\Delta\varkappa_{\mu+1}$ bezeichnen. $\Delta\varkappa_{\mu+1}$ sei positiv, entweder wenn bei positiven Abweichungen $\varkappa_{\mu+1,1} > \varkappa_{\mu+1,2}$ oder bei negativen Abweichungen $\varkappa_{\mu+1,1} < \varkappa_{\mu+1,2}$ ist, oder wenn $\varkappa_{\mu+1,1} > 0$, während $\varkappa_{\mu+1,2} < 0$ ist.

Andernfalls ist $\Delta\varkappa_{\mu+1}$ negativ.

Die am Anfang einer Doppelleitung bestehende Potentialdifferenz ist demnach:

a) $$\mathfrak{B}(a)_{12} = 0 \quad (63)$$

für „gerade" Eigenfrequenzen,

b) $$\mathfrak{B}(a)_{12} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{2\,\mathfrak{Sin}^2\gamma s/2} \cdot \frac{\Delta\varkappa_{\mu+1}}{\frac{j\omega\varkappa_{\mu+1,1} \cdot \varkappa_{+1,2}}{g} \cdot \mathfrak{Cof}\,(n-\mu)\gamma s \cdot \mathfrak{Cof}\,\mu\gamma s} \quad (64)$$

für die „ungeraden" Eigenfrequenzen.

c) Für alle anderen Frequenzen ist sie:

$$\mathfrak{B}(a)_{12} = \cdot \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,n\gamma s} \cdot \frac{j\omega\Delta\varkappa_{\mu+1} \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu - \frac{n}{2}\right)\gamma s}{\mathfrak{Cof}^2\gamma s/2 \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{n}{2}\gamma s \cdot g} \cdot \mathfrak{Cof}\,(n-\mu)\gamma s. \quad (65)$$

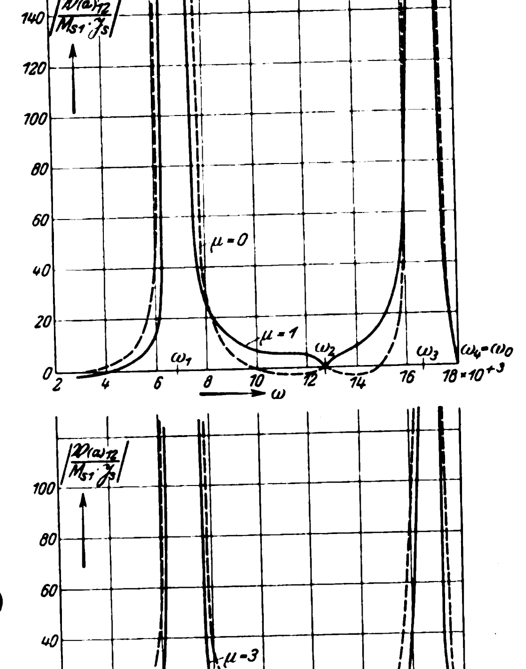


Bild 7. Die am Anfang einer 4 gliedrigen verlustlosen pupinisierten Doppelader induzierte EMK in Abhängigkeit von der Frequenz bei einer Kapazitätsabweichung des Leitungsstückes zwischen der μ-ten und $\mu + 1$-ten Spule.

Beispiel.

Es soll für die schon oben behandelte aus 4 Gliedern bestehende Pupinleitung die Abhängigkeit der am Anfang eines Stammkreises auftretenden Potentialdifferenz von der Frequenz untersucht werden, wenn zwischen den Teilkapazitäten der Leitungszwischenstücke eine Differenz von 1 % besteht.

Für Sprechfrequenzen ist bei Vernachlässigung der Verluste:

$$\frac{\mathfrak{B}(a)_{12}}{M_{s1} \cdot \mathfrak{J}_s} = \frac{R_m}{L_m} \cdot s \cdot \frac{10^{-2} \cdot \cos(4-\mu)\,\alpha s \cdot \sin(\mu - 2)\,\alpha s}{\sin 4\,\alpha s \cdot \cos^2 \alpha \frac{s}{2} \cdot \cos 2\,\alpha s} \text{ für } \omega \gtrless \omega_k.$$

wobei

$$\frac{j\,\omega\,\Delta\varkappa_{\mu+1}}{g} \approx \frac{\Delta\varkappa_{\mu+1}}{C} = 1\,\%$$

gesetzt wurde. Für

$$\omega_k = \omega_1 \text{ und } \omega_3, \omega_5 \ldots$$

wird:

$$\frac{\mathfrak{B}(a)_{12}}{M_{s1}\cdot\mathfrak{J}_s} = -\frac{R_m}{L_m}\cdot s\cdot\frac{10^{+2}}{4\sin^2\alpha\, s/2\cdot\cos(4-\mu)\,\alpha\, s\cdot\cos\mu\,\alpha\, s},$$

wenn beispielsweise

$$\frac{\varkappa_{\mu+1,1}}{C} = 2\cdot 10^{-2}$$

und

$$\frac{\varkappa_{\mu+1,2}}{C} = 1\cdot 10^{-2}$$

gesetzt wird. An den „geraden" Eigenfrequenzstellen $\omega_k = \omega_2$ und $\omega_4, \ldots$ ist

$$\frac{\mathfrak{B}(a)_{12}}{M_{s1}\cdot\mathfrak{J}_s} = 0.$$

Die Ergebnisse der Rechnung enthält die Tabelle III, den Verlauf der Spannungsdifferenz in Abhängigkeit von der Frequenz gibt Kurvenblatt 7 wieder.

Tabelle III.

$\frac{\mathfrak{B}(a)_{12}}{M_{s1}\cdot\mathfrak{J}_s}$ bei einer Kapazitätsunsymmetrie (nach Erde) von 1% in Abhängigkeit von der Frequenz.

ω	$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{\mathfrak{B}(a)_{12}}{M_{s1}\cdot\mathfrak{J}_s}$ bei einer Kapazitätsunsymmetrie (nach Erde) von ein Prozent in Anlauflänge $\mu = 0$	dem 1. Zwischenleitungsstück $\mu = 1$	dem 2. Zwischenleitungsstück $\mu = 2$	dem 3. Zwischenleitungsstück $\mu = 3$	dem 4. Zwischenleitungsstück $\mu = 4$
3 000	0,1667	− 0,765	− 0,950	0	+ 1,675	+ 3,350
4 000	0,2222	+ 1,182	− 0,673	0	+ 2,695	+ 5,390
5 000	0,2778	+ 7,388	+ 0,821	0	+ 5,862	+ 11,724
6 000	0,3333	+ 46,426	+ 14,759	0	+ 25,462	+ 50,924
ω_1 = 6 888	0,3827	+ 68 284	+ 136 570	∞	+ 136 570	+ 68 284
8 000	0,4445	+ 29,485	+ 26,505	0	+ 17,235	+ 34,470
9 000	0,5000	+ 5,333	+ 10,667	0	+ 5,333	+ 10,666
10 000	0,5556	0	+ 6,984	0	+ 2,893	+ 5,786
11 000	0,6111	− 2,184	+ 5,761	0	+ 2,100	+ 4,200
12 000	0,6667	− 3,417	+ 5,584	0	+ 1,892	+ 3,784
ω_2 = 12 728	0,7071	0	0	0	0	0
14 000	0,7778	− 4,039	+ 8,590	0	+ 3,042	+ 6,084
15 000	0,8333	+ 0,344	+ 16,087	0	+ 6,714	+ 13,428
16 000	0,8889	+ 70,240	+ 73,820	0	+ 44,648	+ 89,296
ω_3 = 16 630	0,9239	+ 11 715	+ 23 430	∞	+ 23 430	11 715
$\omega_4 = \omega_0$ = 18 000	1,0000	0	0	0	0	0

d) Wenn in allen Gliedern alle möglichen Abweichungen auftreten.

Wir erhalten dann für die von den Eigenfrequenzen genügend entfernten Frequenzen, falls die Abweichungen klein sind:



$$\mathfrak{V}(\mathfrak{a})_{12} = \frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\, n\gamma s \cdot \mathfrak{Cof}^2 \gamma s/2 \cdot \mathfrak{Cof}\, \frac{n}{2}\gamma s} \cdot \left[\sum_{\mu+1=1}^{n} \frac{\Delta \varrho_{\mu+1} \cdot s + j\omega \Delta \lambda_{\mu+1}}{\mathfrak{r} \cdot s} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \right.$$

$$\cdot \left(\mathfrak{Cof}\left(\frac{n}{2} - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2 \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{n}{2}\gamma s \right) +$$

$$\left. + \sum_{\mu+1=1}^{n+1} \frac{j\omega \Delta \varkappa_{\mu+1}}{\mathfrak{g}} \cdot \mathfrak{Cof}\,(n-\mu)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu - \frac{n}{2}\right)\gamma s \right]. \tag{66}$$

Die für die Eigenfrequenzen geltenden Ausdrücke ergeben sich dagegen nicht durch Summierung der Gleichungen, die bei Vorhandensein einer einzigen Unregelmäßigkeit bestehen. Vielmehr erhält man sie aus den Gleichungen (40), (44) und (47) nach Summierung von $\mu + 1 = 1$ bis n bzw. $n + 1$ für die Kapazitätsabweichungen.

Für die „geraden" Eigenfrequenzen ist dann:

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{a})_{12} =$$

$$\frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s} \cdot \left[\frac{\sum\limits_{\mu+1=1}^{n} \varepsilon_{\mu+1,1} \cdot \mathfrak{a}_\mu + \sum\limits_{\mu+1=1}^{n+1} \delta_{\mu+1,1} \cdot \mathfrak{b}_\mu}{\sum\limits_{\mu+1=1}^{n} \varepsilon_{\mu+1,1} \cdot \mathfrak{c}_\mu + \sum\limits_{\mu+1=1}^{n+1} \delta_{\mu+1,1} \cdot \mathfrak{d}_\mu} - \frac{\sum\limits_{\mu+1=1}^{n} \varepsilon_{\mu+1,2} \cdot \mathfrak{a}_\mu + \sum\limits_{\mu+1=1}^{n+1} \delta_{\mu+1,2} \cdot \mathfrak{b}_\mu}{\sum\limits_{\mu+1=1}^{n} \varepsilon_{\mu+1,2} \cdot \mathfrak{c}_\mu + \sum\limits_{\mu+1=1}^{n+1} \delta_{\mu+1,2} \cdot \mathfrak{d}_\mu} \right], \tag{67}$$

wobei

$$\varepsilon_{\mu+1,i} = \frac{\varrho_{\mu+1,i} \cdot s + j\omega\lambda_{\mu+1,i}}{\mathfrak{r} \cdot s} \approx \frac{\lambda_{\mu+1,i}}{L_0}, \qquad i = 1,2$$

$$\delta_{\mu+1,i} = \frac{j\omega\varkappa_{\mu+1,i}}{\mathfrak{g}} \approx \frac{\varkappa_{\mu+1,i}}{C},$$

$$\mathfrak{a}_\mu = \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \left[\mathfrak{Cof}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma s/2\right],$$

$$\mathfrak{b}_\mu = \mathfrak{Cof}\,(n-\mu)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\,\mu\gamma s,$$

$$\mathfrak{c}_\mu = \mathfrak{Sin}\left(n - \mu - \frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma s,$$

$$\mathfrak{d}_\mu = \mathfrak{Cof}\,(n-\mu)\gamma s \cdot \mathfrak{Cof}\,\mu\gamma s.$$

Es ist schwer, über die Größe dieses Ausdruckes etwas auszusagen, wenn man nicht bestimmte Annahmen über die $\varkappa$, λ und ϱ gemacht hat.

An den „ungeraden" Eigenfrequenzstellen ist:

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{a})_{12} =$$

$$\frac{K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s}{2\,\mathfrak{Sin}^2 \gamma s/2} \cdot \frac{\sum\limits_{\mu+1=1}^{n} \Delta\varepsilon_{\mu+1} \cdot \mathfrak{c}_\mu + \sum\limits_{\mu+1=1}^{n+1} \Delta\delta_{\mu+1} \cdot \mathfrak{d}_\mu}{\left(\sum\limits_{\mu+1=1}^{n} \varepsilon_{\mu+1,1} \cdot \mathfrak{c}_\mu + \sum\limits_{\mu+1=1}^{n+1} \delta_{\mu+1,1} \cdot \mathfrak{d}_\mu\right) \cdot \left(\sum\limits_{\mu+1=1}^{n} \varepsilon_{\mu+1,2} \cdot \mathfrak{c}_\mu + \sum\limits_{\mu+1=1}^{n+1} \delta_{\mu+1,2} \cdot \mathfrak{d}_\mu\right)}, \tag{68}$$

wobei

$$\Delta\, \varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_{\mu+1,1} - \varepsilon_{\mu+1,2}$$

und

$$\Delta\, \delta_{\mu+1} = \delta_{\mu+1,1} - \delta_{\mu+1,2}$$

ist. Es ist ersichtlich, daß für diese Frequenzen $\mathfrak{B}(\mathfrak{a})_{12}$ besonders hohe Werte annimmt, weil der Nenner eine Summe kleiner Größen zweiten Grades ist, die wir im Zähler gegenüber denen ersten Grades vernachlässigen konnten.

Dieses Resultat steht im Einklang mit der bekannten Erscheinung, daß die Lautstärke des „Induktionsgeräusches"[1]) in beeinflußten Fernsprechanlagen an- und abschwillt, wenn beim Anfahren einer elektrischen Lokomotive die frequenzveränderlichen Kollektoroberschwingungen des Motors ihr Spektrum durchlaufen.

Jedenfalls erkennt man, daß die Spannungsdifferenz in jedem Fall am Anfang verschwindet, wenn

$$\Delta \varrho_{\mu+1} = 0$$
$$\Delta \lambda_{\mu+1} = 0$$
$$\Delta \varkappa_{\mu+1} = 0$$

ist, d. h.

$$\varrho_{\mu+1,1} = \varrho_{\mu+1,2}$$
$$\lambda_{\mu+1,1} = \lambda_{\mu+1,2}$$

und

$$\varkappa_{\mu+1,1} = \varkappa_{\mu+1,2}$$

ist. Es genügt also zur Gewährleistung eines störungsfreien Betriebs durchaus, daß jedes einzelne Spulenfeld symmetrisch ausgeführt ist (Quersymmetrie). Es ist dagegen nicht notwendig, daß außerdem noch alle Spulenfelder unter sich gleich sind (Längsabgleich), wie es nach den Ergebnissen des 5. Abschnittes erforderlich zu sein scheint. Die Quersymmetrie genügt, ein Längsabgleich ist überflüssig.

13. Über die Strom- und Spannungsgleichung einer induktiv beeinflußten Pupinleitung mit Induktivitätsabweichungen, die Funktionen des Spulenstromes sind.

Bei der Ableitung der im 8. Abschnitt mitgeteilten Gleichungen nahmen wir an, daß die Induktivitätsabweichung von dem vorgeschriebenen Sollwert nur eine unveränderliche, etwa durch Fabrikationsfehler gegebene Größe ist. Diese Annahme trifft in Wirklichkeit deswegen nicht zu, weil die Induktivität einer Pupinspule stark von der Größe des sie durchfließenden Stromes abhängt. Bildet sich nun auf einer induktiv beeinflußten Leitung eine stehende Welle aus, so besitzen natürlich diejenigen Spulen, die mit dem Strombauch zusammenfallen, beträchtlich größere Induktivitäten als andere, die im Bereich von Knoten der Stromamplitude liegen, selbst wenn sie vorher alle vollkommen gleich große Induktivitäten hatten.

K. W. Wagner und K. Küpfmüller berichten in ihrer grundlegenden Arbeit, daß bis zu etwa 30 mA die Spuleninduktivität linear mit der Stromstärke wächst.

Für diesen Bereich sollen die folgenden Betrachtungen gelten.

Wir nehmen an, daß die Induktivität der unbelasteten Pupinspule um einen Betrag $\lambda_{\mu+1}$ von dem Regelwert L_0 abweiche.

Fließt nun ein Strom $\mathfrak{J}(\mu+1)_0$ durch die Spule, so ist ihre Induktivität

$$L_{\mu+1} = L_0 + \lambda_{\mu+1} + a \cdot (L_0 + \lambda_{\mu+1}) \cdot \mathfrak{J}(\mu+1)_0$$

wobei a eine empirisch zu bestimmende Konstante ist. Es ist demnach die Abweichung vom Sollwert:

$$\lambda'_{\mu+1} = \lambda_{\mu+1} + a \cdot (L_0 + \lambda_{\mu+1}) \cdot \mathfrak{J}(\mu+1)_0.$$

[1]) Über Meßmethoden zur Bestimmung der Größe der „Geräuschspannung" vgl. K. Küpfmüller, Wissensch. Veröffentl. a. d. Siemenskonzern, Bd. 3, 2. H., S. 153, 1924.



Der Spulenstrom $\mathfrak{J}(\mu+1)_0$ in der $\mu+1$-ten Spule berechnet sich nach Bild 8 zu:

$$\mathfrak{J}(\mu+1)_0 = \mathfrak{J}(\mu) - j\omega C \frac{s}{2} \mathfrak{V}(\mu).$$

Da mit größter Annäherung

$$j\omega C \cdot \frac{s}{2} \approx g\, s/2 = \frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2}{\mathfrak{Z}}$$

ist, kann man auch

$$\mathfrak{J}(\mu+1)_0 = \mathfrak{J}(\mu) - \frac{\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2}{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{V}(\mu)$$

setzen. Nach Einführung der Werte am Anfang der Leitung wird:

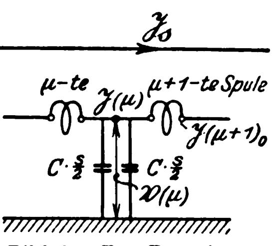


Bild 8. Zur Berechnung des Spulenstromes in der $\mu+1$-ten Spule.

$$\lambda'(\mu+1) = \lambda(\mu+1) - a \cdot \frac{L_0 + \lambda_{\mu+1}}{\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{Cof}\,\gamma\, s/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\mathfrak{V}(a) \cdot \mathfrak{Sin}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{J}(a) \cdot \mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s - K \cdot s \cdot \mathfrak{J}_s \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma\, s/2}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}\right].$$

Wenn man diesen Ausdruck an die Stelle von $\lambda_{\mu+1}$ in Gleichung (39) und (40) des 8. Abschnittes einführt, so treten zu den dort niedergeschriebenen Gleichungen noch folgende Zusatzterme hinzu:

$$a_1 = -2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot a \cdot \frac{j\omega(L_0+\lambda_{\mu+1})}{\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{Cof}\,\gamma\, s/2} \cdot \mathfrak{Cof}\left(n-\mu-\frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot$$
$$\cdot \Bigg[\mathfrak{V}(a)\cdot\mathfrak{Sin}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{J}(a)\cdot\mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s -$$
$$- \frac{K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Sin}\,\gamma s}\cdot\left(\mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma\, s/2\right)\Bigg]^2 \qquad (69)$$

zu Gleichung (39) und

$$a_2 = +2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma\, s/2 \cdot a \cdot \frac{j\omega(L_0+\lambda_{\mu+1})}{\mathfrak{Cof}\,\gamma\, s/2} \cdot \mathfrak{Sin}\left(n-\mu-\frac{1}{2}\right)\gamma s \cdot$$
$$\cdot \Bigg[\mathfrak{J}(a)\cdot\mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s - \frac{\mathfrak{V}(a)}{\mathfrak{Z}}\cdot\mathfrak{Sin}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s +$$
$$+ \frac{K\cdot s\cdot\mathfrak{J}_s}{\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma s}\cdot\left(\mathfrak{Cof}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\gamma s - \mathfrak{Cof}\,\gamma\, s/2\right)\Bigg]^2 \qquad (70)$$

zu Gleichung (40).

Berücksichtigt man diese Zusätze bei der Berechnung der am Anfang einer Leitung gegen Erde induzierten EMK oder der am Anfang einer Doppelleitung bestehenden Potentialdifferenz, so erhält man sehr komplizierte und unübersichtliche Ausdrücke.

14. Zusammenfassung.

Für die elektromagnetisch beeinflußte mit Pupinspulen ausgerüstete Kabelader ergeben sich ähnliche Leitungsgleichungen wie für das homogene Kabel, wenn man annimmt, daß die Pupinleitung aus vollkommen gleichartigen Feldern zusammengesetzt ist. Bei Berücksichtigung der Kompensationswirkung der im Kabelmantelstromkreis induzierten Ströme, die ihrerseits wieder den Aderstromkreis beeinflussen, tritt nämlich zu den bekannten Spannungs- und Stromgleichungen für die unbeein-

flußte Pupinleitung je ein Zusatzglied, das mit einem „Kopplungsfaktor“ multipliziert ist.

Trägt man aber den in Wirklichkeit immer bestehenden Abweichungen der Leitungs- und Spulenwerte von den Regelwerten Rechnung, so ergeben sich an Stelle dieser einfachen Gleichung wesentlich kompliziertere Ausdrücke.

Für höhere Frequenzen können dabei die Widerstandsungleichmäßigkeiten gegenüber den Induktivitätsabweichungen der Pupinspulen vernachlässigt werden, so daß nur diese und die der Leitungskapazitäten von Bedeutung sind.

Bei der Untersuchung der am Anfang einer aus n gleichartigen Gliedern zusammengesetzten verlustfreien Pupinleitung bestehenden induzierten Potentialdifferenz gegen Erde zeigt es sich, daß diese für alle „geraden“ Eigenfrequenzen ω_2, ω_4, ... der geschlossenen Pupinleitung verschwindet, dagegen an allen „ungeraden Eigenfrequenzen“ ω_1, ω_3, ... von $+\infty$ nach $-\infty$ springt.

Die Kenntnis der induzierten EMK am Anfang einer beeinflußten Doppelleitung ist wichtig, weil sie ein Maß für die Größe der Störung abgibt.

Nimmt man an, daß in jedem Zweig eines Feldes nur eine einzige Abweichung eines Spulen- oder Leitungswertes vorkommt, so verschwindet die induzierte EMK für alle „geraden“ Eigenfrequenzen; sie erreicht an den „ungeraden“ Eigenfrequenzstellen sehr hohe Werte, die um so höher sind, je kleiner eine der Abweichungen ist.

Bei Vorhandensein aller möglichen kleinen Abweichungen in allen n-Gliedern superponieren sich für alle von den Eigenfrequenzstellen genügend entfernten Frequenzen ihre Einflüsse auf die Höhe der am Anfang bestehenden Potentialdifferenz. Es läßt sich weiter zeigen, daß für die „ungeraden“ Eigenfrequenzen die induzierte EMK auch in diesem Falle ganz beträchtliche Werte annimmt. Dieses Resultat steht im Einklang mit der bekannten Erscheinung, daß die Lautstärke des „Induktionsgeräusches“ in beeinflußten Fernsprechanlagen an- und abschwillt, wenn die störenden Ströme, etwa die frequenzveränderlichen Oberschwingungen des Motors einer anfahrenden elektrischen Lokomotive, ihr Frequenzspektrum durchlaufen.

An den „geraden“ Eigenfrequenzstellen nimmt der Ausdruck für die induzierte EMK eine Form an, die nicht diskutiert werden kann, wenn man nicht bestimmte Annahmen über die Abweichungen von den Regelwerten macht.

Hier, wie für alle anderen Frequenzen, verschwindet die induzierte Potentialdifferenz am Anfang der Leitung, wenn die entsprechenden Abweichungen aller Spulen- und Leitungswerte für beide Zweige in jedem Gliede gleich groß sind. Diese „Quersymmetrie“ ist für einen störungsfreien Fernmeldebetrieb notwendig, ein Längsabgleich dagegen überflüssig.

Abgeschlossen am 26. Januar 1925.



Archiv für Elektrotechnik

XIV. Band. 4. Heft 1925.

Die Leitwertdiagramme des Elektronenröhrenverstärkers im Wechselstromkreis.

Von

Dr.-Ing. **Heinrich Kafka.**

Zu der interessanten Arbeit von Ollendorff im Arch. f. Elektrot. XIII. Bd., 1924, S. 274—291 erlaube ich mir im folgenden eine kleine Ergänzung zu geben.

Herr Ollendorff zeigt, daß sich die Endpunkte des Gitterstrom- und des Anodenstromvektors eines Röhrenverstärkers unter gewissen Voraussetzungen auf Kreisen bewegen.

Einen noch besseren Einblick in die geometrischen Zusammenhänge erhält man, wenn man auf die Leitwertdiagramme zurückgeht. Als Beispiel soll das Leitwertdiagramm für den Gitterstrom $\mathfrak{J}_g$ unter Zugrundelegung der in der Originalarbeit aufgestellten Grundgleichungen

$$\mathfrak{J}_g = j\,\mathfrak{E}_g\,\omega\,C_G + j\,\mathfrak{E}_a\,\omega\,C_{ag} \tag{1}$$

und

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{E}_g\,(S - j\,\omega\,C_{ag}) - \mathfrak{E}_a\,(G_i + j\,\omega\,C_A) \tag{2}$$

abgeleitet werden.

Bedeutung der Bezeichnungen.

$\mathfrak{E}_g$ Zeitvektor der Gitterspannung (Effektivwert), kurz Gitterspannung,
$\mathfrak{J}_g$ Gitterstrom,
$\mathfrak{E}_a$ Anodenspannung,
$\mathfrak{J}_a$ Anodenstrom,
S Steilheit,
D Durchgriff,
$G_i = S\,D$ Innerer Wirkleitwert der Röhre,
C_{ag} Teilkapazität zwischen Anode und Gitter,
C_{ak} Teilkapazität zwischen Anode und Kathode,
C_{gk} Teilkapazität zwischen Gitter und Kathode,
$C_A = C_{ag} + C_{ak}$,
$C_G = C_{ag} + C_{gk}$,
$\omega = 2\,\pi\,f$ Kreisfrequenz.

Wenn wir die Anodenbelastung der Röhre durch den Leitwert $\mathfrak{y}_a = g_a + j\,b_a$ charakterisieren und dementsprechend

$$\mathfrak{E}_a = \frac{\mathfrak{J}_a}{\mathfrak{y}_a} \tag{3}$$

setzen, erhalten wir aus (2) die Beziehungen

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{E}_g \frac{(S - j\,\omega\,C_{ag})\,\mathfrak{y}_a}{G_i + j\,\omega\,C_A + \mathfrak{y}_a} \tag{4}$$

und

$$\mathfrak{E}_a = \frac{\mathfrak{J}_a}{\mathfrak{y}_a} = \mathfrak{E}_g \frac{S - j\,\omega\,C_{ag}}{G_i + j\,\omega\,C_A + \mathfrak{y}_a} \tag{5}$$

Setzen wir den Ausdruck (5) in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\mathfrak{J}_g = \mathfrak{E}_g \left[j\omega C_G + \frac{j\omega C_{ag}(S - j\omega C_{ag})}{G_i + j\omega C_A + \mathfrak{y}_a} \right]. \tag{6}$$

Der Klammerausdruck stellt den Leitwert

$$\mathfrak{Y}_g = j\omega C_G + \frac{j\omega C_{ag}(S - j\omega C_{ag})}{G_i + j\omega C_A + \mathfrak{y}_a} \tag{7}$$

für den Gitterstrom $\mathfrak{J}_g$ dar. Dieser Leitwert setzt sich aus zwei Summanden zusammen. Der erste, $j\omega C_G$, ist konstant und entspricht dem Fall, daß $\mathfrak{y}_a = \infty$ wird; es ist dann nach (3) $\mathfrak{E}_a = 0$ (Kurzschluß der Röhre). Der zweite Summand ist mit der äußeren Belastung $\mathfrak{y}_a$ veränderlich und läßt sich, wenn diese gegeben ist, durch Inversion des im Nenner des Bruchs stehenden Ausdrucks ermitteln. Wir wollen dies an einem Beispiel zeigen, dem wir die in dem Beispiel der Originalarbeit angenommenen Zahlenwerte zugrunde legen:

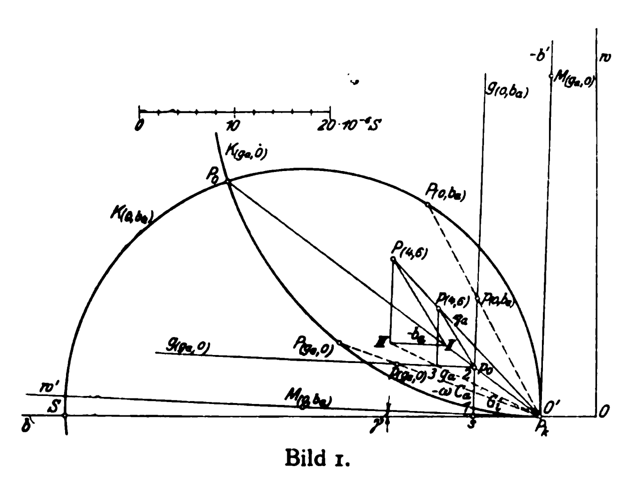


Bild 1.

$$S = 10^{-4}\,S = 100 \cdot 10^{-6}\,S,$$
$$D = 0{,}07,$$
$$G_i = S\,D = 7 \cdot 10^{-6}\,S,$$
$$C_{ag} = 10\,\text{cm} = \frac{10}{0{,}9} \cdot 10^{-12}\,F,$$
$$C_A = 14\,\text{cm} = \frac{14}{0{,}9} \cdot 10^{-12}\,F,$$
$$C_G = 17\,\text{cm} = \frac{17}{0{,}9} \cdot 10^{-12}\,F,$$
$$f = 50000,$$
$$\omega = 2\pi f = 0{,}314 \cdot 10^{-6}.$$

Zur graphischen Darstellung der Leitwerte verwenden wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit vertikaler Wirkachse w (oben + 1) und horizontaler Blindachse b (links + j) (s. Bild 1). In dieses Koordinatensystem tragen wir zunächst in Richtung der positiven Blindachse den dem Kurzschluß der Röhre entsprechenden konstanten Leitwert

$$\overrightarrow{OP_k} = j\omega C_G = j\,5{,}94 \cdot 10^{-6}\,S \tag{8}$$

in dem im Bild 1 angegebenen Leitwertmaßstab ein.

An $\overrightarrow{OP_k}$ ist der mit $\mathfrak{y}_a$ veränderliche Leitwert

$$\mathfrak{Y}_g' = \frac{j\omega C_{ag}(S - j\omega C_{ag})}{G_i + j\omega C_A + \mathfrak{y}_a} \tag{9}$$

anzuschließen, der, wie bereits bemerkt, durch Inversion des Nennerausdrucks

$$\mathfrak{Y}_v = G_i + j\omega C_A + \mathfrak{y}_a$$

erhalten werden kann. Die bei der Inversion erhaltenen Widerstandsgrößen $\frac{1}{\mathfrak{Y}_v}$ sind aber noch mit dem Zählerausdruck

$$\mathfrak{P} = j\omega C_{ag}(S - j\omega C_{ag}),$$

den wir „Inversionspotenz" nennen wollen, zu multiplizieren. Diese Multiplikation stellt geometrisch betrachtet eine Drehstreckung dar. Die Drehung wird durch das Argument

$$\varphi(\mathfrak{P}) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{-\omega C_{ag}}{S} \tag{12}$$

und die Streckung durch den Betrag

$$P = \omega C_{ag} \sqrt{S^2 + \omega^2 C_{ag}^2} \tag{13}$$

der Inversionspotenz bestimmt.

Statt die bei der Inversion erhaltenen Widerstandsgrößen $\frac{1}{\mathfrak{Y}_v}$ jedesmal um den $\sphericalangle \varphi(\mathfrak{P})$ zu drehen, ist es einfacher, die ganze Inversionskonstruktion um diesen Winkel zu drehen. Wir führen zu diesem Zweck ein neues Koordinatensystem $w'b'$ mit dem Ursprung $O' \equiv P_k$ ein, das gegen w, b um den $\sphericalangle \varphi(\mathfrak{P})$ gedreht ist, und tragen in dieses die zu inversierenden Leitwerte $\mathfrak{Y}_v$ ein. Die bei der Inversion erhaltenen Widerstandsgrößen $\frac{1}{\mathfrak{Y}_v}$ sind dann nur mit dem Betrag P der Inversionspotenz zu multiplizieren, um die Leitwerte $\mathfrak{Y}_g'$ zu erhalten.

Um die Konstruktion zu vereinfachen, empfiehlt es sich, in das Koordinatensystem w', b' die an der Wirkachse w' gespiegelten Leitwerte

$$\check{\mathfrak{Y}}_v = G_i - j\omega C_A + \check{\mathfrak{y}}_a \tag{14}$$

einzutragen, da deren Argumente mit jenen der inversierten Größen $\frac{1}{\mathfrak{Y}_v}$ zusammenfallen.

Die Richtung der w'-Achse, die mit der w-Achse den Winkel $\varphi(\mathfrak{P})$ einschließt, ergibt sich nach (12) in der Weise, daß von der positiven b-Achse (die gegenüber der positiven w-Achse um den $\sphericalangle \frac{\pi}{2}$ im positiven Sinn verdreht ist) ein Winkel abgetragen wird, dessen Tangente durch das Verhältnis $\frac{-\omega C_{ag}}{S}$ bestimmt ist. Dieser Winkel ist von der positiven b-Achse aus im negativen Sinn abzutragen. Die Tangente des Winkels γ, den die positive w'-Achse mit der positiven b-Achse einschließt, ist dementsprechend

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega C_{ag}}{S} = \frac{3{,}49}{100}. \tag{15}$$

Die gespiegelten Leitwerte $\check{\mathfrak{Y}}_v$, die in das Koordinatensystem w', b' einzutragen sind, setzen sich aus dem konstanten Teil $G_i - j\omega C_A$ und dem der Anodenbelastung entsprechenden gespiegelten Leitwert $\check{\mathfrak{y}}_a = g_a - j b_a$ zusammen. Wir tragen also in Richtung der positiven w'-Achse den Wirkleitwert

$$\overrightarrow{P_k 1} = G_i \tag{16}$$

und in Richtung der $-$b'-Achse den Blindleitwert

$$\overrightarrow{12} = -j\omega C_A \tag{17}$$

ein. An $\overrightarrow{P_k 2}$ ist der der Anodenbelastung entsprechende gespiegelte Leitwert

$$\overline{2p} = g_a - j b_a \tag{18}$$

anzuschließen.

Wir haben nun hinsichtlich der Art der Anodenbelastung zwei wichtige Grenzfälle zu unterscheiden:

1. Reine Wirklast: $g_a = 0 \div \infty, b_a = 0.$

Der Endpunkt $p_{(g_a, 0)}$ des gespiegelten Leitwerts $\check{\mathfrak{Y}}_v$ bewegt sich bei reiner Wirklast auf der Geraden $g_{(g_a, 0)}$, die durch den Punkt 2 parallel zur w'-Achse verläuft. Die Inversion dieser Geraden in bezug auf den Pol $O' \equiv P_k$ ergibt einen Kreis, der durch den Pol O' geht und dessen Mittelpunkt auf der $-$b'-Achse liegt. Der

Durchmesser dieses Kreises ist durch den reziproken Wert des kürzesten Abstands $\overline{12} = \omega C_A$ der Geraden $g_{(ga,0)}$ vom Pol O' bestimmt.

Die Vektoren von O' nach dem Kreise stellen, auf das Koordinatensystem w'b' bezogen, die Widerstandsgrößen $\frac{1}{\mathfrak{Y}_v}$ dar. Um die Leitwerte $\mathfrak{Y}_g'$ zu erhalten, haben wir diese Vektoren nach den Ausführungen auf Seite 295 mit dem Betrag P der Inversionspotenz [s. (13)] zu multiplizieren. Dementsprechend ist auch der Durchmesser des Kreises für $\frac{1}{\mathfrak{Y}_v}$ mit P zu multiplizieren, um den Durchmesser des Kreises $K_{(ga,0)}$ zu erhalten, den der Leitwert $\mathfrak{Y}_g'$ bei veränderlichem g_a und $b_a = 0$ beschreibt. Dieser Durchmesser ist daher

$$2\,R_{(ga,0)} = \frac{\omega C_{ag} \sqrt{S^2 + \omega^2 C_{ag}^2}}{\omega C_A} = 71{,}4 \cdot 10^{-6}\,S. \tag{19}$$

Die den einzelnen Werten von g_a entsprechenden Kreispunkte $P_{(ga,0)}$ ergeben sich im Schnitt der Verbindungsgeraden $O'p_{(ga,0)}$ mit dem Kreis. Für $g_a = 0$ fällt der Punkt $p_{(ga,0)}$ mit dem Punkt 2 zusammen. Da in diesem gleichzeitig $b_a = 0$ ist, entspricht der Punkt 2 dem Offenlauf der Röhre, aus welchem Grund wir ihn auch mit p_0 bezeichnen. Die Verbindungsgerade $O'p_0$ schneidet den Leitwertkreis $K_{(ga,0)}$ im Punkt P_0. Dem Wert $g_a = \infty$ (Kurzschluß der Röhre) entspricht der unendlich ferne Punkt der Geraden $g_{(ga,0)}$; der inverse Punkt desselben ist der Pol $O' \equiv P_k$, von dem wir ja schon wissen, daß er den Kurzschlußpunkt der Röhre darstellt.

Die Vektoren von O nach dem Kreise $K_{(ga,0)}$ stellen die Leitwerte $\mathfrak{Y}_g$ für den Gitterstrom $\mathfrak{J}_g$ unter den angenommenen Belastungsverhältnissen dar.

2. **Reine Blindlast:** $g_a = 0, b_a = \pm\infty$.

Ganz entsprechende Überlegungen führen zu dem Ergebnis, daß sich der Leitwert $\mathfrak{Y}_g'$ bei veränderlichem b_a und $g_a = 0$ auf einem Kreise $K_{(0,ba)}$ bewegt, der durch die Punkte $O' \equiv P_k$ und P_0 geht und dessen Mittelpunkt $M_{(0,ba)}$ auf der w'-Achse liegt. Sein Durchmesser ist

$$2\,R_{(0,ba)} = \frac{\omega C_{ag} \sqrt{S^2 + \omega^2 C_{ag}^2}}{G_i} = 49{,}9 \cdot 10^{-6}\,S. \tag{20}$$

Herr O. behandelt in seiner Arbeit auch den Fall von Anodenbelastungen mit Leitwerten, bei denen sich nur der Betrag verändert, während das Argument konstant bleibt. Der Endpunkt p des gespiegelten Leitwerts $\check{\mathfrak{Y}}_v$ [s. (14)] bewegt sich dann auf einer Geraden durch den Punkt $2 \equiv p_0$, deren Neigung gegenüber der w'-Achse durch das Argument von $\check{\mathfrak{y}}_a$ bestimmt ist. Die Inversion dieser Geraden in bezug auf den Pol O' ergibt nach Multiplikation mit P [s. (13)] einen Kreis, der durch die Punkte $O' \equiv P_k$ und P_0 geht und dessen Mittelpunkt auf der Senkrechten liegt, die durch O' auf die Gerade gefällt wird. Da jedem Wert des Arguments $\varphi(\mathfrak{y}_a)$ ein solcher Kreis entspricht, erhalten wir bei Veränderung dieses Arguments eine Schar von Kreisen, die sich in den Punkten $O' \equiv P_k$ und P_0 schneiden.

Die Annahme von Belastungen durch Leitwerte mit konstantem Argument erscheint wohl für praktische Zwecke zu künstlich. Die gleiche Annahme wurde seinerzeit auch bei der Behandlung des gewöhnlichen Wechselstromtransformators gemacht und hat dort zu dem Trugschluß geführt, daß sich der Stromvektor eines Transformators bei konstanter primärer Klemmenspannung stets auf einem Kreise bewegt.

Eine allgemeine Anodenbelastung ist durch irgendeinen Wert von $\mathfrak{y}_a = g_a + j\,b_a$ zu charakterisieren: Der an der w'-Achse gespiegelte Wert $\check{\mathfrak{y}}_a = g_a - j\,b_a$ ist dann



in Bild 1 vom Punkte 2 einzutragen, um den Punkt $p_{(g_a, b_a)}$ zu erhalten. In Bild 1 ist z. B. der Punkt $p_{(4,6)}$ eingetragen, der den Werten $g_a = 4 \cdot 10^{-6}$ S und $\check{b}_a = 6 \cdot 10^{-6}$ S entspricht. Der Vektor $\overrightarrow{O'p_{(4,6)}}$ stellt den gespiegelten Leitwert $\mathfrak{Y}_v$ für die angegebenen Werte dar. Durch Inversion dieses Vektors erhalten wir nach Multiplikation mit P den Vektor $\overrightarrow{O'P_{(4,6)}}$, wobei allgemein

$$\overline{O'P} = \frac{P}{\overline{O'p}} = \frac{\omega C_{ag} \sqrt{S^2 + \omega^2 C_{ag}^2}}{\overline{O'p}}. \tag{21}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{O'P}$ stellen die Leitwerte $\mathfrak{Y}_g'$ [s. (9)] und die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ die Leitwerte $\mathfrak{Y}_g$ [s. (7)] für den Gitterstrom $\mathfrak{J}_g$ dar.

Der besondere Vorteil der im vorstehenden behandelten Darstellungsart besteht darin, daß die Leitwerte g_a und b_a, die die Anodenbelastung charakterisieren, unmittelbar in die Konstruktion eingehen, so daß deren Einfluß auf den Leitwert $\mathfrak{Y}_g$ und damit auf den Gitterstrom $\mathfrak{J}_g$ leicht übersehen werden kann.

Übergang zum Stromdiagramm bei konstanter Gitterspannung $\mathfrak{E}_g$.

Wir wollen den Zeitvektor der konstanten Gitterspannung in die Wirkachse w legen. Da das Argument desselben dann gleich 0 ist, können wir ihn mit einem lateinischen Buchstaben (E_g) bezeichnen. Bei dieser Voraussetzung ist der Gitterstrom durch die Gleichung

$$\mathfrak{J}_g = E_g \mathfrak{Y}_g \tag{22}$$

bestimmt.

Diese Gleichung besagt, daß sich die Gitterströme $\mathfrak{J}_g$ durch Multiplikation der Leitwerte $\mathfrak{Y}_g$ mit dem Betrag E_g der konstanten Gitterspannung ergeben. Die Gitterströme haben also die gleiche Richtung wie die Leitwerte $\mathfrak{Y}_g$ und sind diesen direkt proportional. Wir können daher auch das Leitwertdiagramm als Stromdiagramm für konstante Gitterspannung E_g auffassen, müssen es aber dann in einem der konstanten Gitterspannung entsprechenden Strommaßstab[1]) ausmessen. Die im Strommaßstabe gemessenen Strecken wollen wir durch den unteren Zeiger „Strom" von den im Leitwertmaßstab gemessenen unterscheiden.

Im Stromdiagramm ist

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OP}_{\text{Strom}} &= \mathfrak{J}_g \text{ Gitterstrom,} \\ \overrightarrow{OP_k}_{\text{Strom}} &= \mathfrak{J}_{gk} = j E_g \omega C_G \text{ Gitterstrom bei Kurzschluß der Röhre,} \\ \overrightarrow{OP_0}_{\text{Strom}} &= \mathfrak{J}_{g\,l} \text{ Gitterstrom bei Offenlauf der Röhre.} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{P_k P}_{\text{Strom}}$ sind, wie sich leicht zeigen läßt, den Anodenspannungen $\mathfrak{E}_a$ proportional. Nach (1) ist nämlich

$$I_g - j \mathfrak{E}_g \omega C_G = j \mathfrak{E}_a \omega C_{ag}.$$

Wenn wir die Gitterspannung in die Wirkachse w legen, können wir diese Gleichung mit Benützung der Ausdrücke (23) folgendermaßen schreiben:

$$\overrightarrow{OP}_{\text{Strom}} - \overrightarrow{OP_k}_{\text{Strom}} = \overrightarrow{P_k P}_{\text{Strom}} = j \mathfrak{E}_a \omega C_{ag}; \tag{24}$$

daraus ergibt sich

$$\mathfrak{E}_a = -j \frac{\overrightarrow{P_k P}_{\text{Strom}}}{\omega C_{ag}}. \tag{24a}$$

[1]) Für $E_g = 1$ V stimmt der Amperemaßstab zahlenmäßig mit dem Siemensmaßstab überein.

Die Anodenspannungen $\mathfrak{E}_a$ sind demnach gegenüber den Vektoren $\overrightarrow{P_k P}_{Strom}$ um den $\measuredangle \frac{\pi}{2}$ im negativen Sinn verdreht. Ihr Betrag wird durch Division der im Strommaßstab gemessenen Strecken $\overrightarrow{P_k P}_{Strom}$ durch ωC_{ag} erhalten.

Leistungsbeziehungen und graphische Darstellung derselben.

Wenn wir die Gleichung (1) skalar mit $\mathfrak{E}_g$ und die Gleichung (2) skalar mit $\mathfrak{E}_a$ multiplizieren, erhalten wir die folgenden Ausdrücke für die Gitterwirkleistung N_g und die Anodenwirkleistung N_a:

$$N_g = \mathfrak{E}_g \cdot \mathfrak{J}_g = j\,\mathfrak{E}_a\,\omega\,C_{ag} \cdot \mathfrak{E}_g = -j\,\mathfrak{E}_g\,\omega\,C_{ag} \cdot \mathfrak{E}_a \tag{25}$$

$$N_a = \mathfrak{E}_a \cdot \mathfrak{J}_a = S\,\mathfrak{E}_g \cdot \mathfrak{E}_a - j\,\mathfrak{E}_g\,\omega\,C_{ag} \cdot \mathfrak{E}_a - E_a^2 G_i = N_g + S\,\mathfrak{E}_g \cdot \mathfrak{E}_a - E_a^2 G_i. \tag{26}$$

Das Verhältnis der Anodenwirkleistung N_a zur Gitterwirkleistung N_g stellt den Verstärkungsgrad

$$\eta_v = \frac{N_a}{N_g} \tag{27}$$

der Röhre dar.

Im Stromdiagramm stellen die Ordinaten $w(P)_{Strom}$ der Punkte P die Wirkströme dar, die bei konstanter Gitterspannung E_g den Gitterwirkleistungen N_g proportional sind. Wir können daher schreiben:

$$N_g = E_g\,w\,(P)_{Strom} \tag{28}$$

oder

$$w\,(P)_{Strom} = \frac{N_g}{E_g}. \tag{28a}$$

Um die Gitterwirkleistungen N_g zu erhalten, sind nach (28) die im Strommaßstabe gemessenen Ordinaten $w(P)_{Strom}$ der Punkte P mit dem Betrag E_g der Gitterspannung zu multiplizieren.

Wir wollen nun zeigen, daß sich auch die Anodenwirkleistungen

$$N_a = \mathfrak{E}_a \cdot I_a = E_a^2 g_a \tag{26a}$$

im Stromdiagramm darstellen lassen. Zu diesem Zweck konstruieren wir in Bild 1 das Dreieck P II III, dessen Seiten zu jenen des Dreiecks p 2 3 parallel sind. Die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte der beiden Dreiecke schneiden sich im Punkte $O' \equiv P_k$. Es verhält sich nun

$$\overline{P\,II}_{Strom} : \overline{P_k P}_{Strom} = \overline{p\,2} : \overline{P_k p}.$$

Wenn wir in dieser Proportion nach (21)

$$\overline{P_k p} = E_g \frac{\omega C_{ag} \sqrt{S^2 + \omega^2 C_{ag}^2}}{\overline{P_k P}_{Strom}}$$

(es ist $O' \equiv P_k$ und $\overline{P_k P}_{Strom} = E_g \overline{P_k P}$) setzen, erhalten wir aus ihr für $\overline{P\,II}_{Strom}$ den Ausdruck

$$\overline{P\,II}_{Strom} = \overline{P_k P}^2_{Strom} \frac{y_a}{E_g} \frac{1}{\omega C_{ag} \sqrt{S^2 + \omega^2 C_{ag}^2}}. \tag{29}$$

Da nach (24)

$$\overline{P_k P}_{Strom} = E_a\,\omega\,C_{ag}$$

und nach (15)

$$\sin\gamma = \frac{\omega C_{ag}}{\sqrt{S^2 + \omega^2 C_{ag}^2}},$$

können wir den Ausdruck (29) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\overline{P\,II}_{Strom} = \frac{E_a^2 y_a}{E_g} \sin\gamma. \tag{29a}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke P II III und p 2 3 folgt, daß

$$\overline{\text{II III}}_{\text{Strom}} = \frac{E_a^2 g_a}{E_g} \sin \gamma = \frac{N_a}{E_g} \sin \gamma. \tag{30}$$

Nach dieser Gleichung mißt die Strecke

$$\frac{\overline{\text{II III}}_{\text{Strom}}}{\sin \gamma} = \frac{N_a}{E_g} \tag{30a}$$

die Anodenwirkleistung $N_a = E_a^2 g_a$ in demselben Maßstab wie die Strecke $w(P)_{\text{Strom}}$ die Gitterwirkleistung N_g [s. (28a)].

Die Strecke $\frac{\overline{\text{II III}}}{\sin \gamma}$ läßt sich aus der Strecke $\overline{\text{II III}}$ graphisch ermitteln, welches Verfahren aber für praktische Zwecke wegen der Kleinheit des Winkels γ zu ungenau ist. Es wird sich daher empfehlen, die Strecke $\overline{\text{II III}}_{\text{Strom}}$ dem Diagramm zu entnehmen und die Division durch $\sin \gamma$ mit dem Rechenschieber auszuführen.

Der Verstärkungsgrad η_v [s. (27)] läßt sich nach (30a) und (28a) durch das Verhältnis der Strecken $\frac{\overline{\text{II III}}}{\sin \gamma}$ zu den Ordinaten w (P) oder durch das diesem gleiche Verhältnis der Strecken $\frac{\overline{23}}{\sin \gamma}$ zu den Ordinaten w(p) darstellen:

$$\eta_v = \frac{\overline{\text{II III}}}{w(P) \sin \gamma} = \frac{\overline{23}}{w(p) \sin \gamma}. \tag{31}$$

Da nach Bild 1 $\overline{23} = g_a$ und

$$w(p) = (G_i + g_a) \sin \gamma + (\omega C_A + b_a) \cos \gamma,$$

ist auch

$$\eta_v = \frac{g_a}{[(G_i + g_a) \sin \gamma + (\omega C_A + b_a) \cos \gamma] \sin \gamma}. \tag{31a}$$

Die Bedingung für nfache Verstärkung ist nach (31a)

$$\frac{g_a}{\sin \gamma} = n[(G_i + g_a) \sin \gamma + (\omega C_A + b_a) \cos \gamma]. \tag{32}$$

Für einen bestimmten Wert von n stellt der vorstehende Ausdruck die Gleichung einer Geraden dar. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Geraden für verschiedene Werte von n sämtlich durch den Punkt s gehen, der sich im Schnitt der Verbindungsgeraden 12 mit der b-Achse ergibt. Nach Bild 1 ist

$$\overline{P_k s} = \frac{G_i}{\cos \gamma} = \frac{G_i \sqrt{S^2 + \omega^2 C_{ag}^2}}{S}. \tag{33}$$

Die Gerade s 12 selbst entspricht dem Verstärkungsgrad $\eta_v = 0$, da auf ihr g_a und damit $N_a = E_a^2 g_a$ gleich 0 ist. Für die durch s gezogene Parallele zur w-Achse ergibt sich $\eta_v = 1$. Für die b-Achse ist schließlich $\eta_v = \infty$, da auf dieser die den Gitterwirkleistungen N_g proportionalen Ordinaten w (P) verschwinden, so daß $\eta_v = \frac{N_a}{N_g}$ unendlich groß wird.

Wenn wir eine Parallele zur b-Achse ziehen, so erhalten wir auf dieser eine lineare Skala für den Verstärkungsgrad η_v, deren Einheit durch den Abstand der Schnittpunkte der Geraden für $\eta_v = 0$ und $\eta_v = 1$ mit der genannten Parallelen bestimmt ist. Diese Skala ist in Bild 2 dargestellt, wobei der Deutlichkeit wegen der Winkel γ größer als in Bild 1 angenommen wurde.

Mit Hilfe der Skala für den Verstärkungsgrad η_v läßt sich der Einfluß der Anodenbelastung auf den Verstärkungsgrad leicht übersehen. Es können auch die



Belastungsbedingungen für besondere Betriebsverhältnisse ermittelt werden. So ist z. B. der Beginn der Selbsterregung dadurch charakterisiert, daß η_v über den Wert ∞ negative Werte annimmt. Die Grenzbedingung hierfür lautet nach (31 a)

$$w(p) = (G_i + g_a)\sin\gamma + (\omega C_A + b_a)\cos\gamma = 0. \tag{34}$$

Die Inversion des Geradenbüschels durch S in bezug auf den Pol $O' \equiv P_k$ ergibt nach Multiplikation mit P eine Schar von Kreisen, die durch den Pol O' und den zu s inversen Punkt S gehen. Es läßt sich zeigen, daß dieser Punkt S mit dem zweiten Schnittpunkt des Kreises $K_{(J, b_a)}$ mit der b-Achse identisch ist.

Dabei ist

$$\overline{P_k S} = \frac{P}{\overline{P_k s}} = \frac{\omega C_{ag}}{t\, D}. \tag{35}$$

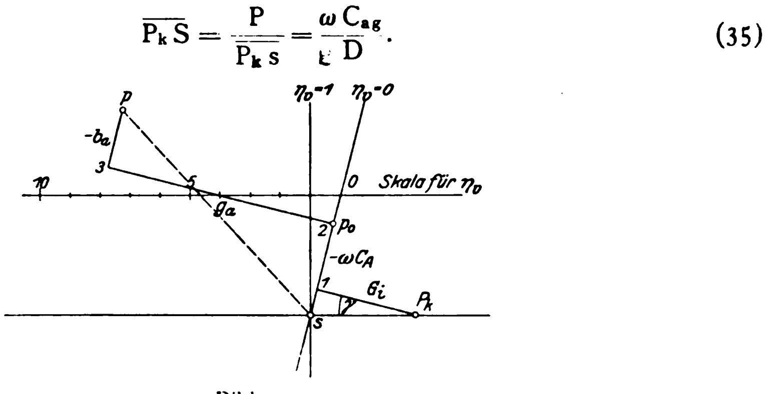


Bild 2.

Jeder dieser Kreise entspricht einem bestimmten konstanten Verstärkungsgrad η_v. Der Einfluß der Anodenbelastung auf η_v läßt sich aber einfacher mit Hilfe des Geradenbüschels durch s übersehen.

Ähnlich wie für den Leitwert $\mathfrak{Y}_g$ läßt sich auch das Diagramm für den Leitwert $\frac{\mathfrak{E}_g}{\mathfrak{J}_a}$ aufstellen, das bei konstanter Gitterspannung E_g in der w-Achse auch als Stromdiagramm für den Anodenstrom $\mathfrak{J}_a$ angesehen werden kann. Auch hierbei gehen die veränderlichen Leitwerte g_a und b_a, die die Anodenbelastung charakterisieren, unmittelbar in die Konstruktion ein.

Ein neuer Apparat zur Messung magnetischer Felder.

Von

F. Schröter, Godesberg.

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Einleitung.

Bei physikalischen und elektrotechnischen Untersuchungen ist es oft erwünscht, magnetische Felder nach Größe und Richtung zu kennen. Ihre Berechnung gelingt nur in seltenen Fällen mit hinreichender Genauigkeit, da die Felderzeuger — z. B. Spulen oder Magnete — den Anforderungen an Gleichmäßigkeit meist nicht genügen oder durch ihre Gestalt eine rechnerische Behandlung sehr erschweren. Man denke z. B. an die Felder unter den Haupt- und Wendepolen elektrischer Maschinen, bei denen Ankerrückwirkung und Streuung zu beachten sind, oder an die Felder im Luftspalt kleiner Zählerbremsmagnete, die der Rechnung infolge der Magnetform

in vielen Fällen kaum zugänglich sein dürften. Selbst bei dem verhältnismäßig einfachen Fall des Feldes am Ende einer langen Spule kann der errechnete Wert infolge von Unregelmäßigkeiten in der Wicklung nicht unerheblich von der Wirklichkeit abweichen.

Man sieht daher in solchen Fällen auch meist von der Rechnung ab und bestimmt das unbekannte Feld durch Messung. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen. Man mißt z. B. ballistisch die Wirkung, die durch Kommutierung des Feldes in einer Prüfspule hervorgerufen wird. Falls diese Kommutierung nicht möglich ist, zieht man die Spule aus dem Feld heraus oder dreht sie um und mißt in gleicher Weise. Oder man stellt die Widerstandsänderung fest, die ein Leiter aus Wismut im magnetischen Felde erfährt, und entnimmt die zugehörige Feldstärke einer Eichkurve. In beiden Fällen kann man durch geeignete Ausbildung der Prüfspule bzw. der Wismutspirale noch Felder in recht engen Spalten ausmessen. Doch müssen auch da gewisse Nachteile in Kauf genommen werden.

Die Wismutspirale, deren Widerstandsänderung im magnetischen Felde bestimmt wird, erlaubt eine einigermaßen genaue Messung erst, wenn die Feldstärke wenigstens 1000 Gauß beträgt. Außerdem gibt sie nur die Größe, aber nicht die Richtung des Feldes an, was man je nachdem als Vorzug oder als Nachteil empfinden wird. Ferner ist die Temperatur der Spirale zu berücksichtigen. Und endlich verlangt die Auswertung der Messung immerhin einige Rechnung und die Benutzung einer Eichkurve, was bei einer großen Anzahl von Messungen etwas unbequem wird.

Die ballistischen Verfahren haben gegenüber der Wismutspirale den Vorzug eines größeren Meßbereiches, den man durch Verwendung von Spiegelgalvanometern noch erheblich steigern kann. In der Technik hat man sich jedoch mit ballistischen Galvanometern noch nicht sehr befreundet, was wohl zum Teil daran liegen mag, daß diese Instrumente keinen Dauerausschlag geben. Spezialkonstruktionen (überaperiodisch gedämpfte Systeme), die in diesem Punkte einen großen Fortschritt zeigen, sind teuer und lassen sich im allgemeinen nicht gut für andere Zwecke verwenden. Auch sind Spiegelgalvanometer zu feine Apparate, als daß man sie z. B. im Prüffeld einer Fabrik benutzen könnte.

Ein weiterer Nachteil der ballistischen Methode liegt darin, daß man die Prüfspule bewegen muß, wenn man das Feld nicht kommutieren kann. Eine Drehung der Spule erfordert Platz, der nicht immer vorhanden ist; beim Herausziehen der Spule aus dem zu messenden Feld können aber andere im Wege liegende Felder stören, ganz abgesehen davon, daß dies Verfahren in der Nähe bewegter Massen — z. B. unter den Polen einer laufenden Maschine — immer die Gefahr des Anstreifens und damit der Zerstörung der Spule mit sich bringt.

Im folgenden soll nun ein Apparat beschrieben werden, der in einfacher Weise die Messung der magnetischen Feldstärke nach Größe und Richtung erlaubt, und zwar von etwa 10 Gauß an aufwärts bis zu Feldern beliebiger Größe.

Prinzip des neuen Apparates.

Der neue Apparat benutzt zur Messung eines Magnetfeldes die Deformation, die ein stromführender Leiter in ihm erleidet.

Die Art und Weise, in der das geschieht, ist in Bild 1 schematisch dargestellt. In dem zu untersuchenden homogenen Felde $\mathfrak{H}$ befindet sich ein biegsamer, stromführender Leiter l, der an den beiden Federn f befestigt ist. Der von der Batterie e kommende Strom wird durch das Meßinstrument a bestimmt. Zur Messung kann ein gewöhnliches Amperemeter dienen. Der Strom wird durch Regulierung des Widerstandes r so lange verstärkt, bis der Leiter l durch die auf ihn wirkende Kraft soweit durchgebogen wird, daß er einen der Kontakte k berührt. Der Kontakt-



schluß wird im Telephon t gehört. Den Kontaktkreisstrom liefert das kleine Induktorium i. Über den Vorteil, den die Anwendung eines Induktoriums bietet, wird noch weiter unten gesprochen werden.

Bei fest eingestelltem Kontaktabstand bleibt unter sonst gleichen Bedingungen die zum Kontaktschluß erforderliche mechanische Kraft K_1 bei allen Messungen konstant. Die auf den Leiter wirkende elektromagnetische Kraft ist nun

$$K_2 = c \cdot J \cdot \mathfrak{H}_1. \tag{1}$$

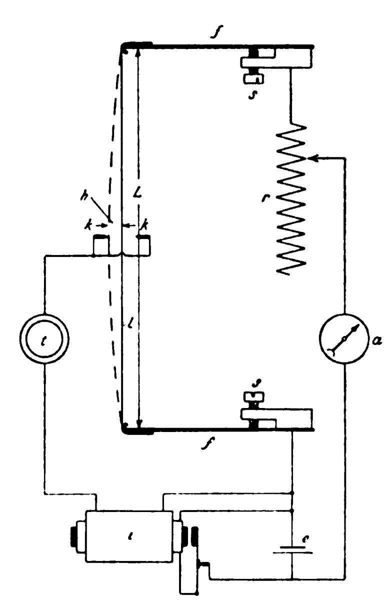


Bild 1. Schaltungsschema.

Hierbei ist J der durch den Leiter fließende Strom und $\mathfrak{H}_1$ die Komponente des Magnetfeldes, welches senkrecht auf der Zeichenebene und damit auch auf dem Leiter steht, während c eine Konstante bedeutet. Bei Kontaktschluß ist $K_2 = K_1 =$ konst. Demnach gilt

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{K_1}{c \cdot J} = C \cdot \frac{1}{J}, \tag{2}$$

wobei C eine neue Konstante ist.

Das wirksame Feld $\mathfrak{H}_1$ ist also dem Strom J umgekehrt proportional; dies gestattet auf einer entsprechend geteilten Amperemeterskala die direkte Ablesung der Feldstärke $\mathfrak{H}_1$ am Instrument ohne jede Rechnung.

Wird der Leiter als Band ausgebildet, so kann er sich im wesentlichen nur in einer Ebene durchbiegen und somit auch nur die senkrecht auf dieser Ebene stehende Komponente $\mathfrak{H}_1$ des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ anzeigen. Durch die Ausführung der Messung in drei verschiedenen Lagen läßt sich dann die Richtung der Feldlinien im Raume in einfacher Weise bestimmen.

Konstruktive Fragen.

Es fragt sich nun, welche Faktoren für den Meßbereich des Apparates, seine Meßgenauigkeit und Störungsfreiheit fremden Einflüssen gegenüber von Bedeutung sind.

Der wichtigste Konstruktionsteil ist das Band l. Sowohl Material wie Formgebung sind bei ihm von großer Bedeutung. Das Band muß einmal ohne übermäßige Erwärmung eine hohe Stromstärke vertragen, damit auch schwache Felder noch gemessen werden können [s. Gleichung (2)]. Der spezifische Widerstand des Materials muß also klein sein. Ferner muß es sich leicht durchbiegen lassen, damit ein möglichst großer Teil der Kraft K_1 noch zur Deformation der Federn f übrig bleibt. Das läßt sich einmal durch die Wahl eines hinreichend weichen Leitermaterials erreichen, und weiter eines Bandquerschnittes, der der Durchbiegung nur geringen Widerstand entgegensetzt. Endlich muß noch der Einfluß der Schwerkraft, die ja gleichfalls auf das Band wirkt, möglichst verkleinert werden, d. h. das spezifische Gewicht des Leitermaterials soll möglichst gering sein. In der folgenden Tabelle auf S. 357 sind einige Stoffe mit den in Frage kommenden Materialkonstanten zusammengestellt.

Das Band muß ferner eine genügende Festigkeit haben und sich möglichst auch als Kontaktmaterial benutzen lassen.

Berücksichtigt man diese beiden Punkte, so erscheint Silber am zweckmäßigsten, immerhin könnten auch Versuche mit Aluminium Aussicht auf Erfolg haben, dessen geringes spezifisches Gewicht und größere Weichheit vorteilhaft sind.



Tabelle.

Material	Spezifischer Widerstand $\varrho \cdot 10^7$	Spezifisches Gewicht γ	Elastizitätsmodus E $\frac{kg}{mm^2}$
Silber	16	10,5	7 500
Kupfer	17	8,9	~ 11 500
Aluminium . .	29	2,7	~ 6 800
Gold	23	19,2	~ 7 800

Als nächstes ist jetzt der Einfluß der Leiterform zu untersuchen. Ganz allgemein läßt sich sagen, daß der Leiter möglichst dünn sein soll, damit er im Verhältnis zu seinem Volumen eine große Oberfläche erhält, denn das ermöglicht wegen der günstigen Abkühlung die Anwendung hoher Stromdichten und damit die Messung auch schwacher Felder. Hier zeigt sich ein weiterer Vorteil des bandförmigen Querschnittes gegenüber dem runden, er strahlt die Stromwärme viel besser aus und bleibt daher kühler. Man geht zweckmäßig mit der Banddicke soweit herunter, wie es das Material erlaubt; damit erreicht man noch den Vorteil, daß das Widerstandsmoment des Bandes gegen Verbiegung sehr klein wird. Dagegen zeigt eine einfache Überlegung, daß die Breite des Bandes in weiten Grenzen ohne Belang bleibt; man wählt sie daher so, wie es für die Herstellung am bequemsten ist.

Je geringer die Durchbiegung h ist, um so empfindlicher wird der Apparat. Es empfiehlt sich daher, durch die Schrauben s (Bild 1) den Federn f eine schwache Vorspannung zu geben. Dann kann die Durchbiegung h klein bleiben, ohne die Genauigkeit des Apparates zu beeinträchtigen.

Für das Arbeiten des Apparates von ausschlaggebender Bedeutung ist der Kontaktschluß. Die durch geeigneten Bau von Band und Federn erreichte Ausbiegung des Leiters im magnetischen Feld muß durch den Kontakt sicher angezeigt werden. Hierzu genügt es keineswegs, daß sich Band und Kontaktspitze berühren, sondern es muß auch ein nicht unerheblicher Flächendruck auf die Kontaktstelle ausgeübt werden. Es zeigte sich, daß man mit der verfügbaren Kraft nicht zum Ziele kam, auch nicht, wenn die Kontaktspitze sehr fein gemacht wurde. Das Ansprechen eines zunächst einfach an die Kontakte und ein Bandende angeschlossenen Galvanometers blieb sehr unsicher. Deshalb wird am besten auf einen mechanischen Kontaktschluß überhaupt verzichtet und statt dessen ein elektrischer Überschlag benutzt, der erfolgt, wenn sich Band und Spitze außerordentlich genähert haben. Die erforderliche hohe Spannung ist sehr einfach mit einem kleinen Induktorium zu erreichen. Verwendet man diesen Kunstgriff und nimmt dazu noch feine Kontaktspitzen, so erfolgt ein sehr sicheres Ansprechen des Telephons. Wünscht man eine objektive Beobachtung, so kann man auch das in einfacher Weise — z. B. durch ein Galvanometer mit vorgeschaltetem Detektor — erreichen.

Zwei Fehlerquellen könnten die Angaben des Apparates fälschen, Temperatur und Schwerkraft. Bei dem Einfluß der Temperatur ist zweierlei zu unterscheiden. Erstens wird der Leiter durch die in ihm entstehende Stromwärme geheizt und dehnt sich daher aus. Aber nur bei der Messung ganz schwacher Felder wird wegen der großen Stromdichte die Erwärmung merklich. Der Einfluß kann zudem durch eine Eichkurve bestimmt werden, so daß sich ein Meßfehler vermeiden läßt. Zweitens kann der ganze Apparat von außen erwärmt werden. Diese Erwärmung braucht (z. B. bei Messungen an elektrischen Maschinen) durchaus nicht klein zu sein. Der Fehler, der dann durch die Dehnung des Meßbandes entsteht, läßt sich in einfacher

Weise dadurch kompensieren, daß man die Federn an einer sich gleichfalls ausdehnenden Platte befestigt.

Der Einfluß der Schwerkraft tritt nur dann merklich auf, wenn sie sich direkt zu der elektrodynamischen Kraft addiert, d. h. wenn der Leiter nach oben oder unten durchgebogen wird. Dieser Fehler läßt sich aber durch Kommutierung des Meßstromes und Mittelnehmen aus den dabei erhaltenen beiden Werten beseitigen, da das Band dabei einmal nach oben und dann nach unten durchgebogen wird, sich die Schwerkraft also im ersten Fall von der elektrodynamischen Kraft subtrahiert und im zweiten zu ihr addiert.

Gegen äußere Stöße ist das Instrument nicht sehr empfindlich, da das System sehr leicht ist. Trotzdem empfiehlt sich natürlich eine Konstruktion, durch die eine zu große Ausbiegung von Band und Federn, z. B. durch Anschläge, verhindert wird.

Beschreibung eines Modells und der mit ihm ausgeführten Messungen.

Nach den im vorstehenden beschriebenen Grundsätzen wurde ein Modell des Apparates gebaut. Auf besonders kleine Form und restlose Ausnutzung aller Möglichkeiten wurde dabei bewußt verzichtet, da es zunächst nur darauf ankam, die Wirkungsweise der Anordnung zu studieren.

Als Leiter diente ein Silberband von 0,01 mm Dicke, 1 mm Breite und 50 mm Länge, das an zwei Kupferfedern von etwa gleicher Breite, 0,05 mm Dicke und etwa 20 mm Länge befestigt war. Der Kontakt bestand aus einer vergoldeten Nadelspitze, die durch eine Schraube dem Bande mehr oder weniger genähert werden konnte. Das ganze war auf einer Fiberplatte montiert.

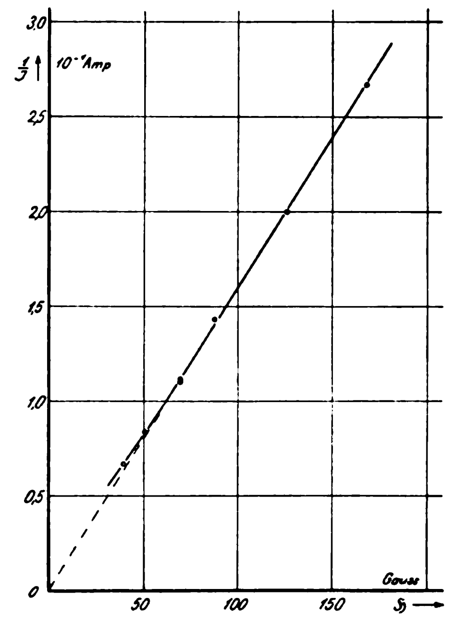


Bild 2. Eichkurve (aufgenommen in einer Spule von bekanntem Magnetfeld).

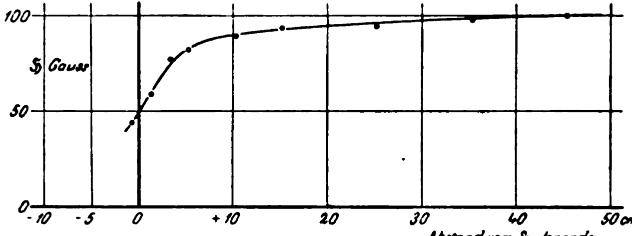


Bild 3. Verteilung des Magnetfeldes am Ende einer langen Spule.

Die Eichung des Apparates erfolgte im Innern einer langen Spule (Durchmesser 12 cm, Länge 120 cm) durch Vergleich des Magnetisierungsstromes mit dem Meßbandstrom J. Trägt man den reziproken Wert $\frac{1}{J}$ als Funktion der aus dem Magnetisierungsstrom und der Spulenkonstanten bestimmten Feldstärke $\mathfrak{H}$ auf, so ergibt sich Bild 2. Die Eichpunkte weichen im unteren Teil etwas von der theoretischen Geraden ab, das beruht auf dem Einfluß der Stromwärme, die bei dem vorliegenden Bande bei einer Belastung von 100 Amp./mm² an bemerkbar wird. Anschließend wurde dann der Feldverlauf am Ende der Spule bestimmt. Das Feld im Innern betrug 100 Gauß. Der entsprechende Meßbandstrom gab den Eichpunkt für den Apparat. Bild 3 zeigt das Ergebnis. Bemerkenswert ist die gute Übereinstimmung der experimentell gefundenen Kurve an der Spulenmündung mit dem

von der Theorie verlangten Wert; dort soll das Feld auf die Hälfte seiner Stärke herabgesunken sein, was dem gefundenen Werte genau entspricht.

Um das Verhalten des Apparates bei größeren Feldstärken zu prüfen, wurde er in den etwa 10 mm breiten Luftspalt eines vorher möglichst weitgehend entmagnetisierten Halbringmagneten gebracht und die Abhängigkeit der Feldstärke im Luftspalt von dem Magnetisierungsstrom bestimmt. Bei dem stärksten Strom wurde mit einer geeichten Wismutspirale die zugehörige Feldstärke zu 11500 Gauß bestimmt und der Apparat auf diese Weise geeicht. In Bild 4 sind die Meßpunkte zusammen-

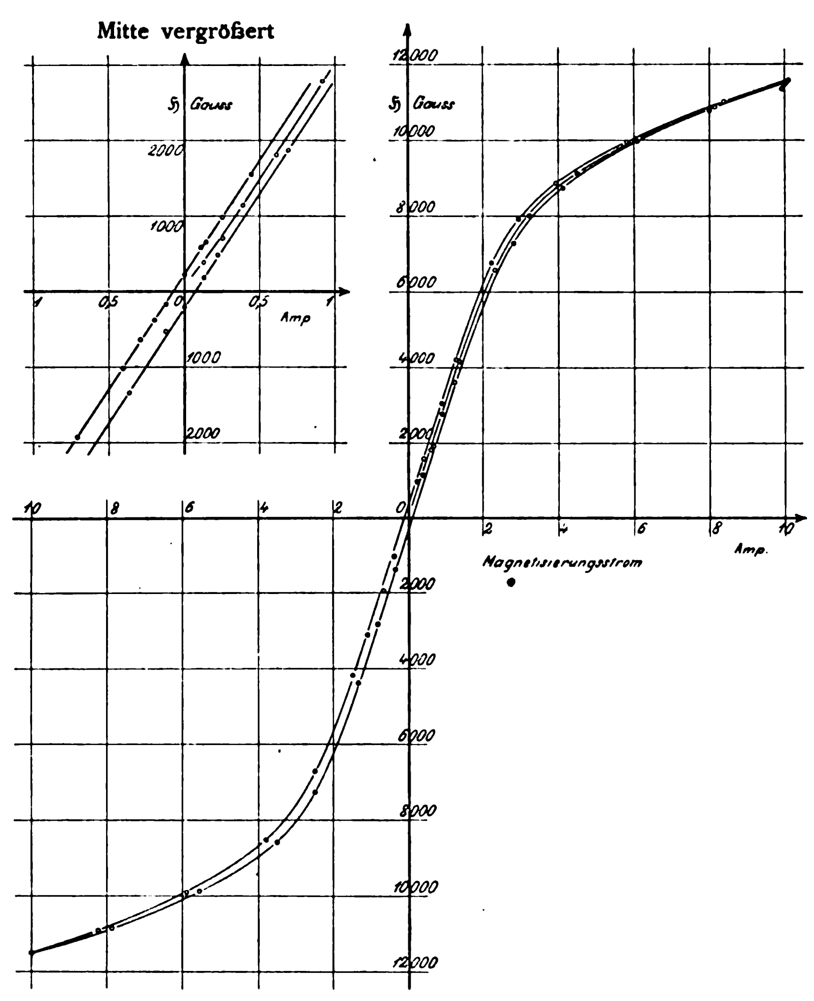


Bild 4. Feld im Luftspalt eines Halbringmagneten.

gestellt. Sie ergeben die erwartete Kurve von der Form einer Hysteresisschleife. Die Genauigkeit ist besonders aus dem vergrößert herausgezeichneten mittleren Gebiet ersichtlich.

Zum Schluß sollte noch geprüft werden, wie weit die gewählte Anordnung auch für die Messung von Komponenten der Feldstärke zuverlässig zu verwenden ist. Der Apparat wurde daher in einer langen Spule mit dem bekannten homogenen Feld von 100 Gauß so gedreht, daß die Bewegungsrichtung des Bandes mit der Richtung der Feldlinien verschiedene Winkel bildete. In einer Reihe von Stellungen wurde dann der Meßbandstrom J gemessen, der zum Kontaktschluß nötig war. Diesen

Strom in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α zeigt Bild 5. Bildet man $J \cdot \cos\alpha$, so erhält man einen konstanten Wert, wie es auch die theoretische Betrachtung verlangt.

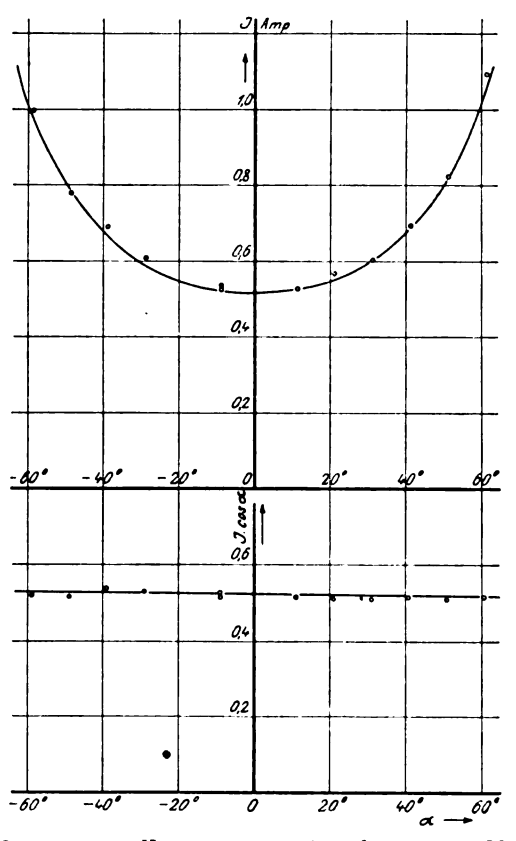


Bild 5. Messung von Komponenten eines konstanten Magnetfeldes.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Apparat beschrieben, der die Einwirkung eines magnetischen Feldes auf einen biegsamen stromführenden Leiter zur Messung dieses Feldes benutzt. Nach der Erörterung der bei der Konstruktion zu beachtenden Gesichtspunkte folgt die Beschreibung eines Modells sowie der mit ihm ausgeführten Untersuchungen magnetischer Felder. Die Ergebnisse zeigen, daß eine recht genaue Messung auch sehr schwacher Felder bis herab zu etwa 10 Gauß nach Größe und Richtung mit einfachen Mitteln durchgeführt werden kann.

Über einige Fragen der elektrischen Festigkeitslehre.

Von

Hans Rochow.

(Mitteilung aus dem Technisch-physikalischen Institut der Universität Jena.)

Einleitung.

Die folgende Arbeit gliedert sich in drei voneinander unabhängige Untersuchungen. Das Ziel des ersten Teiles war, die elektrische Durchbruchfeldstärke von festen Isolatoren in Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern, wie Schichtdicke, Geschwindigkeit der Spannungssteigerung, Temperatur, Frequenz, Polarität zu bestimmen. Von den Herren W. O. Schumann und H. Edler waren schon vorher die Versuchsanordnung und die Untersuchungsmethoden im Prinzip ausgearbeitet und orientierende Versuche unternommen worden.

Der zweite Teil befaßt sich mit der Frage der Erwärmung eines festen Dielektrikums bis zum Durchschlag. Er wurde angeregt durch die von K. W. Wagner aufgestellte Theorie über den physikalischen Vorgang beim Durchbruch eines festen Isolators, der von ihm als ein rein wärmeelektrisches Phänomen erklärt wird.

Im letzten Abschnitt wurden schließlich die Untersuchungen, die F. Müller im hiesigen Institut über die Entladungsfeldstärke der Einzelkugel zur Klärung des Problems der Abhängigkeit des Kathodenfalls vom Material angestellt hatte, fortgeführt, da sie in bezug auf dielektrische Kugeln noch zu keinem befriedigendem Resultat geführt hatten.

Im allgemeinen wurden die Versuche bei 50 Perioden/sek. ausgeführt.

I. Über die elektrische Festigkeit von festen Isolatoren.

1. Versuchsanordnung.

Als Spannungsquelle für die Primärwicklung des Transformators wurde ein Einankerumformer (Siemens Schuckert, 6,5 kW, 50 Perioden, 220 Volt) verwendet, der mittels eines besonderen Gleichstrommotors (6,5 kW, 440 Volt) als Wechselstromgenerator be-

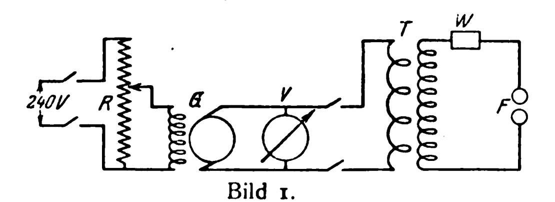


Bild 1.

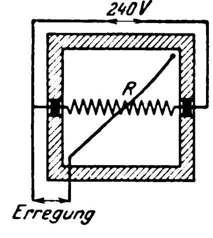


Bild 2.

trieben wurde. Zur Erregung des Generators G diente eine Batterie von 240 Volt (Bild 1). Diese lag an einem Widerstand R, der als Spannungsteiler geschaltet und auf einem Brett mittels zweier Scharniere befestigt war. Zwecks gleichmäßiger Steigerung der Generatorspannung wurde von einem kleinen Motor durch Vermittlung eines Getriebes unter diesem Widerstand, der infolge seiner Schwere nach unten drückte, ein Schlitten fortbewegt, auf dem ein dicker Kupferdraht, der als Abgreifkontakt diente, so ausgespannt war, daß bei gleichmäßiger Bewegung des Schlittens die Generatorspannung in gleichen Zeiten um gleich viel wuchs (Bild 2). Die Bewegung des Schlittens wurde durch einen Tourenzähler, der mit dem Motor gekuppelt war, kontrolliert. Mit Hilfe dieser Vorrichtung war eine gleichmäßige

Spannungssteigerung in weiten Grenzen möglich. Die Wechselspannung wurde mit einem Präzisionsvoltmeter V gemessen und an die Primärseite des Transformators T (Koch und Sterzel, 220/60000 Volt, 12 kVA, 50 Perioden) gelegt, Als Voltmeter wurden benutzt: 1. Dynamometer von Siemens & Halske O — 15 — 30 — 60 Volt; 2. Dynamometer von Weston 0 — 150 — 300 Volt. Die Instrumente wurden mit einem Kompensationsapparat geeicht. Von den Sekundärklemmen führte eine ungefähr 1,5 m lange Hochspannungsleitung zur Funkenstrecke F. Vor dieser lag zum Schutze des Transformators bei Überschlägen ein Wasserwiderstand W von ungefähr 60000 Ohm. Sein Spannungsabfall ist bei Leerlauf zu vernachlässigen. Der Transformator wurde bei sämtlichen Versuchen symmetrisch belastet. Beim Zuschalten des Transformators sank die Generatorspannung um ungefähr 3%.

2. Vorversuche.

Die Vorversuche hatten vor allen Dingen die Prüfung des Transformators zum Ziel. Das Übersetzungsverhältnis wurde durch den Kurzschlußversuch bestimmt und ergab sich zu 273. Der Spannungsabfall wurde mit Hilfe der Leerlauf- und Kurzschlußcharakteristik berechnet. Für den Scheitelfaktor wurden die Werte zugrunde gelegt, die W. Spath[1]) für die benutzte Maschine angegeben hat.

Die maximalen Sekundärspannungen konnten nun mit Hilfe des Übersetzungsverhältnisses unter Berücksichtigung des Spannungsabfalles und des Scheitelfaktors aus den effektiven Primärspannungen berechnet werden.

Die Primärspannungen sind stets in $\mathrm{Volt}_{\mathrm{eff.}}$, die Sekundärspannungen in $\mathrm{Volt}_{\mathrm{max.}}$, die Feldstärken in $\frac{\mathrm{kV}_{\mathrm{max.}}}{\mathrm{cm}}$ angegeben.

3. Untersuchungsmethoden.

Die erste Aufgabe was es, dem zu untersuchenden Material eine Form zu geben, die eine genaue Feldberechnung zuließ und den Durchschlag an einer bestimmten Stelle erzwang. Beide Forderungen erfüllt eine Bikonkav-Linse, wie sie

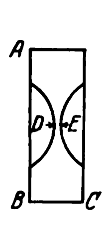


Bild 3.

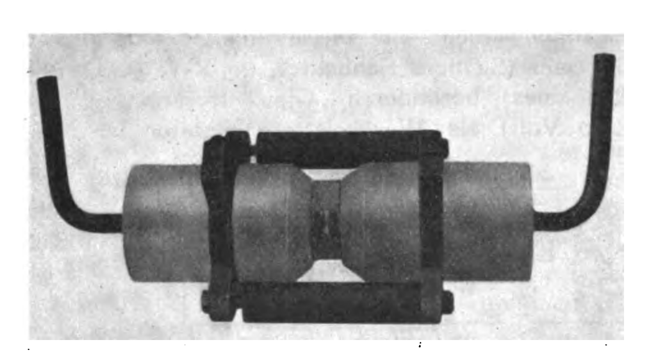


Bild 4.

Bild 3 im Querschnitt zeigt. Der Durchmesser AB beträgt 30—31 mm, die Höhe BC 10—11 mm, der Radius des beiderseitigen Ausschliffes 9,8 mm. Leicht zu bearbeitende Materialien wie Bakelit, Hartgummi, Idonit wurden in der Werkstatt des Institutes verarbeitet, Glas, Porzellan, Quarz wurden von der Firma Carl Zeiß geschliffen. Die Kugelflächen waren bei sämtlichen Linsen hochpoliert. Die Schlagweite DE wurde teils von der Firma Zeiß, teils im Institut selbst mit einer Zeißschen Meßuhr auf $^1/_{1000}$ mm genau gemessen. Als Elektrodenmaterial sollte Quecksilber

[1]) Diss. Jena 1922.

verwendet werden, um eine unmittelbare Anlagerung der Elektroden an die Kugelflächen des Isolators zu erreichen. Zu diesem Zwecke wurde für die Versuchslinsen eine Einspannvorrichtung konstruiert, wie sie Bild 4 zeigt. Zwei Glaszylinder von 67 mm Länge und 45 mm Durchmesser laufen an dem einen Ende bis zu einem Durchmesser von 31 mm, dem Durchmesser der Linse, konisch zusammen. Beide Glaskörper haben eine zentrale Durchbohrung von 7 mm und an der konischen Seite einen genau gleichen Ausschliff wie die Linsen. Auf dem anderen Ende der Zylinder sind rechtwinklig gebogene Stahlrohre in die Durchbohrung ungefähr 25 mm lang mittels Gips eingekittet. In der Mitte tragen beide Zylinder Ausfräsungen, in die genau passende Schellen aus Messing eingefügt sind. An diese Schellen sind zwei Bolzen angeschraubt, mittels derer die beiden Glaszylinder und die zwischen

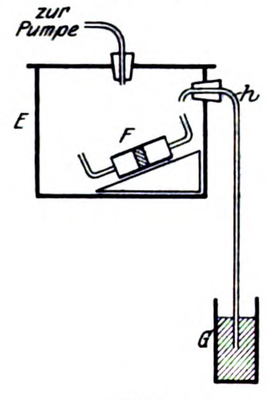


Bild 5.

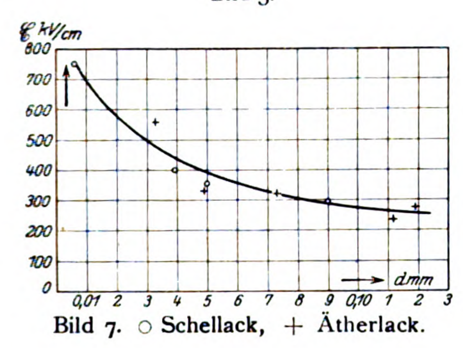
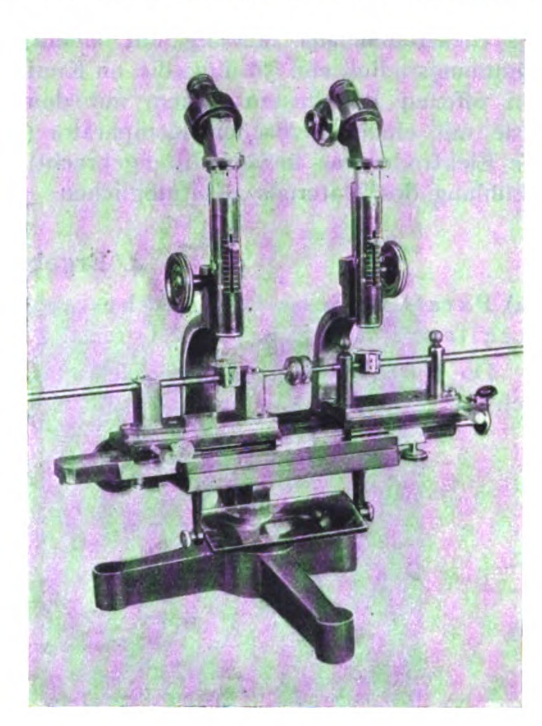


Bild 7. ○ Schellack, + Ätherlack.


Bild 6.

sie gelegte Linse zusammengepreßt werden können. Zwischen der Linse und den Glaskörpern wurden noch zwei Gummiringe zur Abdichtung eingelegt. Die Linsen, Gummiringe und Auflageflächen der Glaskörper wurden stets mit Benzin und Alkohol sorgfältig gereinigt. Von den Stahlrohren aus kann Quecksilber eingefüllt werden. Hierbei ist besonders darauf zu achten, daß sich zwischen der Linse und dem Quecksilber keine Luftbläschen festsetzen, weil dann an diesen Stellen heftiges Sprühen auftritt. Dadurch werden die Linsenflächen angegriffen und erhitzt, was natürlich die Durchbruchfeldstärken stark herabsetzen kann. Um dies zu vermeiden, wurde die Füllung der Funkenstrecke in einem Vakuum von ungefähr 1 mm Hg vorgenommen. Sie wurde also in einen Exsikkator gesetzt (Bild 5), der seitlich ein Steigrohr hat, das durch einen Stopfen in das Innere des Exsikkators führt und in eine feine Düse ausläuft. Unten taucht das Rohr in ein Gefäß mit Quecksilber. Die Länge des Rohres ist so bemessen, daß das Quecksilber beim Evakuieren bis zur Höhe h steigt. Zum Füllen wird dann das Gefäß G gehoben.

Die Funkenstrecke, wie sie oben beschrieben ist, war eine zweite Form. Prinzipiell war die erste, wie sie von H. Edler benutzt wurde, nicht verschieden

davon. Nur die Zylinder waren aus Hartgummi und die Rohre, die mittels Pizein eingeshmolzen waren, aus Glas. Die Leistungsfähigkeit dieser Funkenstrecke ging ungefähr bis 40000 Volt. Bei höheren Spannungen trat heftiges Sprühen und schließlich ein Überschlag um die Linse herum ein. Um dies zu vermeiden, wurde die ganze Funkenstrecke in ein mit Xylol gefülltes Gefäß gesetzt, weil die elektrische Festigkeit des Xylols außerordentlich groß ist. Ferner waren auch Versuche bei hohen Temperaturen in Aussicht genommen. Da nun Hartgummi und Pizein diesen Anforderungen nicht genügen, wurde eine Funkenstrecke benutzt, wie sie oben beschrieben ist. Auf diesem Wege war es möglich, mit den Spannungen bis zur Grenze des Transformators zu gehen, ohne daß Sprühen oder Randüberschläge eintraten.

Zu Messungen bei leicht schmelzbaren Körpern, wie Paraffin und Lacken, wurden zwei Elektroden aus Messing mit einem Durchmesser von 20 mm und einem Krümmungsradius von 50 mm, die an Kupferstäbe angeschraubt waren und in einen oben offenen Pappkasten ragten, mit dem Material umgossen. Die Schlagweite wurde mit einem Zeißschen Komparator (Bild 6) auf $^{1}/_{1000}$ mm genau bestimmt. Eine Elektrode war beweglich angebracht, um einen Spannungsausgleich bei der Abkühlung des Materials zu ermöglichen.

4. Ergebnisse.

a) Paraffin, Schellack, Ätherlack, Idonit, Hartgummi, Bakelit, Porzellan, kristallinischer Quarz, geschmolzener Quarz, Gerätequarz.

Die Durchbruchfeldstärke wurde einfach durch Division der Durchbruchspannung durch die Schlagweite gefunden. Eine Korrektion wegen der Divergenz des Feldes

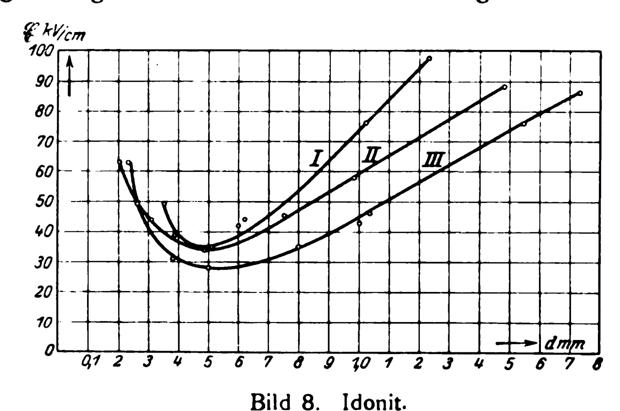


Bild 8. Idonit.

bei Kugelelektroden erübrigt sich für die Schlagweiten, wie sie bei diesen Untersuchungen in Frage kamen. Im folgenden seien zunächst auch die Resultate mitgeteilt, die bei den ersten orientierenden Versuchen gefunden wurden. Man kann ihnen nur die Bedeutung zubilligen, daß sie über die Größenordnung der Durchbruchfeldstärke Aufschluß geben, viel mehr darf man nicht daraus schließen, weil die Zahl der Messungen für einen bestimmten Punkt zu gering ist, um Mittelwerte daraus zu bilden.

An vergießbaren Isolatoren wurden von H. Edler Paraffin, Ätherlack und Schellack untersucht. Bei Paraffin war die Streuung der einzelnen Meßpunkte außerordentlich groß, was darauf zurückzuführen ist, daß das Material nicht frei von Luftblasen war. Die Durchbruchfeldstärke schwankte bei einer Schichtdicke von 0,125 mm zwischen 1000 und 2000 kV/cm. Die Geschwindigkeit der Spannungssteigerung betrug 80 V_{II}/sek. Die für Schellack und Ätherlack unter denselben Versuchbedingungen

gefundenen Resultate sind in Bild 7 dargestellt. Die Messungen an Ätherlack wurden ausgeführt, nachdem die Versuchsproben in der Funkenstrecke 6 Stunden lang bei einer Temperatur von 40° C getrocknet waren. Wurde dies unterlassen, so lagen die Durchbruchfeldstärken ungefähr um 90% tiefer. Dem Schellack und dem Ätherlack kommen ungefähr dieselben Durchbruchfeldstärken zu, und zwar scheinen diese mit zunehmender Schlagweite abzunehmen.

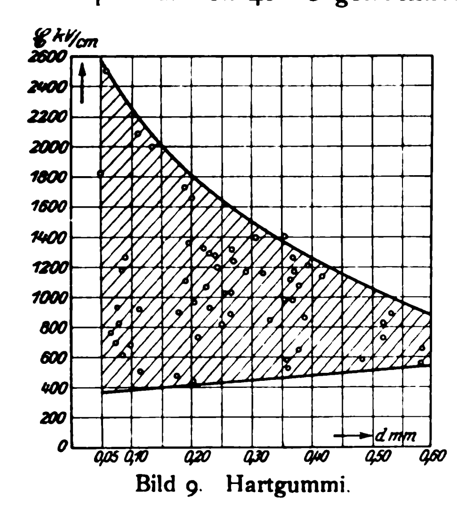


Bild 9. Hartgummi.

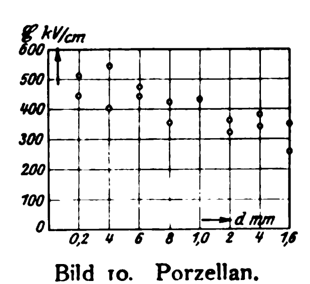


Bild 10. Porzellan.

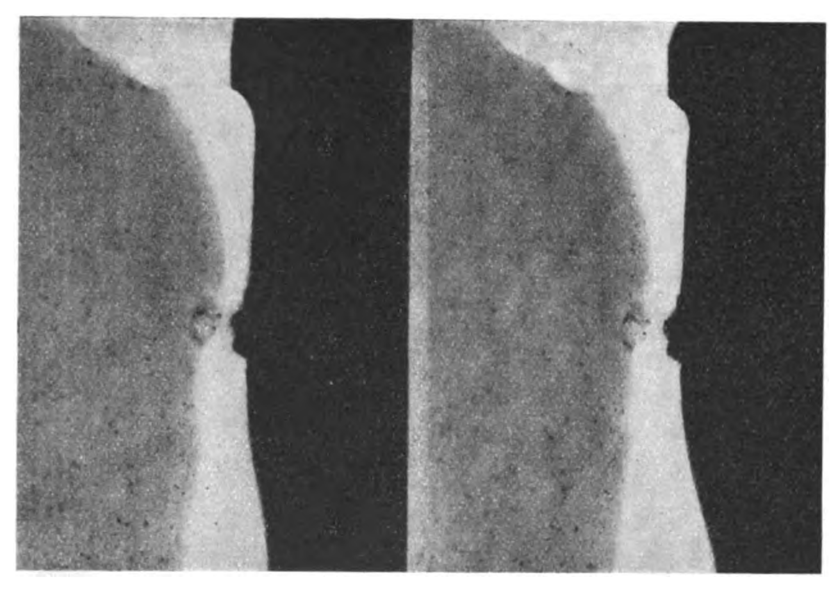


Bild 11.

Bei der Untersuchung von festen, nicht leicht schmelzbaren Materialien fand H. Edler für Idonit das sehr merkwürdige Resultat, daß die Durchbruchfeldstärke ähnlich wie bei Gasen ein Minimum durchläuft (Bild 8). Die Zahl der Meßpunkte ist allerdings verhältnismäßig gering. Die drei verschiedenen Kurven beziehen sich auf drei Sorten des Materials. Die Spannungssteigerung betrug wieder 80 V_{II}/sek.

Bei Hartgummi, das von H. Edler und von mir untersucht wurde, ist die Streuung sehr stark, nimmt aber mit zunehmender Dicke der Linse ab (Bild 9). Dies wird sich auch später bei Glas und Quarz zeigen und ist auch bei Flüssigkeiten von J. Sorge[1]) beobachtet worden. Zu erklären ist es dadurch, daß Inhomogenitäten des Materials, durch die die elektrische Festigkeit herabgesetzt wird, bei

[1]) Diss. Jena 1924.

größeren Schlagweiten sich mehr ausgleichen, andererseits ist aber auch zu bedenken, daß die Messung einer Schichtdicke von wenigen $^1/_{100}$ mm recht ungenau wird und dadurch Fehler bis zu 4% auftreten können.

Für reines Bakelit ergeben sich Durchbruchfeldstärken, die von 170 kV/cm bei 0,50 mm auf 60 kV/cm bei 1,5 mm Schlagweite sanken, für eine andere Sorte nur Feldstärken von ungefähr 15 kV/cm bei einer Schlagweite von 3 mm. Die Spannungssteigerung betrug für Hartgummi und Bakelit 60 V_{II}/sek.

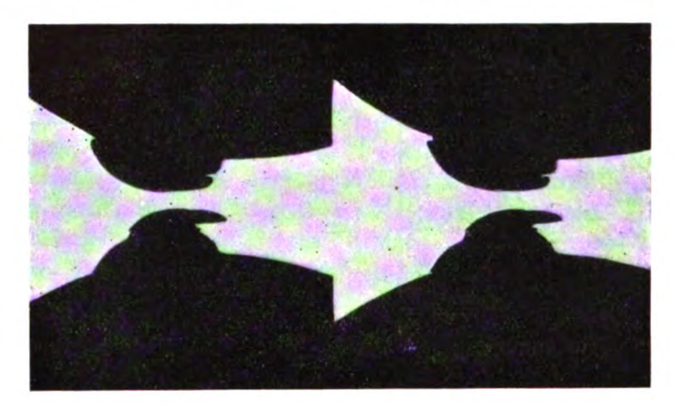


Bild 12.

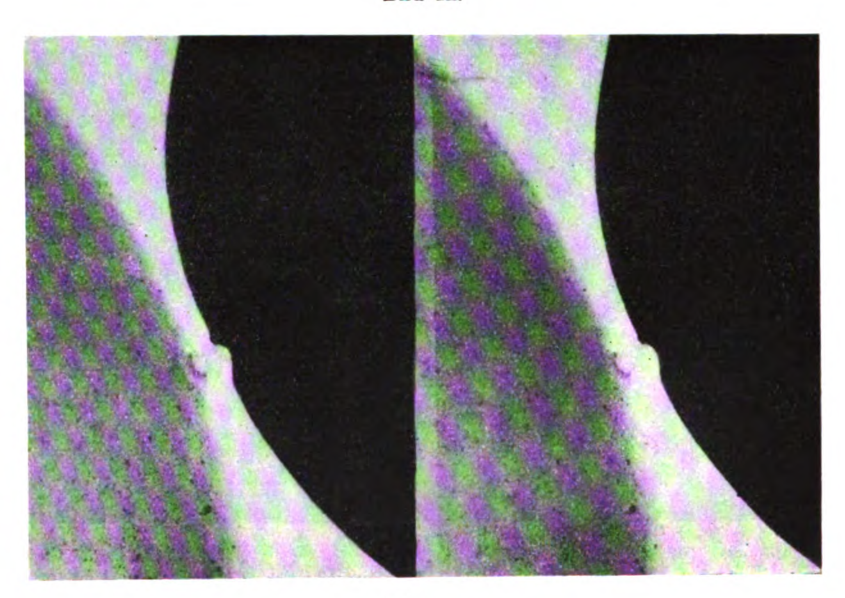


Bild 13.

Bei der Bearbeitung der bisher besprochenen Materialien muß sehr darauf geachtet werden, daß sie nicht mit Wasser in Berührung kommen, weil schon Spuren davon, die aufgesaugt werden, genügen, um die Durchbruchfeldstärke erheblich herabzusetzen. Der Schmirgel, mit dem die Linsen nach dem Ausdrehen geschliffen wurden, mußte deshalb mit Alkohol angefeuchtet werden.

Bild 10 zeigt die für Porzellan gefundenen Werte. Die Spannungssteigerung betrug 60 V_{II}/sek. Bei weiteren Untersuchungen über den Einfluß der Spannungssteigerung unterschied H. Edler zwei verschiedene Typen des Durchschlags:

1. Das Material wird durchgefressen (Bild 11). Es bildet sich auf jeder Seite ein Trichter, bis die Feldstärke so groß geworden ist, daß der Durchschlag



erfolgt. Diese Art des Durchbruches ist nur möglich bei nicht homogenen Körpern wie Porzellan, Bakelit, Idonit, Gerätequarz und tritt ein, wenn man eine Spannung, die sich nicht sehr von der Durchbruchspannung unterscheidet, lange Zeit auf die Linse wirken läßt. Er wird dadurch herbeigeführt, daß einzelne Teile der Linse stärker beansprucht werden als andere (z. B. Luftblasen). Bild 12 zeigt eine halb durchgefressene Bakelitlinse.

2. Das Material wird durchschlagen (Bild 13). Dieser Fall tritt stets ein bei Glas, kristallinischem und geschmolzenem Quarz, bei den inhomogenen Körpern dann, wenn die Spannung nicht zu langsam gesteigert wird.

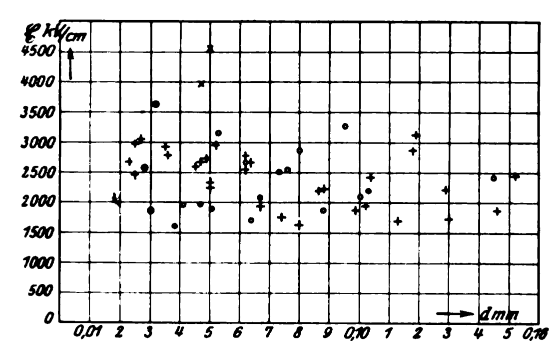


Bild 14. O, +, ⊙ krist. Quarz, × geschm. Quarz.

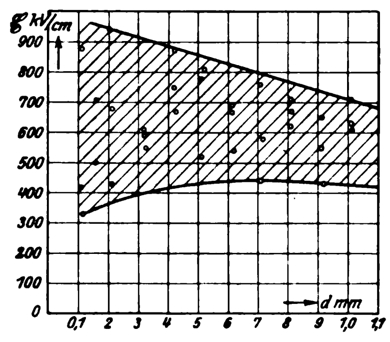


Bild 15. Gerätequarz.

Von H. Edler wurde ferner der kristallinische Quarz untersucht, wenn die Durchschlagrichtung der optischen Achse parallel war. Bild 14 zeigt die Resultate. Die durch einfache Kreise (O) markierten Meßpunkte wurden bei einer Spannungssteigerung von 26 V_{II}/sek. aufgenommen, die durch Kreuze (+) markierten bei einer solchen von 190 V_{II}/sek. Innerhalb dieses Bereiches scheint keine merkliche Abhängigkeit zu bestehen. Für Quarz, senkrecht zur optischen Achse angeschliffen, wurden von mir drei Werte gemessen (⊙). Sie zeigen gegen die übrigen keinen Unterschied. Anders der geschmolzene optische Quarz (×), der eine wesentlich höhere Festigkeit besitzt, die dem des Glases gleichkommt, wie man sehen wird.

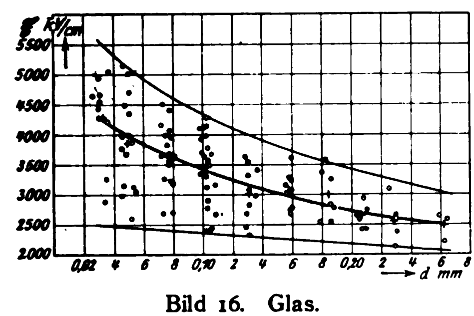


Bild 16. Glas.

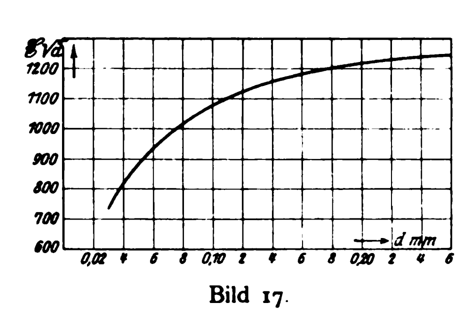


Bild 17.

Aus dieser Tatsache darf man wohl den Schluß ziehen, daß ein Material unter sonst gleichen Bedingungen elektrisch um so fester ist, je homogener es ist. Für Gerätequarz, wie er von der Firma Carl Zeiß hergestellt wird, zeigt Bild 15 die gefundenen Durchbruchfeldstärken. Die Spannungssteigerung betrug bei den letzten Messungen 26 V_{II}/sek.

b) Glas.

Die Abhängigkeit der Durchbruchfeldstärke von der Schlagweite.

Auf Grund der Erfahrungen, die bei den vorhergehenden Versuchen gemacht worden waren, wurde Jenaer Flintglas (Schott u. Gen. 0118; $n_D = 1{,}6129$; spez.



Gew. = 3,58; Dielektrizitätskonstante = 7,4) systematisch untersucht. Zunächst galt es, die Abhängigkeit der Durchbruchfeldstärke von der Schichtdicke zu untersuchen. Um bei allen folgenden Messungen zu möglichst sicheren und einwandfreien Resultaten zu gelangen, wurden für jeden Punkt mehrere Messungen gemacht, bei kleineren Schlagweiten 10—15, bei größeren genügten weniger, weil die Streuung abnahm. Die Spannungssteigerung betrug 26 V_{II}/sek. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Eine graphische Darstellung findet sich in Bild 16.

d mm	$\mathfrak{E}$ kV/cm	Mittlerer Fehler der Messungen %
0,032	4290	11,8
0,049	3860	16,2
0,076	3640	11,0
0,102	3380	14,1
0,131	3030	11,4
0,158	3050	7,6
0,184	2990	11,3
0,207	2640	4,6
0,228	2560	10,1
0,262	2490	6,8

Bild 18.

Bild 19.

Die Durchbruchfeldstärke nimmt also mit der Schlagweite ab und ist nicht, wie es die Wagnersche Theorie[1]) verlangt, unabhängig davon. Bei der Anordnung, wie es hier verwendet wurde, kann eine Feldverzerrung nicht dafür verantwortlich gemacht werden, da eine genaue Berechnung des Feldes möglich ist, solange die Durchschläge im Zentrum der Linse erfolgen, was fast immer der Fall war. Nach theoretischen Überlegungen von Rogowski[2]) und von von Kármán[3]), die von der Wagnerschen Theorie ausgehen, soll das Produkt aus der Durchbruchfeldstärke und der Wurzel der Schlagweite eine Konstante ergeben. Aus Bild 17 ergibt sich aber, daß die Durchbruchfeldstärke bei kleinen Schlagweiten weniger stark abnimmt, als es das Gesetz verlangt; mit wachsender Schichtdicke nähert sich die Kurve allerdings mehr und mehr einer Horizontalen. Die zur Berechnung dieser Kurve benutzten Werte sind aus der Mittelwertkurve des Bildes 16 entnommen worden. Da die Spannungssteigerung bei diesen Versuchen sehr langsam vor sich ging, sind wohl die Spannungen, die von Kármán als Durchbruchspannungen definiert, nicht wesentlich überschritten worden. Rogowski und von Kármán kommen auf Grund weiterer Folgerungen, die im Gegensatz zu jeder Erfahrung stehen und noch weiter unten erwähnt werden, zu einer Ablehnung der Wagnerschen Theorie, wenigstens für den Fall kleiner Schlagweiten, wie sie auch hier vorliegen.

Recht gut läßt sich die gefundene Mittelwertkurve durch die Gleichung $\mathfrak{E}(a \cdot d + b) = 1$ ausdrücken, wo $a = 0{,}000771$, $b = 0{,}000214$, d die Schlagweite in mm und $\mathfrak{E}$ die Durchbruchfeldstärke in kV/cm (Bild 18).

[1]) K. W. Wagner, Journ. of the Americ. Inst. of Elect. Eng. 41; p. 1034 ff., 1922.
[2]) Arch. f. Elektrot. XIII, S. 159, 1924.
[3]) Arch. f. Elektrot. XIII, S. 175, 1924.



Auffallend ist schließlich, daß die Durchbruchfeldstärken so hoch liegen, wie wohl noch keine bisher gemessen sind. Dies ist vielleicht darauf zurückzuführen, daß bisher nicht genug auf eine unmittelbare Anlagerung der Elektroden an das Dielektrikum geachtet wurde.

Die Abhängigkeit der Durchbruchfeldstärke von der Spannungssteigerung.

Von der Spannungssteigerung besteht eine ziemlich starke Abhängigkeit, wie aus der folgenden Tabelle zu ersehen ist. Die Schlagweite betrug 0,167 mm. Für jeden Punkt wurden vier Messungen gemacht.

Spannungssteigerung V_{II}/sek.	$\mathfrak{E}$ kV/cm	Mittlerer Fehler der Messungen %
26	2900	8
340	3810	4,7
650	4310	2,1.

Die Durchbruchfeldstärke steigt demnach offenbar mit wachsender Spannungssteigerung weniger stark als linear an (Bild 19). Bei Durchschlagversuchen mit festen Körpern muß man also im Gegensatz zu Gasen und Flüssigkeiten auf diesen Faktor sehr achten. Im übrigen hat es den Anschein, als ob die Streuung mit schnellerer Steigerung abnimmt.

Die Abhängigkeit der Durchbruchfeldstärke von der Temperatur.

Alle bisherigen Versuche wurden bei einer Temperatur von ungefähr 20° C ausgeführt. Für Messungen bei höheren Temperaturen wurde das Xylolbad, das die Funkenstrecke umgab, erhitzt. Auf diese Weise konnten Messungen bei 90° C vorgenommen werden. Für solche bei niedrigen Temperaturen geschah die Abkühlung mittels einer Kältemischung aus Eis, Chilisalpeter und Salmiaksalz, die — 18° C erreichen ließ[1]). Für eine Spannungssteigerung von 340 V_{II}/sek. und eine Schlagweite von 0,175 mm ergaben sich folgende Werte (je vier Meßpunkte):

Temperatur C°	kV $\mathfrak{E}$/cm	Mittlerer Fehler der Messungen %
— 18	3750	5,5
+ 20	3850	5
+ 90	3870	2,8.

Man findet also das überraschende Resultat, daß innerhalb eines Temperaturbereiches von 108° eine Änderung der Durchbruchfeldstärke nicht nachweisbar ist. Diese Tatsache spricht sehr stark gegen die thermische Auffassung des Durchschlages, wenn man bedenkt, daß der Widerstand des Glases in diesem Temperaturintervall etwa auf $\frac{1}{400\,000}$ sinkt[2]). Die Durchbruchspannung müßte dann nach den Berechnungen von Rogowski, auf die schon oben hingewiesen wurden, auf $\frac{1}{630}$ sinken[3]).

[1]) Versuche bei der Temperatur der flüssigen Luft mißlangen, da die Funkenstrecke und die Versuchslinsen bei der Abkühlung zersprangen. Für die Festigkeit der flüssigen Luft im Siedezustand ergaben sich folgende Werte: 0,50 mm : 178 kV/cm; 1,0 mm : 149 kV/cm (ebene Kupferelektroden Spannungssteigerung 340 kV_{II}/sek.).

[2]) Unter Zugrundelegung der Werte von Rogowski, Arch. f. Elektrot. XIII, S. 162, 1924. — Nach M. G. Foussereau, Journ. de Phys. 11, 254, 1883, würde der Widerstand innerhalb des genannten Temperaturbereiches auf $\frac{1}{250\,000}$ sinken.

[3]) Arch. f. Elektrot. XIII, S. 162, 1924.

Die Abhängigkeit der Durchbruchfeldstärke von der Wärmeableitung durch die Elektroden.

Zu diesem Zweck wurden die Kugelflächen der Linsen chemisch mit einer Silberschicht von $\frac{1}{10000}$ mm Dicke überzogen. In den Rand des Ausschliffes der Linsen wurden Metallplättchen eingekittet, die verhindern sollten, daß Quecksilber bis zur Durchschlagstelle vordrang. Für eine Schlagweite von 0,152 mm und eine Spannungssteigerung von 340 V_{II}/sek. ergab sich eine Durchbruchfeldstärke von 4410 kV/cm (4 Meßpunkte, mittlerer Fehler 6,6%), also durchaus keine Erniedrigung der Feldstärke, wie man sie bei einer thermischen Erklärung des Durchschlages erwarten sollte. Weitere Schlüsse darf man aus dieser Tatsache so lange nicht ziehen, als der Einfluß des Elektrodenmaterials auf die Durchbruchfeldstärke, der bei Flüssigkeiten ziemlich groß ist[1]), unbekannt bleibt. Wie gering die Wärmeableitung dieser Anordnung war, zeigten die Durchschlagbilder. Während bei Quecksilberelektroden der Durchschlagkanal außerordentlich fein war, so daß er bei kleinen Schichtdicken mit bloßem Auge kaum zu sehen war und von ihm strahlenförmig Sprünge ausgingen, war bei diesen Versuchen mit schlechter Wärmeableitung ein Loch von ungefähr 1 mm Durchmesser ausgeschmolzen.

Die Durchbruchfeldstärke bei Gleichspannung.

Es wurde eine Influenzmaschine benutzt, deren Spannung mit einem von H. Löber konstruierten Hochspannungsvoltmeter gemessen werden konnte. Eine so genaue und gleichmäßige Spannungssteigerung wie bei Wechselstrom war hier natürlich nicht möglich. Sie betrug ungefähr 450 V pro Sek. Für eine Schlagweite von 0,057 mm wurde eine Durchbruchfeldstärke von 6510 kV/cm gefunden (5 Meßpunkte, mittlerer Fehler 6,9%). Dies bedeutet gegenüber Wechselspannung eine Erhöhung der Durchbruchfeldstärke um fast 20%.

Polaritäten.

Es war zu untersuchen, ob bei Gleichspannung bei Verwendung von zwei Elektroden mit verschiedenen Krümmungsradien Unterschiede der Durchbruchfeldstärke auftreten je nach der Polung der Maschine. Zu diesem Zwecke behielt der eine Ausschliff der Linse denselben Radius wie bisher (9,82 mm), der Radius des anderen betrug 5,15 mm. Bei einer Schlagweite von 0,059 mm und einer Spannungssteigerung von durchschnittlich 900 V/sek. ergab sich eine Durchbruchfeldstärke von 5800 kV/cm (5 Meßpunkte, mittlerer Fehler 12%), wenn die kleine Elektrode negativ war; war sie dagegen positiv, so betrug die Durchbruchfeldstärke 5320 kV/cm (5 Meßpunkte, mittlerer Fehler 10,2%). Es scheint also ein kleiner Polaritätseffekt vorhanden zu sein. Er hat denselben Sinn wie der von W. Spath[2]) und J. Sorge[3]) für Flüssigkeiten gefundene.

II. Über die Frage der Erwärmung eines festen Dielektrikums bis zum Durchschlag.

1. Versuchsanordnung.

Die Aufgabe dieses Teiles der Arbeit war es festzustellen, ob und wieweit eine Erwärmung des Materials bis zum Durchbruch eintritt. Nach K. W. Wagner[4]) ist diese ja gerade für die Zerstörung des Dielektrikums verantwortlich zu machen. Da eine unmittelbare Temperaturmessung z. B. durch ein zwischen die Elektroden eingeführtes Thermoelement nicht in Frage kommen konnte, mußte ein indirekter

[1]) J. Sorge, Diss. Jena 1924.
[2]) Diss. Jena 1922.
[3]) Diss. Jena 1924.
[4]) Journ. of the Am. Inst. of Elect. Eng. 41, p. 1034 ff., 1922.

Weg beschritten werden. Ein solcher bietet sich in der Toeplerschen Schlierenmethode[1]). Man muß sich dabei allerdings auf die Untersuchung durchsichtiger Dielektrika beschränken. Bei den folgenden Versuchen wurde Jenaer Flintglas (0118 Schott u. Gen.) verwendet, das ja auch im ersten Abschnitt auf seine elektrische Festigkeit untersucht wurde. Zur Spannungserzeugung diente dieselbe Anordnung, wie sie im ersten Abschnitt beschrieben ist. Hinzu trat noch die Schlierenapparatur (Bild 20). Als Lichtquelle diente eine kleine Bogenlampe L. Vor dieser war ein Schirm S mit verstellbarem Spalt aufgestellt, dessen Kanten möglichst genau geradlinig waren und horizontal und vertikal standen. Dieser Spalt wurde so eingestellt, daß er ein Quadrat von ungefähr 1 mm Seitenlänge bildete. Vor ihm stand in einer Entfernung von ungefähr 95 cm ein achromatisches, sphärisch korrigiertes Linsensystem K von 63 cm Brennweite und 8 cm Öffnung, das den Spalt in einer Entfernung von ungefähr 187 cm abbildete. Unmittelbar hinter diesem Bild war das Beobachtungsfernrohr F aufgestellt. Dazu diente ein astronomisches von 42-facher Vergrößerung. Vor dem Objektiv war eine Schneide Schn angebracht, die auf einen auf der Fassung des Fernrohres drehbaren Ring aufgesetzt war. Die Schneide wurde den Horizontalkanten des Spaltes genau parallel gestellt

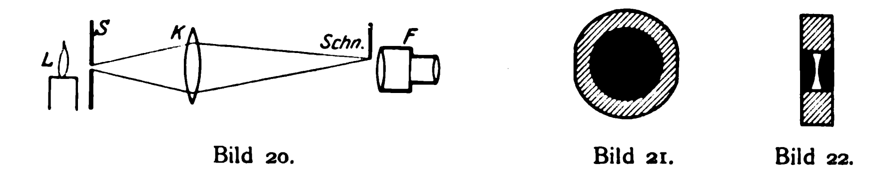


Bild 20. Bild 21. Bild 22.

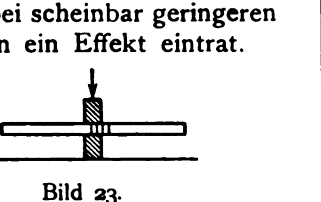
und konnte mittels einer Schraube senkrecht zur Fernrohrachse vor- oder zurückgeschoben werden. Hierdurch ist man in der Lage, das in der Ebene der Schneide entworfene Bild des Spaltes abzublenden. Treten nun in bezug auf den Brechungsindex vor oder hinter der Linse Ungleichheiten auf, so hellen sich diese Stellen auf oder verdunkeln sich je nach der Einstellung der Schneide. Die empfindlichste Einstellung der Apparatur ist die, wo die Schneide das Bild gerade noch abblendet. Es genügen dann kleine Unregelmäßigkeiten im Strahlengang, um Strahlen an der Schneide vorbei in das Fernrohr gelangen zu lassen und die betreffenden Stellen sichtbar zu machen. Vor dem Linsensystem auf der Seite nach dem Fernrohr zu wurde die Funkenstrecke aufgestellt; die Durchbruchsstelle befand sich 4 cm vor der abbildenden Linse. Durch eine in den Strahlengang eingeschaltete Irisblende wurde erreicht, daß nur Strahlen, die durch die Versuchslinse hindurchgegangen waren, in das Fernrohr gelangen konnten. Es erwies sich bei den Versuchen als vorteilhaft, mit einfarbigem Licht zu beobachten. Zu diesem Zwecke wurde zwischen die Lichtquelle und den Spalt ein Grünfilter eingeschoben.

Die Versuchslinsen mußten insofern abgeändert werden, als sie zur Durchsicht planparallel in einer Breite von 1 cm angeschliffen wurden (Bild 21). Die Höhe der Linsen wurde zu 9 mm gewählt, um störende Spiegelungen an den Kugelflächen der Elektroden möglichst zu vermeiden. In der Durchsicht hat man also ein Bild, wie es Bild 22 darstellt. Die Schlagweite wurde zu 0,11 mm gewählt. Sie war nach oben hin begrenzt durch die Leistungsfähigkeit der Funkenstrecke in Luft. Unter Xylol konnte sie natürlich aus dem Grunde nicht benutzt werden, weil dadurch der Strahlengang im Schlierenapparat zu sehr gestört worden wäre. Andererseits mußte die Schichtdicke möglichst groß gewählt werden, um durch die Versuchslinse hindurch noch ein gutes Bild zu bekommen und um im Fernrohr die Durchschlagsstelle noch gut beobachten zu können.

[1]) Pogg. Annalen, 131, 33 und 180, 1867.

2. Die Empfindlichkeit der Methode.

Es kommen zwei Faktoren in Frage, die innerhalb der Versuchslinse eine Änderung des Brechungsindex herbeiführen können, wenn man eine Spannung anlegt, und die bei der Beobachtung zu trennen sind. Dies ist einmal der Druck, der von den elektrostatischen Anziehungskräften auf die dielektrische Schicht ausgeübt wird und außerordentlich hohe Werte annehmen kann. Wir können diese Kräfte berechnen nach der Formel $K = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi}$, wo die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 7,4$, die Durchbruchfeldstärke für eine Schlagweite von 0,11 mm $\mathfrak{E}$ = 3300 kV/cm ist. Rechnet man dies aus, so erhält man einen Druck von ungefähr 35 kg/cm². Um die Empfindlichkeit der Apparatur auf Druckbeanspruchung zu prüfen, wurde eine Glasplatte von 1 mm Dicke, auf die genau gegenüberliegend zwei kleine Messingzylinder mittels Pizein aufgekittet wurden (Bild 23), in den Strahlengang gebracht. Der eine Zylinder wurde noch auf eine feste Unterlage aufgekittet, der andere mit Gewichten belastet. Bei diesem Versuch zeigte sich, daß bei Drucken von ungefähr 30 kg/cm² ab eine Aufhellung der einen Hälfte des Gesichtsfeldes eintrat (in Bild 23 schraffiert gezeichnet). Demnach stand zu erwarten, daß der Druckeinfluß sich gerade unterhalb der Durchbruchspannung bemerkbar machen würde. Es mußte sehr darauf geachtet werden, daß die Zylinder mit ihrer ganzen Grundfläche aufgekittet waren, weil ja sonst die Druckverteilung nicht gleichmäßig war und schon bei scheinbar geringeren Drucken ein Effekt eintrat.


Bild 23.

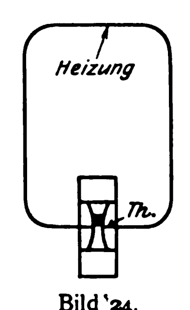
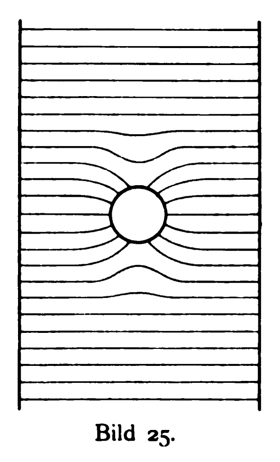


Bild 24.


Bild 25.

Als zweite Ursache einer Änderung des Brechungsindex konnte eine Erwärmung in Frage kommen, die ja gerade nach K. W. Wagner den Durchschlag herbeiführen soll. Zur Prüfung der Anordnung hierauf wurde eine Versuchslinse in den Strahlengang gebracht und an der Durchschlagstelle durch Vermittlung eines Bügels aus dickem Kupferdraht, der an den Enden zugespitzt war, erwärmt (Bild 24). Zur Messung der Temperatur diente ein Termoelement, das in nächster Nähe der einen Spitze angebracht war. Es ergab sich, daß von einer Temperaturerhöhung um ungefähr 10° C ab eine Aufhellung der einen Hälfte des Gesichtsfeldes begann (in Bild 24 schraffiert gezeichnet). Es sei hier noch erwähnt, daß sowohl der Druck als auch die Erwärmung eine Vergrößerung des Brechungsindex zur Folge habe, daß also beide Effekte in derselben Richtung wirken und sich unterstützen.

3. Ergebnis.

Die Funkenstrecke wurde in den Strahlengang gebracht und die Schneide vor dem Fernrohr in horizontaler Richtung so eingestellt, daß das Gesichtsfeld gerade dunkel war. Dann wurde die angelegte Spannung möglichst schnell bis in die Nähe der Durchbruchspannung gesteigert. Die vom Druck herrührende Aufhellung machte sich gerade bemerkbar. Als Beweis dafür, daß keine Erwärmung mit im Spiele war, kann der Umstand angesehen werden, daß beim Abschalten der Spannung der Effekt sofort verschwunden war. Die Spannung wirkte so lange auf die Linse, bis der

Durchbruch erfolgte, was gewöhnlich 10 Minuten und länger dauerte. Während dieser Zeit war keine weitere Aufhellung in der Linse zu bemerken. Wurde die Endspannung innerhalb sehr kurzer Zeit erreicht, so konnte man die vom Druck herrührende Aufhellung durch weiteres Vorschieben der Schneide kompensieren. Für den Fall einer Temperaturerhöhung hätte sich das Gesichtsfeld von neuem aufhellen müssen. Dies war nicht der Fall. Bei Glas tritt demnach bis zum Durchschlag keine Temperaturerhöhung über 10° C ein. Dies war ja die Grenze der Empfindlichkeit der Anordnung. Dieses Ergebnis spricht noch nicht gegen die Wagnersche Theorie, da nach Berechnungen von Rogowski[1]) schon kleinere Temperaturerhöhungen genügen müßten, um einen Wärmedurchschlag herbeizuführen.

III. Über die Entladungsfeldstärke der Einzelkugel und die Abhängigkeit des Kathodenfalls vom Material.

1. Theoretische Grundlagen[2]).

Um die Entladung einer Einzelkugel experimentell zu verifizieren, wurde sie in ein homogenes elektrisches Feld gebracht, das von zwei Plattenelektroden gebildet und durch die Kugel in der Weise gestört wird, wie es Bild 25 zeigt. Dieser Fall läßt sich mathematisch genau erfassen. Für die leitende Kugel ergibt sich für die Feldverteilung in der Kraftlinie größter Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + 2\,\mathfrak{E}_0\left(\frac{r}{x}\right)^3.$$

$\mathfrak{E}_0$ bedeutet die Feldstärke des ursprünglichen homogenen Feldes, r den Kugelradius. Das zweite Glied auf der rechten Seite gibt die Feldstörung an, die in einem Abstande x von der Kugelfläche vorhanden ist. Will man diese Störung an der Elektrodenoberfläche unterhalb einer bestimmten Grenze halten, so läßt sich daraus der dazu notwendige Plattenabstand berechnen. Für die Feldstärke an der Kugeloberfläche erhält man

$$\mathfrak{E} = \frac{3\,U_0}{\delta\left[1 - \left(\frac{2r}{\delta}\right)^3\right]},$$

wo U_0 die an die Platten gelegte Spannung, δ den Plattenbestand und r den Kugelradius bedeuten.

Für dielektrische Kugeln werden die angegebenen Formeln durch die Dielektrizitätskonstante modifiziert. Für die Feldverteilung in der Richtung größter Feldstärke findet man

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + 2\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\,\mathfrak{E}_0\left(\frac{r}{x}\right)^3,$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante ist. Für die Feldstärke an der Kugeloberfläche ergibt sich entsprechend

$$\mathfrak{E} = \frac{3\,U_0}{\delta\left[1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\left(\frac{2r}{\delta}\right)^3\right]} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2}.$$

2. Experimenteller Teil.

Die Versuchsanordnung, wie sie unter I, 1 beschrieben ist, wurde ergänzt durch eine Funkenstrecke mit zwei Zinkplatten von einem Durchmesser von 250 mm, wie sie auch von F. Müller benutzt wurde. Die Platten waren hochpoliert und am

[1]) Arch. f. Elektrot. XIII, S. 159, 1924.

[2]) Ausführlicher behandelt bei F. Müller, Diss. Jena 1923.

Rande umgebördelt. Während der Versuche wurde die Funkenstrecke zur Vermeidung von Verzögerungen mit einer Uviollampe bestrahlt, die in einer Entfernung von 1 m aufgestellt war. Die Schlagweite betrug bei sämtlichen Messungen 3 cm, die Kugeln hatten durchschnittlich einen Durchmesser von 0,55 cm. Die Aufhängung geschah mittels Quarzfäden, die ungefähr 0,2 mm dick und 250 mm lang waren. Die Enden waren zu Kügelchen zusammengeschmolzen. Das eine diente zur Aufhängung in einem schmalen Schlitz, an das andere wurden die Kugeln mittels Schwefel angeschmolzen. Zur Kontrolle der Anordnung wurden zunächst die Versuche mit einer Stahlkugel wiederholt. Für einen Kugeldurchmesser von 0,556 cm ergab sich eine Durchbruchfeldstärke von 57,6 kV/cm, die gegen den von F. Müller gefundenen Wert von 57,4 kV/cm nur einen Fehler von 0,35 % hat. Diese Messungen bei 50 Perioden/sek. können natürlich mit den Müllerschen Werten bei 500 Perioden/sek. direkt verglichen werden, da bei Luftdurchschlägen keine Frequenzabhängigkeit besteht. Sämtliche angegebenen Werte von Spannungen und Feldstärken sind auf 760 mm Hg und 20° C reduziert.

Bei den Glaskugeln hatte F. Müller gefunden, daß die Durchbruchspannungen bei gleichen Kugelradien der der leitenden Kugel gleich waren. Dies wurde darauf zurückgeführt, daß bei den dielektrischen Kugeln, auf deren Reinigung kein besonderes Gewicht gelegt worden war, sich eine leitende Oberflächenschicht gebildet hatte. Aus diesem Grunde wurden die Kugeln bei den folgenden Versuchen aufs sorgfältigste gereinigt. Sie wurden zunächst mit Salzsäure abgewaschen und in destilliertem Wasser ausgekocht. Sodann wurden sie in einen Exsikkator gebracht und im Vakuum mehrere Stunden mit Phosphorpentoxyd getrocknet. Nachdem sie herausgenommen waren, wurden sie sofort an die Quarzfäden angeschmolzen und zwischen die Plattenelektroden gebracht, so daß schon eine Minute nach Entfernung aus dem Exsikkator der erste Überschlagversuch vorgenommen werden konnte. Mit so vorbereiteten Kugeln wurden Durchbruchwerte erzielt, die mit den theoretisch berechneten gut übereinstimmen, wie im nächsten Kapitel gezeigt werden soll.

Bei diesen Versuchen trat noch folgende interessante Erscheinung auf. Die ersten Durchschlagwerte erreichten die theoretisch berechneten, wurden dann aber noch mehr Überschläge gemacht — der Zeitraum zwischen zwei Überschlägen betrug 4 Minuten —, so sanken die Durchbruchspannungen allmählich und näherten sich mehr oder weniger Werten, wie sie sich für Metallkugeln ergeben. Die Oberfläche muß also infolge der Entladungen einen leitenden Charakter angenommen haben, was sich vielleicht dadurch erklären läßt, daß sich infolge der hohen Temperatur des Funkens mit Hilfe des Stickstoffes der Luft Salpetersäure gebildet und sich an der Kugeloberfläche niedergeschlagen hat. Vielleicht ist die Ursache dieser Erscheinung auch in Restladungen zu suchen. Ob die Kugeln poliert oder mattgeschliffen waren, hatte keinen Einfluß, ebensowenig, wenn zwischen den einzelnen Überschlägen die Kugel mit einem Gebläse angeblasen wurde. Ein Fehlen der Bestrahlung rief in dieser Hinsicht auch keine Änderung hervor. Ließ man die Kugeln nach einer solchen Versuchsreihe unbenutzt hängen, so war nach ungefähr 12 Stunden eine Regeneration eingetreten, d. h. die ersten Durchschlagspannungen erreichten wieder den theoretischen Wert. Die relative Feuchtigkeit des Versuchsraumes betrug im allgemeinen 35 %. Feuchtigkeiten bis zu 55 % hatten nur den Einfluß, daß die Regeneration scheinbar schneller vor sich ging.

Auf diese Weise wurden Kugeln aus Flintglas, Porzellan, Fluor-Kronglas, kristallinischem Quarz, geschmolzenem Quarz, Bernstein und Paraffin untersucht, die sämtlich ein Verhalten zeigten, wie es eben beschrieben ist. Eine Ausnahme bildete nur das Paraffin, bei dem stets die höchsten Durchbruchspannungen erreicht wurden. Dies ist wohl dadurch zu erklären, daß die Paraffin-Oberfläche bei einer Entladung geschmolzen wird und sich so immer wieder neu gebildet. Bei Porzellan



sanken die Durchbruchspannungen auffallend langsam. Kristallinischer und geschmolzener Quarz zeigten die Eigentümlichkeit, daß die Durchbruchspannungen meistens nach zwei oder drei Überschlägen sprungweise auf Werte sanken, die 10—15% unterhalb der Durchbruchspannung einer Metallkugel lagen. Dies ist nur dann verständlich, wenn man annimmt, daß die Kugeln selbst Träger einer Ladung geworden sind.

Bei den Versuchen mit Bernstein- und Paraffinkugeln wurde eine Funkenstrecke mit Messingelektroden von 90 mm Durchmesser verwendet, weil die Mitte der Zinkelektroden nicht einwandfrei gekrümmt war und jetzt Durchbruchspannungen zu messen waren, die denen des homogenen Feldes wegen der kleinen Dielektrizitätskonstanten von Bernstein und Paraffin sehr nahe kommen. Die Abweichung des Feldes vom homogenen Felde wurde zwar an der Plattenoberfläche dadurch vergrößert, daß nur eine Schlagweite von 1,5 cm gewählt werden konnte, um keine zu großen Abweichungen vom homogenen Feld wegen der beschränkten Größe der Platten zu bekommen.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate zusammengestellt:

	r cm	ε	$\mathfrak{E}$ kV/cm	U kV	Mittlerer Fehler der Messung %
Stahl	0,278	∞	57,6	57,2	0,74
Flintglas	0,277	6,85	55,3	71,2	0,96
Porzellan	0,276	6,0	55,6	73,9	0,72
Fluor-Kronglas	0,276	5,87	55,2	73,7	0,54
Kristallinischer Quarz	0,276	4,55	52,9	75,9	0,38
Geschmolzener Quarz	0,276	3,78	50,6	77,2	0,59
Bernstein	0,275	2,8	48,9	83,7 [1]	0,44
Paraffin	0,276	2,0	43,4	86,7 [1]	0,53

Der Wert für die Metallkugel wurde als Mittelwert einer Meßreihe, die Werte für die dielektrischen Kugeln als Mittelwerte der Anfangsmessungen verschiedener Meßreihen gewonnen.

3. Vergleich der Resultate mit der Theorie.

Nach W. O. Schumann[2]) kann man aus den Durchbruchfeldstärken für konaxiale Zylinder diejenigen für Kugeln angenähert berechnen, indem man bei gleichen Feldstärken den Kugeln den doppelten Radius zuordnet. Dies folgt daraus, daß die Durchbruchfeldstärke nur von der Krümmung abhängig ist, die für Zylinder $\frac{1}{r}$, dagegen für Kugeln $\frac{2}{r}$ beträgt. Berechnet man aus der von W. O. Schumann angegebenen Tabelle für Zylinder die Werte für Kugeln und stellt sie graphisch dar, so erhält man Kurve I in Bild 26. In dieses Bild trägt man die experimentell gefundenen Durchbruchfeldstärken für die verschiedenen Kugeln ein, nachdem noch für den Krümmungsradius eine Korrektion angebracht ist, da bei dielektrischen Kugeln die die Kugel in der Zentralen berührende Potentialfläche nicht mehr mit der Kugeloberfläche zusammenfällt. Für den Radius der Niveaufläche R. der eben für die Entladung maßgebend ist, bezogen auf den Kugelradius r ergibt sich

$$R = r \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\text{ [3])}.$$

[1]) Auf eine Schlagweite von 3 cm umgerechnet.
[2]) Durchbruchfeldstärke in Gasen, Abs. 33, S. 85. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923.
[3]) Spielrein, Geometr. z. el. Festigkeitsrechnung, Arch. f. Elektrot. V, H. 7, 1917.

Man sieht, daß die experimentell gefundenen Werte nur bei Kugeln bis zu einer Dielektrizitätskonstante 5 gut mit den auf diese Weise berechneten übereinstimmen, dagegen bei kleineren Dielektrizitätskonstanten erheblich tiefer liegen. Dies ist auch gar nicht anders zu erwarten, wenn man bedenkt, daß die Kurve I nur dann Gültigkeit besitzt, wenn das Feld durch die hineingebrachte Kugel wesentlich unmittelbar an der Oberfläche verzerrt wird. Dies trifft aber bei Kugeln kleiner Dielektrizitätskonstanten nicht mehr zu, so daß auch die ionisierende Wirkung der weiter außerhalb liegenden Schichten zu berücksichtigen ist.

Doch auch diesen Fall kann man streng berechnen. Das allgemeine Entladungsgesetz lautet bekanntlich

$$\int_0^\delta \alpha \, dx = K\text{[1]}.$$

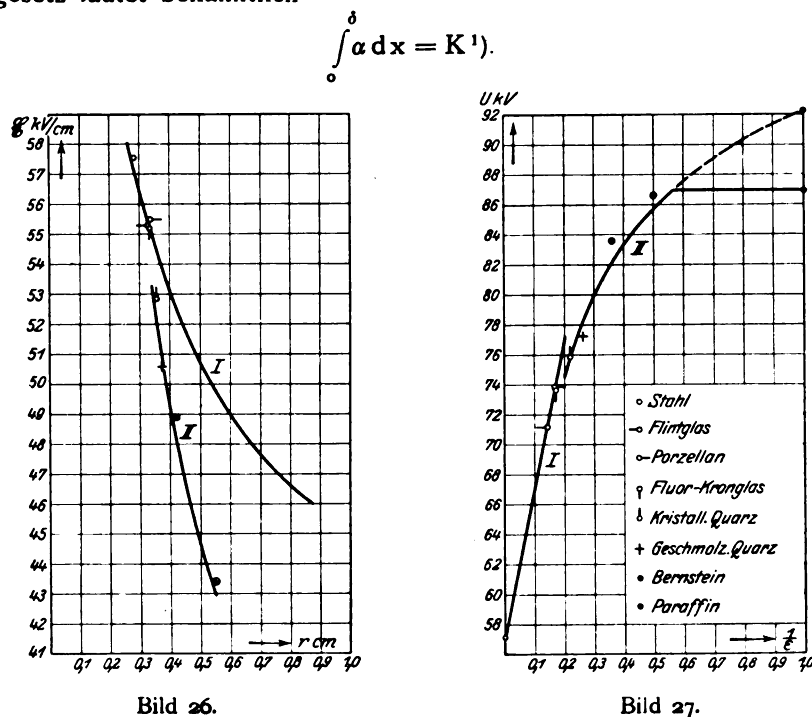


Bild 26. Bild 27.

Aus den Durchbruchfeldstärken des homogenen Feldes läßt sich $\frac{\alpha}{K}$ bestimmen als

$$\frac{\alpha}{K} = \frac{1}{\delta}.$$

Nach W. O. Schumann kann man $\frac{\alpha}{K}$ durch eine Parabel approximieren:

$$\frac{\alpha}{K} = A + B(\mathfrak{E} - C)^2\text{[2]}. \qquad (1)$$

Für unseren Fall der Einzelkugel im homogenen Feld gilt nun für einen Punkt der Kraftlinie größter Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \left[1 + a\left(\frac{r}{x}\right)^3\right], \text{ wo } a = 2\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2},$$

und für den entsprechenden Punkt an der Kugeloberfläche

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_0 [1 + a].$$

Durch Division beider Gleichungen durcheinander erhält man

---

[1]) W. O. Schumann, Durchbruchfeldstärke i. G. S. 147.
[2]) Arch. f. Elektrot. XII, S. 593 und 594, 1923.

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_r} = \frac{1 + a\left(\frac{r}{x}\right)^3}{1 + a}. \tag{2}$$

Aus (2) den Wert für $\mathfrak{E}$ in (1) eingesetzt ergibt

$$\frac{\alpha}{K} = A + B\left(\mathfrak{E}_r \frac{1 + a\left(\frac{r}{x}\right)^3}{1 + a} - C\right)^2$$

$$= A + \frac{B}{(1 + a)^2}\left\{\mathfrak{E}_r\left(1 + a\left(\frac{r}{x}\right)^3\right) - C(1 + a)\right\}^2$$

$$= A + \frac{B}{(1 + a)^2}\left\{D + \mathfrak{E}_r a\left(\frac{r}{x}\right)^3\right\}^2, \text{ wo } D = \mathfrak{E}_r - C(1 + a),$$

oder

$$\frac{\alpha}{K} = A + \frac{B}{(1 + a)^2}\left\{D^2 + 2aD\mathfrak{E}_r\left(\frac{r}{x}\right)^3 + a^2\mathfrak{E}_r^2\left(\frac{r}{x}\right)^6\right\}.$$

Für die Entladungsbedingung bekommt man mit diesem Ansatz:

$$\int_r^{\delta/2} \frac{\alpha\, dx}{K} = \left(A + \frac{B}{(1 + a)^2} D^2\right)\left(\frac{\delta}{2} - r\right) + \frac{B}{(1 + a)^2} a D \mathfrak{E}_r r^3\left(\frac{1}{r^2} - \frac{4}{\delta^2}\right)$$
$$+ \frac{B}{(1 + a)^2} \frac{a^2 \mathfrak{E}_r^2 r^6}{5}\left(\frac{1}{r^5} - \frac{32}{\delta^5}\right) = 1.$$

Als obere Integrationsgrenze darf höchstens das x genommen werden, für das $\mathfrak{E} = C$ ist. Man setzt jetzt wieder den Wert für D ein und für die bekannten Größen folgende Zahlen:

$$A = 0;\ B = 0{,}0210;\ C = 24{,}5\ \text{kV/cm};\ \delta = 3\ \text{cm};\ r = 0{,}276\ \text{cm}.$$

Hiermit erhält man schließlich folgende Gleichung:

$$\mathfrak{E}_r^2 \frac{1}{(1 + a)^2}\left(0{,}00116\, a^2 + 0{,}00560\, a + 0{,}0257\right) - \mathfrak{E}_r \frac{1}{1 + a}(0{,}137\, a + 1{,}26) + 14{,}4 = 0,$$

aus der für jedes a beziehungsweise ε die Durchbruchfeldstärke berechnet werden kann. Die so gefundenen Werte sind als Kurve II in Bild 26 eingezeichnet worden. Man sieht, daß die experimentell bestimmten Werte sich dieser Kurve recht gut anschmiegen.

Im Bild 27 sind die für die einzelnen Kugeln gefundenen Durchbruchspannungen in Abhängigkeit von dem reziproken Wert ihrer Dielektrizitätskonstanten dargestellt. Die Kurven I und II sind wieder theoretisch berechnet worden. Aus diesem Bild ergibt sich folgende interessante Tatsache. Würden die Versuche mit Kugeln einer Dielektrizitätskonstante, die kleiner als 1,8 ist, ausgeführt werden, so würde die Entladung nicht mehr von der Kugel ausgehen, sondern schon vorher an der Kugel vorbei erfolgen, für unseren Fall bei 87,0 kV, da dies die Durchbruchspannung eines homogenen Feldes bei einer Schlagweite von 3 cm ist. Begründet ist diese Erscheinung darin, daß in dem Raum, den die Kugel einnimmt, keine Ionisation stattfindet.

Abschließend kann man aus diesen Untersuchungen folgenden Schluß ziehen: Da die Entladungen, mögen sie von leitenden oder von nicht leitenden Materialien ausgehen, denselben Gesetzmäßigkeiten folgen, ist die Existenz eines Kathodenfalles schon vor Beginn der Entladung unmöglich. Bis zum Durchbruch gilt das elektrostatische ladungsfreie Feld.

Zusammenfassung.

I. 1. Es wird eine Untersuchungsmethode beschrieben, die eine einwandfreie Bestimmung der elektrischen Durchbruchfeldstärke von festen Isolatoren gestattet.

2. Es werden die mittleren Durchbruchfeldstärken für folgende Isolationsmaterialien angegeben: Paraffin, Ätherlack, Schellack, Idonit, Hartgummi, Bakelit, Porzellan, kristallinischer Quarz, geschmolzener Quarz, Gerätequarz, Flintglas.

3. Bei einer systematischen Untersuchung des Glases ergeben sich folgende Resultate:

a) Die Durchbruchfeldstärke nimmt mit der Schlagweite ab.
b) Die Durchbruchfeldstärke nimmt mit wachsender Spannungssteigerung zu.
c) Die Durchbruchfeldstärke ist zwischen -18^0 C und $+90^0$ C unabhängig von der Temperatur.
d) Gute oder schlechte Ableitung der Wärme durch die Elektroden ist ohne Einfluß auf die Durchbruchfeldstärke.
e) Bei Gleichspannung liegt die Durchbruchfeldstärke um $20^0/_0$ höher als bei 50-periodiger Wechselspannung.
f) Es sind kleine Polaritätseffekte wahrscheinlich.

II. Mit Hilfe der Schlierenmethode wird nachgewiesen, daß bei Glas vor dem Durchbruch keine Temperaturerhöhung über 10^0 C eintritt.

III. Die Entladungen der leitenden und dielektrischen Einzelkugel, die in ein homogenes Feld gebracht werden, zeigen keinerlei Materialeinfluß. Daraus folgt, daß für diesen Fall der Entladung bei nicht zu kleinen Elektroden ohne Polaritätswirkung ein Kathodenfall vor Beginn der Entladung in Luft normalen Druckes und normaler Temperatur nicht besteht.

Die vorliegende Arbeit wurde im technisch-physikalischen Institut der Universität Jena in der Zeit vom W.-S. 1922/23 bis S.-S. 1924 ausgeführt.

Meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Dr. W. O. Schumann, der mir die Anregung zu diesen Untersuchungen gab und mir stets mit seinem Rat zur Seite stand, möchte ich meinen herzlichsten Dank aussprechen. Auch Herrn Geheimrat Prof. Dr. M. Wien danke ich für das Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat.

Zu Dank bin ich ferner verpflichtet der Industrie für die Überlassung von Materialien und Apparaten, ganz besonders der Firma Carl Zeiß, ohne deren weitgehendste Unterstützung die Ausführung dieser Arbeit unmöglich gewesen wäre, der Firma Schott u. Gen., der Gelsenkirchener Bergwerks A.-G. für die Überlassung des Transformators, ferner der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft für ein Voltmeter.



Das parallel- und meridianebene Feld nebst Beispielen.

Von

Dr.-Ing. **P. Andronescu**, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Zürich.

Einleitung.

Bekanntlich spielt in der Hochspannungstechnik die Formgebung der einzelnen Bestandteile eines unter Spannung gesetzten Körpers eine wesentliche Rolle, weil das Kraftlinienbild mit der dazugehörigen elektrischen Beanspruchung davon abhängig ist.

In den meisten Fällen handelt es sich in der Praxis um ein Laplacesches Feld, d. h. ein flächennormales Feld, das gleichzeitig quellen- und wirbelfrei ist und das sich durch folgende Differentialgleichung ausdrücken läßt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Die Bestimmung der skalaren Potentialfunktion V ist von den festgelegten Randbedingungen abhängig, und nur in einfachen Fällen läßt sich die Funktion mit Leichtigkeit ermitteln.

Man ist somit im allgemeinen auf graphische Methoden angewiesen, um Kraftlinienfelder zu entwerfen, wobei die Kenntnis der geometrischen Eigenschaften der Feldlinie, die mittlere Krümmung der Ortogonalfläche, die Krümmung der Feldlinie und deren Beziehungen zu der Feldstärke notwendig sind [1]).

In gewissen Fällen genügt zur Festlegung des Kraftlinienfeldes die Zerlegung desselben in Rohrelementen von konstantem dialektrischem Widerstand [2]).

In letzter Zeit sind wertvolle Arbeiten, wie diejenige von Rogowski [3]) und Dreyfus [4]) erschienen, in welchen mit Hilfe der konformen Abbildung die elektrische Festigkeit bei verschiedenen Elektrodenformen im Falle eines parallelebenen Feldes bestimmt wurde.

Es gibt auch Fälle, wie wir sehen werden, wo das Kraftlinienbild in einem parallelebenen und meridianebenen Feld dasselbe sein kann.

In solchen Fällen bietet die rechnerische Bestimmung der Feldstärke auch für ein meridianebenes Feld keine Schwierigkeiten.

Wir stellen uns nun zur Aufgabe, mit Hilfe der bis heute aufgebauten Theorie einige parallelebene Felder zu untersuchen und die Fälle festzulegen, in welchen dieselben auch in einem meridianebenen Felde vorhanden sein können.

Zum Schluß wird noch eine rechnerische Methode zur Bestimmung eines meridianebenen Feldes entwickelt.

Geometrische Eigenschaften der Feldlinien.

Bekanntlich lassen sich durch die Einführung der Vektorrechnung in einfacher Weise wertvolle Beziehungen für die Feld- und Niveau-Linien ableiten.

Setzt man für die Feldstärke

$$f = \text{grad } V = \Delta V,$$

wobei $V = f(x y z)$ eine skalare Potentialfunktion ist, so lautet die Bedingung des wirbelfreien Feldes:

$$\text{rot } f = [\Delta \Delta V] = 0.$$

[1]) Siehe Spielrein, Arch. f. Elektrot. 1915, S. 78 und 1917, S. 245.
[2]) Siehe Kuhlmann, Arch. f. Elektrot. 1915, S. 203.
[3]) Siehe Rogowski, Arch. f. Elektrot. 1923, Heft 1, Bd. XII.
[4]) Siehe Dreyfus, Arch. f. Elektrot. 1924, Heft 2, Bd. XIII.

Ferner gilt für ein quellenfreies Feld:

$$\operatorname{div}(\varepsilon f) = (\Delta \Delta V) = 0$$

und andererseits, weil das Feld flächennormal ist, besteht noch die Beziehung:

$$(F \cdot \operatorname{rot} \cdot F) = 0.$$

Drückt man nun die Feldstärke f durch den Tangenteneinheitsvektor t aus,

$$f = F t,$$

dann läßt sich für div f und rot f schreiben:

$$\operatorname{div}(\varepsilon f) = \varepsilon F \cdot H + (\bar{t} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon F) = 0,$$

$$\operatorname{rot} f = F \cdot K \bar{b} - [t \cdot \operatorname{grad} F] = 0,$$

wobei

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial t} t + \frac{\partial F}{\partial n} \bar{n} + \frac{\partial F}{\partial b} \bar{b}.$$

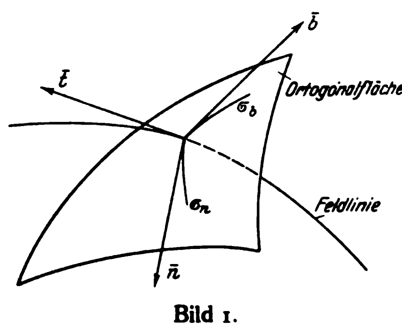


Bild 1.

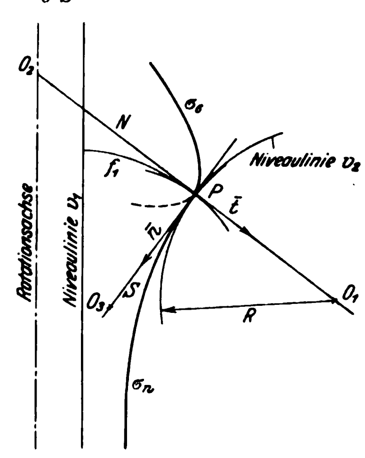


Bild 2.

Durch die Ausführung der Multiplikationen:

$$(\bar{t} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon F) \quad \text{und} \quad [t \cdot \operatorname{grad} F]$$

erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln(\varepsilon F) &= -H \\ \frac{\partial}{\partial n} \ln(F) &= K \\ \frac{\partial}{d b} \ln(F) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dabei bedeuten: H die mittlere Krümmung der Ortogonalfläche im Punkte P, gegeben durch die algebraische Summe der Krümmungen zweier zueinander senkrechter Normalschnitte, und K ist die Krümmung der Feldlinie im Punkte P.

Im Bild 1 bilden K_n und K_b die Krümmungen der Schnittlinien σ_n und σ_b der Ortogonalfläche mit den Ebenen t n und t $\bar{b}$. Dabei gilt:

$$H = K_b \pm K_n.$$

Für das Laplacesche Feld kann man noch schreiben:

$$\operatorname{rot} \cdot \left(\frac{1}{F} \operatorname{grad} F\right) = 0$$

und daraus ergibt sich:

$$K K_b = \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial K}{\partial t}. \tag{3}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (2) und (3) kann man feststellen, ob das angenommene Feld den Bedingungen eines Laplaceschen Feldes genügt.

Betrachten wir im Bild 2 ein meridianebenes Feld. σ_n und σ_b bilden die Normalschnitte. Dabei sind:

$$R = \overline{PO_1} \qquad \frac{1}{R} = K_n,$$

$$N = \overline{PO_2} \qquad \frac{1}{N} = K_b,$$

$$S = \overline{PO_3} \qquad \frac{1}{S} = K$$

und

$$H = \frac{1}{N} \pm \frac{1}{R}$$

ist positiv, wenn die Ortogonalfläche im Punkte P gegen die Rotationsachse konkav ist. In einem parallelebenen Feld ist $K_b = 0$ und Gleichung (3) wird:

$$\frac{\partial K_n}{\partial n} + \frac{\partial K}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich, daß im Falle, wo dasselbe Kraftlinienfeld als meridian- und parallelebenes bestehen kann, die Bedingungsgleichung

$$K \cdot K_b = \frac{\partial K_b}{\partial n} \tag{5}$$

erfüllt werden muß. Durch die Anwendung der obigen vier Beziehungen (2), (3), (4), (5) bei der Durchführung von Beispielen werden wir ihre Bedeutung kennen lernen.

Das parallelebene Feld.

Es läßt sich zeigen, daß im Falle eines parallelebenen Feldes die Möglichkeit besteht, in vielen Fällen die in der Praxis vorkommen, dasselbe rechnerisch zu behandeln, und zwar dank der Anwendung der konformen Abbildung, die uns in einfacher Weise zu einer Lösung der Aufgabe führt.

Es gibt unendlich viele Funktionen $V(xy)$, die die Bedingung des Laplaceschen Feldes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

erfüllen. Zum Beispiel:

$$V = e^x \sin y$$
$$V = 2xy$$
$$V = \frac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x.$$

Für V-konstant erhält man in der (xy)-Ebene die Niveaulinien, und die ortogonalen Trajektorien dazu bilden die Feldlinien. Die Feldstärke im Punkte P wird:

$$f = \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j$$

(siehe Bild 3), wobei $i \cdot j$ die Einheitsvektoren von konstanter Richtung in der (xy)-Ebene sind.

Wir können aber im zweidimensionalen Raume die Feldstärke auch symbolisch ausdrücken:

$$f = \frac{\partial V}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial y} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \, e^{i\alpha},$$

wobei

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} r = \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial x}} \right)$$

sind. Genau wie die Potentialfunktion V läßt sich eine Funktion u so bestimmen, daß man für u-konst. die Feldlinien erhält. Daraus erfolgt, daß grad V und grad u im Punkte P aufeinander senkrecht stehen müssen und man schreiben kann:

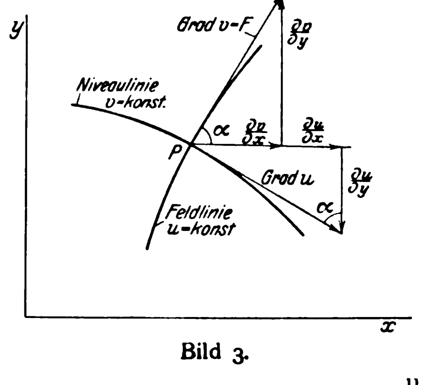


Bild 3.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(siehe Bild 3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (6) läßt sich nun die u-Funktion für die früher angenommene Potentialfunktion V bestimmen:

$$u = e^x \cos y$$
$$u = x^2 - y^2$$
$$u = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x.$$

Bekanntlich bilden aber die Gleichungen (6) auch die Bedingung für die Existenz einer analytischen Funktion t.

$$t = f(\varrho) = u + i V,$$

wobei

$$\varrho = x + i y$$
$$u = f_1(x y)$$
$$V = f_2(x y).$$

Durch die Einführung der analytischen Funktion zur Festlegung der Potentialfunktion V hat man die Möglichkeit, das Kraftlinienfeld von einer Ebene in eine andere konform abzubilden, wodurch sich komplizierte Kraftlinienfelder auf einfachere zurückführen lassen.

Einführung der analytischen Funktion zur Bestimmung der Feld- und Niveaulinien bzw. der Feldstärke in einem parallelebenen Feld.

Bei der Behandlung solcher Problemen kommen drei Funktionen zur Anwendung, die in folgender Weise dargestellt sind:

$$t = f(\varrho) = u + i V \quad \text{oder} \quad \varrho = f'(t) = x + i y,$$
$$W = \varphi(t) = \tau + i \Delta \quad \text{oder} \quad t = \varphi'(W) = u + i V,$$
$$\varrho = \psi(W) = x + i y \quad \text{oder} \quad W = \psi'(\varrho) = \tau + i \Delta.$$

Wir stellen uns nun zur Aufgabe, eine Funktion $W = \varphi(t)$ derart zu bestimmen, daß der reellen Achse u in t-Ebene einem gegebenen polygonalen Linienzug in W-Ebene entspricht.

Bildet nun die u-Achse in der t-Ebene eine oder mehrere Potentiallinien oder Feldlinien und ist ferner die Funktion $\varrho = f'(t)$ bekannt, dann läßt sich das Feld in der W-Ebene, in welcher die Randbedingungen durch den gegebenen polygonalen Linienzug bestimmt sind, rechnerisch ermitteln.

Die Aufgabe wird mit Hilfe der Methode von H. A. Schwarz[1]) gelöst. In Anbetracht seiner Bedeutung sei dieselbe hier kurz erwähnt.

Die Schwarzsche Methode.

Es sei gegeben:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{C}{(a_1 - t)^{p_1}(a_2 - t)^{p_2} \ldots\ldots (a_n - t)^{p_n}} = F(t), \tag{7}$$

wobei:

$$C = m\,e^{i\gamma}$$

$a_1 < a_2 < a_3 \ldots\ldots < a_n$ reelle Zahlen und

$p_1\,p_2 \ldots\ldots p_n$ reelle und rationale Zahlen sind.

$$t = u + i\,V.$$

Gesucht wird:

$$W = \int \frac{C\,dt}{(a_1 - t)^{p_1}(a_2 - t)^{p_2} \ldots\ldots (a_n - t)^{p_n}} + W_0.$$

Bild 4.

Bild 5.

Es läßt sich nun zeigen, daß, wenn der Punkt P_t sich in t-Ebene von $u = -\infty$ bis $u = +\infty$ bewegt, der Punkt P_w in W-Ebene einen polygonalen Linienzug aus $n + 1$ Geraden beschreibt (siehe Bild 4 und 5).

Für $t = u$ stellen die einzelnen Ausdrücke $(a_1 - t)$, $(a_2 - t) \ldots\ldots (a_n - t)$ positive oder negative Zahlen dar, und zwar z. B. für P_t rechts von a_3 wird $(a_1 - t)$, $(a_2 - t)$ und $(a_3 - t)$ negativ, die übrigen Ausdrücke $(a_4 - t) \ldots\ldots (a_n - t)$ aber bleiben positiv.

Wir können nun schreiben:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{m\,e^{i\gamma}\,e^{-i\pi p_1}\,e^{-i\pi p_2}\,e^{-i\pi p_3}}{(t - a_1)^{p_1}(t - a_2)^{p_2}(t - a_3)^{p_3} \ldots\ldots (a_4 - t)^{p_4} \ldots\ldots (a_n - t)^{p_n}}.$$

Für den Fall, daß der Punkt P_t sich unmittelbar vor oder nach einem beliebigen Punkt a befindet, kann man das unbestimmte Integral leicht finden. Befindet sich der Punkt P_t z. B. unmittelbar vor oder nach a_4, dann darf man schreiben:

$$t - a_1 \cong a_4 - a_1 \cong \text{konst.} \qquad a_5 - t \cong a_5 - a_4 \cong \text{konst.}$$
$$t - a_2 \cong a_4 - a_2 \cong \text{konst.} \qquad a_n - t \cong a_n - a_5 \cong \text{konst.},$$

ausgenommen $(a_4 - t)$, welcher variabel ist. Wir erhalten:

$$W = \frac{m\,e^{i\gamma}\,e^{-i\pi p_1}\,e^{-i\pi p_2}\,e^{-i\pi p_3}}{(a_4 - a_1)^{p_1}(a_4 - a_2)^{p_2} \ldots\ldots (a_n - a_4)^{p_n}} \int \frac{1}{(a_1 - t)^{p_4}}\,dt + W_4$$

oder:

$$W - W_4 = K_4\,e^{i\alpha_4} \int \frac{1}{(a_4 - t)^{p_4}}\,dt.$$

[1]) Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus von G. Kirchhoff. Verlag Teubner, 1891, S. 101.

Man unterscheidet nun die drei Fälle:

$$p_4 = 1 \qquad p_4 < 1 \qquad p_4 > 1.$$

Fall I. $p_4 = 1$.

$$(W - W_4) = K_4 e^{i\alpha_4} e^{i\pi} \ln(a_4 - t \quad \text{für} \quad a_4 - t > 0$$

$$(W - W_4) = K_4 e^{i\alpha_4} e^{i\pi} \cdot \pi e^{i\frac{\pi}{2}} + K_4 e^{i\alpha_4} e^{i\pi} \ln(t - a_4) \quad \text{für} \quad a_4 - t < 0.$$

Für $a_4 - t > 0$ aber kleiner als 1 wird

$$\ln(a_4 - t) = e^{i\pi} |\ln(a_4 - t)|.$$

Für $a_4 - t = 0$ ist $\ln(a_4 - t) = \infty e^{i\pi}$.

Der Punkt P_{W_4} befindet sich im Unendlichen (siehe Bild 6). Für $a_4 - t < 0$ aber $> (-1)$ kehrt der Punkt P_W auf einer Parallelen zu $(W - W_4)$ vom Unendlichen zurück.

Fall II. $p_4 < 1$.

$$W - W_4 = K_4 e^{i\alpha_4} \frac{e^{i\pi}}{-p_4 + 1} (a_4 - t)^{-p_4+1} \quad \text{für} \quad a_4 - t > 0$$

$$W - W_4 = K_4 e^{i\alpha_4} \frac{e^{i\pi}}{-p_4 + 1} e^{i\pi(-p_4+1)} (t - a_4)^{-p_4+1} \quad \text{für} \quad a_4 - t < 0.$$

Bild 6.

Bild 7.

In diesem Falle liegt der Punkt P_{W_4} im Endlichen. Für $a_4 - t = 0$ wird $W - W_4 = 0$.

Die Gerade $P_{W_4} P_{W_5}$ ist gegenüber der Geraden $P_{W_3} P_{W_4}$ in dem als positiv angenommenen Sinn (siehe Bild 7) um den Winkel $\pi(-p_4 + 1)$ gedreht.

Fall III. $p_4 > 1$.

$$W - W_4 = K_4 e^{i\alpha_4} \frac{1}{p_4 - 1} (a_4 - t)^{-p_4+1} \quad \text{für} \quad a_4 - t > 0$$

$$W - W_4 = K_4 e^{i\alpha_4} \frac{e^{i\pi(-p_4+1)}}{p_4 - 1} (t - a_4)^{-p_4+1} \quad \text{für} \quad a_4 - t < 0.$$

Für $(a_4 - t) > 0$ und sehr kleine Werte derselben wird $W - W_4$ sehr groß.

Für $a_4 - t = 0$ wird $W - W_4 = \infty$, d. h. der Punkt P_{W_4} befindet sich wie im ersten Fall, im Unendlichen.

Für $(a_4 - t) < 0$ und kleine Werte derselben befindet sich der Punkt P_W auf einer andern Geraden sehr weit von P_{W_5}.

Die Gerade $\overline{P_{W_4} P_{W_5}}$ ist gegenüber $\overline{P_{W_3} P_{W_4}}$ um $\pi(-p_4 + 1)$ in negativem Sinn gedreht, weil $\pi(-p_4 + 1)$ negativ ist (siehe Bild 8).

Aus allen diesen drei Fällen ersieht man, daß durch die Festlegung von p der Kantenwinkel des polygonalen Linienzuges bestimmt wird.

Die von uns aufgestellte Aufgabe ist also gelöst, wenn erstens der Differentialquotient $\frac{dW}{dt}$ bestimmt ist und zweitens durch die Integration W ermittelt wird.

Der Differentialquotient $\frac{dW}{dt}$ ist bis auf die Konstante m bekannt, wenn $a_1 a_2 \ldots . a_n$, $p_1 p_2 \ldots . p_n$ und γ festgelegt sind wobei: die Größe von γ von der Richtung der Geraden $\overline{P_0 P_{w_1}}$ abhängt, und die Konstante m läßt sich durch Bildung des bestimmten Integrals zwischen zwei beliebigen Punkten z. B.

$$\int_{P_{w_3}}^{P_{w_4}} F(t)\, dt = d_{34} = f(m\, a_1 a_2 \ldots a_n)$$

ermitteln.

Zwischen $d_{12} d_{23} \ldots . d_{(n-1)n}$ und $m\, a_1 a_2 \ldots a_n$ bestehen also n Beziehungen.

Die Konstante W_0 wird in der Art bestimmt, daß für

$$\int F(t)\, dt = 0 \qquad W = W_0$$

gemacht wird.

Bild 8.

Viel wichtiger als das Kraftlinienfeld selbst ist die Bestimmung der Feldstärke f, denn diese oder besser das Integral $\int (f\, d\sigma)$ ist maßgebend für die Beanspruchung der Materialien.

Bestimmung der Feldstärke.

Wenn in der t-Ebene $\varrho = f'(t)$ bekannt ist und $y = f \cdot (uV)$ die Potentialfunktion bildet, dann ergibt sich:

$$f_t = \frac{\partial y}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial V}.$$

Bekanntlich erhält man für den Differentialquotienten der Funktion ϱ.

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial u} = \frac{1}{i} \frac{\partial \varrho}{\partial V}, \tag{8}$$

wobei:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \varrho}{\partial V} = -i \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial y}{\partial V}.$$

Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen der analytischen Funktion:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial V} \qquad \frac{\partial x}{\partial V} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

bekommt die Gleichung (8) folgende Form:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial y}{\partial V} + i \frac{\partial y}{\partial u}$$

oder:

$$i \frac{d\varrho}{dt} = -\frac{\partial y}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial V} = f_t'.$$

Der Absolutwert von f_t' gibt den Betrag der Feldstärke und ist der Lage nach das Spiegelbild von f_t in bezug auf die imaginäre Achse (V).

Bildet nun $x = f_2(uV)$ die Potentialfunktion, dann erhält man:

$$f_t = \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial x}{\partial V}$$

und

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial V} = f_t',$$

wobei f_t' bezüglich der reellen Achse (u) zu f_t spiegelbildlich ist.

Anwendung der Schwarzschen Methode zur Bestimmung der Kraftlinienbilder und der Feldstärke in einem parallelebenen Feld.

Es sei gegeben:

$$t = e^{\varrho} = u + i V,$$

wobei:

$$\varrho = x + i y$$

ist.

Daraus erhält man:

$$x = \frac{1}{2} \ln (u^2 + V^2)$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{V}{u}.$$

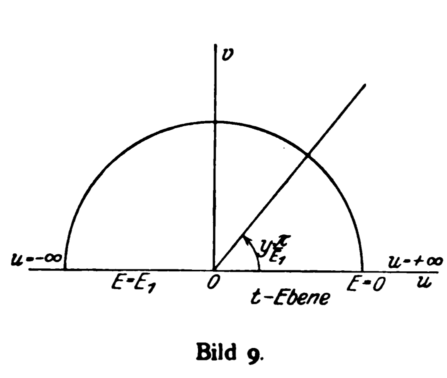


Bild 9.

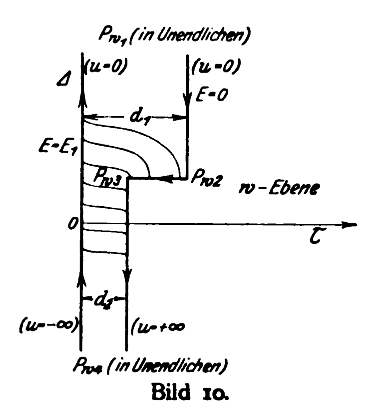


Bild 10.

Für $y = 0$ erhält man in t-Ebene die positive u-Achse und für $y = \pi$ die negative u-Achse.

In der t-Ebene erhält man für $x =$ konst. Kreise, für $y =$ konst. Geraden und die Funktionen x, y erfüllen die Bedingungen eines Laplaceschen Feldes.

Dieser Fall stellt ein parellelebenes Feld dar, wo die Feldlinien durch Kreisbogen und die Niveaulinien durch Gerade dargestellt sind, und das man sich durch zwei unter Potentiale $E = 0$ und $E = E_1$ stehende Halbebenen von sehr kleinem Abstand erzeugt denken kann.

Wenn nun y die Spannung in Volt angeben soll, dann ist $y \frac{\pi}{E_1}$ der Winkel, der die Lage der Potentialgeraden angibt.

Für $y = E_1$ wird der Winkel gleich π (siehe Bild 9).

Die Funktion t wird:

$$t_{cm} = e^{\varrho \frac{\pi}{E}}$$

$$x^{volt} = \frac{E_1}{\pi} \frac{1}{2} \ln (u^2 + V^2)$$

$$y^{volt} = \frac{E_1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{V}{u}.$$

Für die Feldstärke f_t' kann man schreiben:

$$f_t' = i \frac{d\varrho}{dt} = \frac{E_1}{\pi} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{t} \text{ volt/cm}.$$

Unter Zuhilfenahme der Schwarzschen Methode soll nun die Potentialfunktion y und die Feldstärke F_W in der W-Ebene ermittelt werden.



Wir legen in der W-Ebene (Bild 10) den polygonalen Linienzug fest. Die $\mathcal{J}$-Achse stellt eine Potentiallinie $(E = E_1)$ und der Linienzug rechts eine andere Potentiallinie $(E = 0)$ dar.

In diesem Fall besteht der Linienzug aus vier Geraden, also $n = 3$. Ferner hat man:

$$e^{\gamma} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$a_1 = 0$, weil die ganze negative u-Achse in der t-Ebene, die auf Potential $E = E_1$ steht, in der W-Ebene die $\mathcal{J}$-Achse darstellen muß (siehe Bild 10 und 11).

$p_1 = 1$, weil $\overline{P_{W_1} O}$ und $\overline{P_{W_1} P_{W_2}}$ und $\overline{P_{W_1} O}$ und $\overline{P_{W_3} P_{W_4}}$ parallele Geraden sind.

a_2 und a_3 können auf der positiven u-Achse beliebig gewählt werden.

Es sei

$$a_2 = 1$$
$$a_3 = a_3$$

(siehe Bild 11). p_2 und p_3 müssen kleiner als 1 sein, weil die Punkte P_{W_2} und P_{W_3} im Endlichen liegen.

Man hat:

$$\pi(-p_2+1) = \frac{\pi}{2} \qquad p_2 = \frac{1}{2}$$

$$\pi(-p_3+1) = \frac{3\pi}{2} \qquad p_3 = -\frac{1}{2}.$$

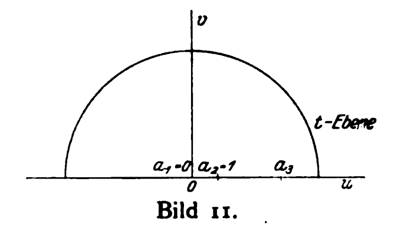


Bild 11.

Daraus ergibt sich:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{m\, e^{i\frac{\pi}{2}}}{-t\,(1-t)^{\frac{1}{2}}(a_3-t)^{-\frac{1}{2}}} = F(t).$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß für kleine Werte von $-t$, $(1-t)$ bzw. (a_3-t) die Punkte P_W auf dem angenommenen Linienzug liegen, und in diesem Falle läßt sich die Konstante m auch ohne Bestimmung des Integrals $\int_{P_{W_2}}^{P_{W_3}} F(t)\,dt$ ermitteln.

Auf Seite 384 ergab sich für den Abstand der beiden parallelen Geraden der Wert $K_4 \pi$.

Wir können nun schreiben

$$m\, a_3^{\frac{1}{2}} \pi = d_1$$

und für $t = \infty$

$$m\pi = d_2.$$

Daraus:

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = a_3$$

und folglich:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\frac{d_2}{\pi} e^{i\frac{\pi}{2}}}{-t\,(1-t)^{\frac{1}{2}}(a_3-t)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Bestimmung der Feldstärke.

$$f_W' = i\frac{d\varrho}{dW} = i\frac{\frac{d\varrho}{dt}}{\frac{dW}{dt}} = \frac{E_1 (1-t)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi}}{d_2 (a_3-t)^{\frac{1}{2}}} \text{ volt/cm.}$$

In P_{w_2} wird $f_w' = 0$ (siehe Bild 10).
In P_{w_3} wird $f_w' = \infty$.

Für $t = 0$ $\quad f_w' = \frac{E_1}{d_1} e^{i\pi}$.

Für $t = \pm\infty$ $f_w' = \frac{E_1}{d_2} e^{i\pi}$.

In P_{w_3} dreht sich die Feldstärke plötzlich um $\frac{\pi}{2}$, was theoretisch durch den Wert ∞ sich kennzeichnen läßt, nimmt aber längs der Geraden $\overline{P_{w_3} P_{w_4}}$ bzw. $\overline{P_{w_3} P_{w_2}}$ in unmittelbarer Nähe von P_{w_3} sehr rasch ab.

Zur Bestimmung der elektrischen Beanspruchung des Isolationsmaterials an der Stelle P_{w_3} kommt, wie die neueren Versuche ergeben haben, nicht die Feldstärke selbst in Frage, sondern eine gewisse Spannung ΔE, die durch Integration von F, $(\int F\, d\sigma)$ auf einem bestimmten Weg ermittelt werden kann. Dreyfus hat in seiner bereits früher erwähnten Arbeit versucht, den Ausdruck $\Delta E \cdot F_n^2$ als eine von dem Material abhängige Konstante darzustellen.

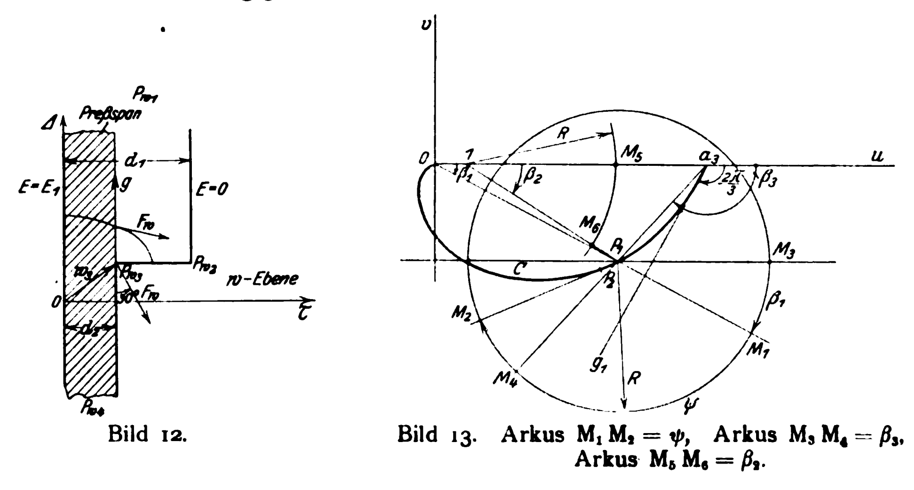


Bild 12.

Bild 13. Arkus $M_1 M_2 = \psi$, Arkus $M_3 M_4 = \beta_3$, Arkus $M_5 M_6 = \beta_2$.

Die an diesem Beispiel gewonnenen theoretischen Ergebnisse sollen nun im folgenden praktischen Fall benutzt werden.

Wir denken uns eine metallische Platte unter Spannung E_1, eine zweite von der Form $P_{w_1} P_{w_2} P_{w_3} P_{w_4}$ unter Spannung Null (siehe Bild 12) und zwischen diesen beiden eine Isolationsplatte aus Preßspan von der Dicke d_2.

Wir fragen nun nach dem Verlauf der Spannung längs der Oberfläche der Isolationsplatte (g), die sich dadurch ändert, daß $d_1 > d_2$ ist.

Unter der Wirkung dieser Spannung treten, wenn diese einen bestimmten, durch das Experiment festgelegten Wert erreicht hat, an der Oberfläche der Isolationsplatte Glimmentladungen auf. Wir müssen nun den Verlauf der Komponente der Feldstärke F_w längs der Linie g bestimmen, und dies bedingt andererseits die Kenntnis der Funktion $W = f(t)$ längs dieser Linie.

Dieselbe läßt sich auf graphischem Wege wie folgt bestimmen:

Es sei:
$$t = \varrho_1 e^{i\beta_1} \qquad dt = ds\, e^{i(\beta_1 + \psi)}$$
$$t - 1 = \varrho_2 e^{i\beta_2} \qquad \overline{P_1 P_2} = ds \text{ (siehe Bild 13)}$$
$$t - a_3 = \varrho_3 e^{i\beta_3}$$

und man erhält:

$$(W - W_3) = \frac{d_2}{\pi} \int^{1} \frac{\varrho_3^2\, ds}{\varrho_1 \varrho_2^2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\beta_3}{2} - \frac{\beta_2}{2} - \beta_1 \quad \beta_1 + \psi\right)} \text{ (siehe Bild 12).}$$

wobei:

$$\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\beta_3}{2} - \frac{\beta_2}{2} - \beta_1 + \beta_1 + \psi = \frac{\pi}{2} + \pi - \pi$$

werden muß.

Daraus ergibt sich:

$$-2\,\psi - \beta_3 + \beta_2 = 2\,\pi.$$

Befindet sich der Punkt P_W in unmittelbarer Nähe von P_{W_3}, dann wird

$$\beta_2 \cong 0 \qquad \psi = \beta_3 = -\frac{2\,\pi}{3}.$$

Der Punkt P_t bewegt sich von a_3 aus in der Richtung $a_3 g_1$ (siehe Bild 13).

Wenn sich der Punkt P_W von P_{W_3} aus auf der Geraden g bewegt, so beschreibt der Punkt P_t in der t-Ebene die Kurve c, die für die Bedingung:

$$-2\,\psi - \beta_3 + \beta_2 = 2\,\pi$$

gefunden werden kann.

Der Punkt P_1 sei nun bekannt und P_2 zu bestimmen. Die Richtung $P_1 P_2$ wird zuerst annähernd festgelegt.

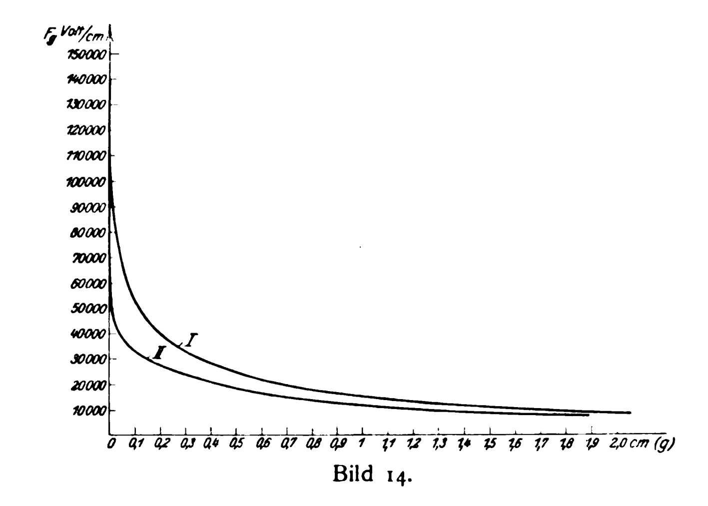


Bild 14.

Von M_1 aus konstruiert man dann auf dem Kreis mit dem Radius R den Winkel $-2\,\psi - \beta_3 + \beta_2$, der bei der richtigen Lage von P_2 gleich $2\,\pi$ wird.

Für die Feldstärke F_W' hat man:

$$f_W' = i\,\frac{d\,\varrho}{d\,W} = \frac{E_1\,\varrho_2^{\frac{1}{2}}}{d_2\,\varrho_3^{\frac{1}{2}}}\, e^{i\left(\pi + \frac{\beta_3}{2} - \beta_1\right)}.$$

Für $\beta_2 = 0$ und $\beta_3 = -\frac{2\,\pi}{3}$ bildet die Feldstärke F_W mit der Geraden g einen Winkel von 30^0.

In der vorliegenden Tabelle sind die zur Bestimmung der Komponente der Feldstärke F_g längs der Geraden g_1 notwendigen Größen eingetragen und aus dem Diagramm Bild 14 I läßt sich ersehen, wie die Feldstärke für ganz kleine Werte von g stark abnimmt.

Wir wollen nun noch den Einfluß von $\left(\frac{d_1}{d_2}\right) = a_3$ auf die Größe der Feldstärke in unmittelbarer Nähe von P_{W_3} verfolgen.

Dazu berechnen wir $i\,\frac{d\,\varrho}{d\,W} = f(W)$ für kleine Werte von $a_3 - t$)

$E_1 = 90000$ V $\quad d_1 = 6$ cm
$\qquad\qquad\qquad\quad d_2 = 2$ cm

Ta-

Nr.	$t_{cm} = \varrho_1 e^{i\beta_1}$	$\varrho_2 e^{i\beta_2}$	$\varrho_3 e^{i\beta_3}$	$\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$	$\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right)^{1/2}$	$\frac{\beta_2-\beta_3}{2}$	ds_{cm}	ψ	$\sin\frac{\beta_2-\beta_3}{2}$
1	$9 e^{i0}$	$8\cdot e^{i0}$	$0\cdot e^{-i120°}$	∞	∞	0	0	0	120°	0,866
2	$8{,}65 e^{-i4°}$	$7{,}65 e^{-i5°}$	$0{,}72\cdot e^{-i119°}$	16,0	4	0,25	57°	0,72	123°	0,84
3	$8{,}35 e^{-i8°20'}$	$7{,}40 e^{-i10°}$	$1{,}4 e^{-i119°30'}$	5,3	2,3	0,435	55°	0,68	125°	0,82
4	$7{,}91 e^{-i13°20'}$	$7{,}0 e^{-i16°}$	$2{,}2 e^{-i124°}$	3,18	1,73	0,579	54°	0,80	126°	0,81
5	$7{,}5 e^{-i18°30'}$	$6{,}6 e^{-i22°}$	$3{,}1 e^{-i130°}$	2,13	1,46	0,685	54°	0,85	127°	0,80
6	$7{,}1 e^{-i23°30'}$	$6{,}25 e^{-i27°}$	$3{,}8 e^{-i132°}$	1,645	1,285	0,78	52° 30'	0,75	127° 30'	0,793
7	$6{,}7 e^{-i29°}$	$5{,}8 e^{-i34°}$	$4{,}5 e^{-i135°}$	1,286	1,13	0,885	50°	0,70	130°	9,766
8	$6{,}2 e^{-i35°}$	$5{,}4 e^{-i41°}$	$5{,}3 e^{-i139°}$	1,02	1,01	1,0	49°	0,80	131°	0,754
9	$5{,}7 e^{-i40°}$	$5{,}0 e^{-i49°}$	$6{,}1 e^{-i142°}$	0,82	0,905	1,105	46° 30'	0,70	133° 30'	0,725
10	$5{,}1 e^{-i49°}$	$4{,}55 e^{-i59°}$	$6{,}9 e^{-i145°}$	0,66	0,814	1,23	43°	0,90	137°	0,682
11	$4{,}6 e^{-i55°30'}$	$4{,}1 e^{-i68°}$	$7{,}5 e^{-i148°}$	0,546	0,74	1,35	40°	0,83	140°	0,642
12	$4{,}0 e^{-i64°}$	$3{,}6 e^{-i78°}$	$8{,}0 e^{-i154°}$	0,45	0,672	1,485	38°	0,80	142°	0,615
13	$3{,}35 e^{-i72°}$	$3{,}2 e^{-i90°}$	$8{,}6 e^{-i158°}$	0,372	0,61	1,64	34°	0,90	146°	0,56
14	$2{,}65 e^{-i84°}$	$2{,}7 e^{-i105°}$	$9{,}1 e^{-i163°}$	0,296	0,545	1,835	29°	0,98	151°	0,484
15	$2{,}0 e^{-i97°}$	$2{,}3 e^{-i122°}$	$9{,}5 e^{-i168°}$	0,242	0,494	2,02	23°	0,90	157°	0,390
16	$1{,}3 e^{-i116°}$	$2{,}0 e^{-i143°}$	$9{,}65 e^{-i173°}$	0,207	0,455	2,2	15°	0,85	165°	0,26

$$i\frac{d\varrho}{dW} = \frac{E_1 (a_3 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}}{d_2 (a_3 - t)^{\frac{1}{2}}}.$$

Man eliminiert $(a_3 - t)^{\frac{1}{2}}$

$$W - W_3 = \frac{\frac{d_2}{\pi}(a_3 - t)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3 (a_3 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{(a_3 - t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{d_2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{a_3^{\frac{1}{2}}(a_3 - 1)^{\frac{1}{6}}(W - W_3)^{\frac{1}{3}}}$$

somit:

$$i\frac{d\varrho}{dW} = \frac{E_1\left(1 - \frac{1}{a_3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}}{d_2^{\frac{2}{3}}(W - W_3)^{\frac{1}{3}}}.$$

Aus dem Diagramm Bild 15 ersieht man, wie rasch der Ausdruck $\left(1 - \frac{1}{a_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ mit a_3 zunimmt, und schon für $a_3 \cong 3$, d. h. $d_1 = d_2\, 1{,}73$, erreicht die Feldstärke f für Konstante d_2 beinahe ihren Maximalwert.

belle.

$\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\right)^{1/2}\sin\frac{\beta_2-\beta_3}{2}$	$\frac{\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right)^{1/2}}{\varrho_1}$	$\frac{\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right)^{1/2}}{\varrho_1}\,ds$	$\int\frac{\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right)^{1/2}}{\varrho_1}\,ds$	$\frac{d_2}{\pi}\int\frac{\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_2}\right)^{1/2}}{\varrho_1}\,ds$	$\frac{E_1}{d_2}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_3}\right)^{1/2}\sin\frac{\beta_2-\beta_3}{2}=Fg$
∞	0		0	0	∞
3,36	0,029	0,0104	0,0104	0,0066 cm	151 000 V/cm
1,885	0,052	0,0272	0,0376	0,0239	85 000
1,4	0,073	0,050	0,0876	0,0559	63 000
1,18	0,0915	0,0705	0,1581	0,1005	53 000
1,02	0,11	0,0750	0,2331	0,1480	46 000
0,866	0,132	0,085	0,3181	0,2020	39 000
0,761	0,162	0,1175	0,4356	0,2760	34 200
0,655	0,194	0,1245	0,5601	0,3570	29 400
0,555	0,241	0,1950	0,7551	0,480	25 000
0,475	0,294	0,2180	0,9731	0,619	21 300
0,412	0,371	0,2660	1,2391	0,786	18 500
0,341	0,49	0,3880	1,6271	1,030	15 300
0,262	0,693	0,580	2,2071	1,40	11 800
0,192	1,01	0,7650	2,9721	1,89	8 600
0,118	1,69	1,06	4,0321	2,05	5 300

Eine Herabsetzung der Feldstärke längs der Linie g wird durch Verkleinerung des Winkels $g\,P_{W_3}P_{W_2}$ erreicht. In Bild 16 bildet die Gerade $P_{W_3}P_{W_2}$ mit g einen Winkel von 45°.

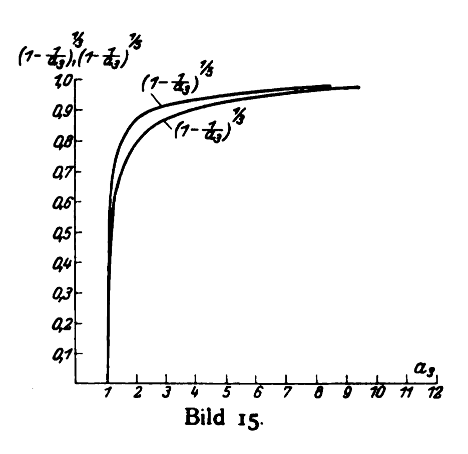


Bild 15.

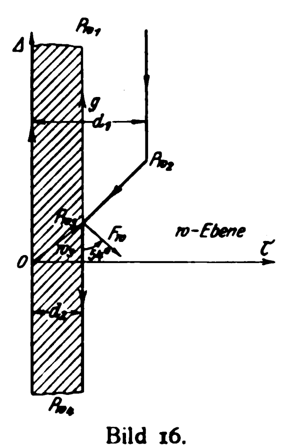


Bild 16.

Analog wie früher kann man schreiben:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\frac{d_2}{\pi}e^{i\frac{\pi}{2}}}{-t\,(1-t)^{\frac{1}{4}}(a_3-t)^{-\frac{1}{4}}}\qquad\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4=a_3$$

$$f_{W}' = i\frac{d\varrho}{dW} = \frac{E_1(1-t)^{\frac{1}{4}} e^{i\pi}}{d_2(a_3-t)^{\frac{1}{4}}}$$

$$t = \varrho_1 e^{i\beta_1}$$
$$t - 1 = \varrho_2 e^{i\beta_2}$$
$$t - a_3 = \varrho_3 e^{i\beta_3}.$$

Für die Punkte P_W, die auf der Geraden g liegen, wird:

$$W - W_3 = \frac{d_{31}}{\pi}\int \frac{\varrho_3^{\frac{1}{4}}\, ds}{\varrho_1 \varrho_2^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{\pi}{2}},$$

wobei die Bedingungsgleichung

$$-4\psi - \beta_3 + \beta_2 = 4\pi$$

erfüllt werden soll.

Das Diagramm Bild 14 II gibt den Verlauf der Komponente der Feldstärke in der Richtung g in Abhängigkeit von $(W - W_3)$ oder (g).

Ferner hat man:

$$f_W' = i\frac{d\varrho}{dW} = \frac{E_1 \varrho_2^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\pi + \frac{\beta_2 - \beta_3}{4}\right)}}{d_2 \varrho_3^{\frac{1}{4}}}.$$

In unmittelbarer Nähe von P_{W_3} kann man setzen:

$$\beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = \psi = -\frac{4\pi}{5}$$

und daraus ersieht man, daß die Feldstärke F_W mit der Geraden g einen Winkel von 54° bildet (im vorigen Fall 30°).

Für kleine Werte von $(a_3 - t)$ läßt sich noch schreiben:

$$i\frac{d\varrho}{dW} = \frac{E_1\left(1 - \frac{1}{a_3}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{4}{5\pi}\right)^{\frac{1}{5}} e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20}\right)}}{d_2^{\frac{4}{5}}(W - W_3)^{\frac{1}{5}}}$$

und daraus ersieht man, daß, was den Einfluß von $\left(1 - \frac{1}{a_3}\right)^{\frac{1}{5}}$ anbelangt, die Feldstärke mit a_3 noch vielmehr zunimmt (siehe Bild 15).

Praktisch kommen die angegebenen Beispiele bei der Verbindungsmuffe eines Hochspannungskabels zur Anwendung.

Wir betrachten zwei Kabelenden, die verbunden werden sollen, wobei der Bleimantel mit Rücksicht auf die Kriechlänge in einem gewissen Abstand von dem Verbindungsstück abgeschnitten ist. Das Ganze liegt in einer metallischen Verbindungsmuffe, die auf dieselbe Spannung wie der Bleimantel gebracht ist. Wenn am Ende des Bleimantels der Abstand zwischen Muffenwand und Kabelseele rasch zunimmt, beginnen die Feldlinien sich stark zu biegen, wodurch eine große Komponente der Feldstärke in axialer Richtung auftritt, die bei einer gewissen Spannung durch Entstehung von Glimmentladungen eine Karbonisierung des Papiers zur Folge hat.

Bekanntlich läßt sich eine starke Biegung der Feldlinien gegen den Bleimantel dadurch vermeiden, daß man die Bleiende mit Metalltrichter versieht.

Aus den vielen Versuchen, die ich mit solchen Muffen durchgeführt habe[1]), hat sich herausgestellt, daß die Glimmentladungen an der Papieroberfläche nicht allein nur durch Aufsetzen eines Trichters am Bleiende vermieden werden können,

[1]) Die Versuche wurden von dem Metall- und Kabelwerke A.-G. Dornach angestellt und in den Laboratorien des Schweiz. Elektrotechn. Vereins Zürich durchgeführt.



sondern daß man, nachdem die Kabelenden in die Muffe gelegt sind, die an der Papieroberfläche vorhandene Feuchtigkeit beseitigen muß. Dies geschieht am besten so, daß man die Kabelenden mit heißer Isoliermasse längere Zeit abspült, die Masse dann etwa 110^0 warm einfüllt und nach der Montage die Muffe womöglich noch einige Zeit von außen erhitzt. Bei den Versuchen hat sich auch ergeben, daß eine feste Füllmasse ungeeignet ist. Am besten eignet sich Transformatorenöl, da bei Verwendung einer flüssigen Masse die Entfernung der Feuchtigkeit durch Kochen viel besser erreicht wird als bei einer festen Masse. Andererseits bietet die Anwendung einer flüssigen Füllmasse noch den Vorteil, daß die vom Kabelpapier durch die dielektrische Verluste erzeugte Wärme abgeführt wird, wodurch die kritische Temperatur, die zu Durch- oder Überschlag Anlaß gibt, nicht auftreten kann.

Der Übergang von einem parallelebenen auf ein meridianebenes Feld.

Wir haben gesehen, daß die ortogonalen Trajektorien in der t-Ebene, die aus Geraden und Kreisen bestehen, sich durch die analytische Gleichung $t = e^{\varrho}$ ausdrücken lassen.

Dieselben können die Feld- und Niveaulinien für ein meridianebenes Feld in folgenden Fällen bilden, z. B. die negative und die positive u-Achse stellen zwei auf $E = E_1$ und $E = 0$ stehende Leiter dar, oder man denkt sich eine auf $E = E_1$ stehende Vollebene, deren Schnittgerade mit der Papierebene die u-Achse bildet. In o besitzt diese ein kleines Loch, durch welches die V-Achse als ein auf Potential $E = E_2$ stehender Leiter geht.

In diesem Fall wird die Bedingungsgleichung:

$$K \cdot K_b = \frac{\partial K_b}{\partial n}$$

erfüllt.

In Punkt P (Bild 17) hat man:

$$K = \frac{1}{R} \qquad N = P\,O_2 = R \operatorname{tg} \alpha \qquad K_b = \frac{1}{N} = \frac{1}{R \operatorname{tg} \alpha}$$

$$-\frac{\partial K_b}{\partial n} = \frac{\partial K_b}{\partial R}\left(\frac{1}{R \operatorname{tg} \alpha}\right).$$

Daraus erhält man:

$$K\,K_b = \frac{\partial K_b}{\partial n}.$$

Betrachten wir nun die analytische Funktion:

$$t = \frac{e^{i\varrho} + e^{-i\varrho}}{2}.$$

Die ortogonale Trajektorien in der t-Ebene bilden konfokale Ellipsen und Hyperbeln.

Man hat:

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 1 \qquad \frac{u^2}{\left(\frac{e^{-y} + e^y}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{e^{-y} - e^y}{2}\right)^2} = 1.$$

Setzt man:

$$a_h = \cos x \qquad a_e = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \qquad b_e = \frac{e^{-y} - e^y}{2}$$
$$b_h = \sin x$$

und man erhält

$$a_e^2 - b_e^2 = a_h^2 + b_h^2 = c_e^2 = c_h^2 = 1.$$

Für die Schnittpunkte der Hyperbeln und Ellipsen bestehen die Beziehungen:

$$u = \pm a_e a_h$$
$$v = \pm b_e b_h.$$



Bildet nun $A_1 A_2$ (siehe Bild 18) eine unendlich dünne und unendlich lange metallische Platte, die unter Spannung $E = E_1$ steht, dann erhält man ein parallelebenes Feld, wobei die Hyperbel die Feldlinien und die Ellipsen die Niveaulinien darstellen. Im Falle, wo $A_1(-\infty)$ und $A_2(+\infty)$ Halbebenen auf Potentiale E_1, E_2 darstellen sollen, bilden die Ellipsen die Feldlinien und die Hyperbeln die Niveaulinien.

Dieser Fall unterscheidet sich von dem früher behandelten dadurch, daß der Abstand zwischen den beiden Halbebenen nicht mehr unendlich klein ist. Es läßt sich nun zeigen, daß diese Trajektorien auch die Feld- und Niveau-Linien in einem meridianebenen Feld darstellen können. Es sei z. B. $A_1 A_2$ ein auf Potential E_1 stehender Leiter.

Die Krümmung der Feldlinien (Hyperbel) in Punkte P ist:

$$K = \frac{a_h^4 b_h^4}{(a_h^4 v^2 + b_h^4 u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

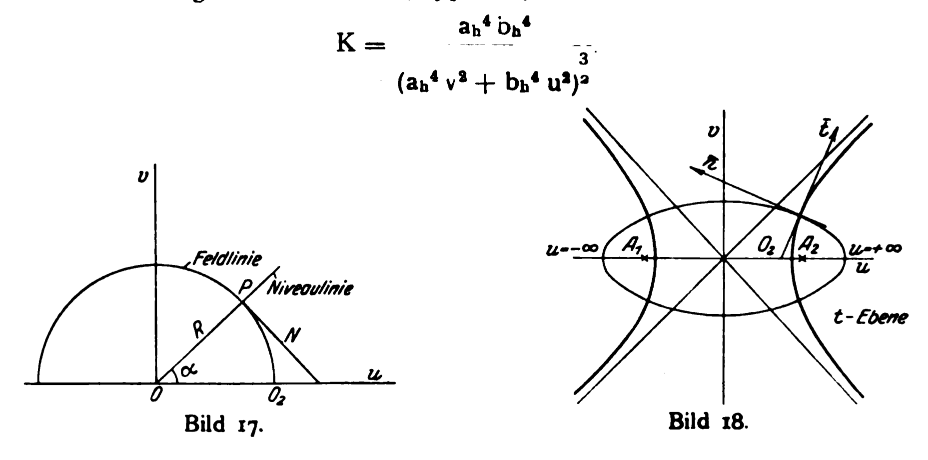


Bild 17. Bild 18.

Ferner hat man:

$$PO_2 = N = \frac{1}{K_b} = \frac{(u^2 b_e^4 + v^2 a_e^4)^{\frac{1}{2}}}{a_e^2}$$

folglich:

$$K \cdot K_b = \frac{a_h^4 b_h^4 a_e^2}{(v^2 a_h^4 + u^2 b_h^4)^{\frac{3}{2}} (v^2 a_e^4 + u^2 b_e^4)^{\frac{1}{2}}} .$$

$$\frac{\partial K_b}{\partial n} = a_e^4 b_e^4 \frac{u \cdot v}{(a_e^4 v^2 + b_e^4 u^2)^2} .$$

Daraus läßt sich ersehen, daß für

$$u = a_e a_h$$
$$v = b_e b_h$$

(die Kordinaten des Schnittpunktes der Hyperbeln und Ellipsen) die Bedingungsgleichung

$$K \cdot K_b = \frac{\partial K_b}{\partial n}$$

erfüllt ist.

Diese Bedingung wird nicht mehr erfüllt, sobald die Rotationsachse nicht mehr mit der u-Achse zusammenfehlt.

Wir haben nun gesehen, daß in gewissen Fällen in einem parallel- bzw. meridianebenen Feld dasselbe Kraftlinienfeld bestehen und folglich ein und dieselbe analytische Funktion zur Festlegung der Feldlinien benutzt werden kann, gleich nicht aber bleibt im parallel- und meridianebenen Feld, bei demselben Kraftlinienbild, die Größe der Feldstärke, da die Änderung derselben längs einer Feldlinie von H abhängig ist.

Daraus folgt, daß in gewissen Fällen die analytische Funktion zur Bestimmung der Feld- und Niveau-Linien benutzt werden kann, zur Festlegung der Feldstärke aber allein nicht mehr genügt.

Wenn H längs der Feldlinie bekannt ist, dann kann man mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln (\varepsilon F) = - H$$

F berechnen.

Betrachten wir das früher behandelte parallelebene Feld (Bild 10), wodurch mit Hilfe der Beziehung:

$$\frac{\partial K_n}{\partial n} + \frac{\partial K}{\partial t} = 0$$

über den Verlauf der Feldlinien längs der Niveaulinien ($E = E_1$ und $E = 0$) sich folgendes ergibt:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 0,$$

d. h. daß K entweder konstant ist, die Feldlinie einen Kreisbogen bildet oder für $K = 0$ diese gerade wird.

Da aber längs der Niveaulinien $E = E_1$ und $E = 0$ die Feldstärke F variabel ist, kann, mit Rücksicht auf die Beziehung $\frac{\partial}{\partial n} (\ln F) = K$, die Feldlinie nur einen Kreisbogen bilden.

Ferner ersieht man, daß das in Bild 10 angegebene parallelebene Feld als meridianebenes Feld nicht bestehen kann, weil die Bedingung:

$$K \cdot K_b = \frac{\partial K_b}{\partial n}$$

nicht erfüllt ist, weil $\frac{\partial K_b}{\partial n}$ längs der Niveaulinie $E = 0$ und $E = E_1$ Null wird, hingegen K verschieden von Null ist.

Das meridianebene Feld.

Im folgenden wird ein rechnerisches Verfahren zur Bestimmung des Kraftlinienbildes im Falle eines meridianebenen Feldes entwickelt.

Als gegeben betrachten wir die Niveaulinie n_0 und den Verlauf der Feldstärke F längs dieser Niveaulinie (siehe Bild 19)

$$F_{t0} = f(n_0).$$

P_{tn} ist der Schnittpunkt der Feldlinie $t = t$ und der Niveaulinie $n = n$.

Δn_{tn} und Δt_{tn} bilden Feld- bzw. Niveaulinienelementen vom Punkte P_{tn} aus.

Für eine gewählte Potentialdifferenz ΔE wird Δt_{t0} (Feldlinienelement zwischen Niveaulinien n_0 und n_1) bekannt.

Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\partial \ln F}{\partial n} = K$$

läßt sich die Krümmung K_{t0}, bezogen auf das Niveaulinienelement Δn_{t0}, bestimmen und diese kann längs des Feldlinienelementes Δt_{t0} als Konstant betrachtet werden.

Für den Punkt $P_{(t+1)0}$ hat man:

$$K_{(t+1)0} = \frac{(\ln F_{t0} - \ln F_{(t+1)0})\, 2}{\Delta n_{t0}} - K_{t0}.$$

Für P_{10} wird

$$K_{10} = \frac{(\ln F_{00} - \ln F_{10})\, 2}{\Delta n_{00}} \qquad (K_{00} = 0).$$

Die Feldlinienkrümmung K wird auf diese Weise längs der Niveaulinie $(n = 0)$ ermittelt, und daraus läßt sich die Niveaulinie $(n = 1)$ konstruieren.

Die nächste Aufgabe besteht in der Festlegung der Feldstärke F längs der Niveaulinie $(n = 1)$.

Mit Hilfe der Beziehung:

$$\frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial K}{\partial t} = \frac{K}{N},$$

wobei

$$H = \frac{1}{N} \pm \frac{1}{R}$$

bestimmen wir zuerst H_{t_1} längs der Niveaulinie $(n = 1)$, $\frac{1}{N_{t_1}}$ ist leicht zu ermitteln, zur Bestimmung von $\frac{1}{R_{t_1}}$ hingegen kann folgender Weg eingeschlagen werden.

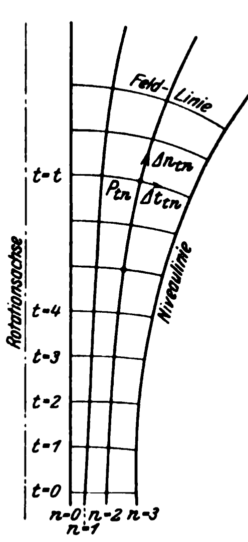


Bild 19.

Für alle Punkte, die auf dem Feldlinienelement Δt_{t_0} liegen, darf man K_{t_0} als konstant betrachten und folglich schreiben:

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{K}{N}.$$

Für Punkt P_{11} wird

$$(H_{01} - H_{11}) = \left(\frac{K_{01}}{N_{01}} + \frac{K_{11}}{N_{11}}\right)\frac{1}{2}\Delta n_{01}.$$

Dabei ist:

$$H_{01} - H_{11} = \frac{1}{N_{01}} - \left(\frac{1}{N_{11}} - \frac{1}{R_{11}}\right)$$

und woraus R_{11} ermittelt werden kann.

In obigem Ausdruck wird für

$$\Delta t_{00} = \Delta t_{10}$$

$$\frac{1}{N_{01}} - \frac{1}{N_1{}^1} = 0, \quad \ln F_{00} = \ln F_{10},$$

$$K_{00} + K_{10} = K_{01} + K_{11} = 0$$

und

$$R_{11} = 0.$$

Auf diese Weise lassen sich von Punkt zu Punkt alle Werte von R bestimmen. Nachdem man $H_{t_1} = f(n_1)$ ermittelt hat, wird mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\partial \ln F}{\partial t} = -H,$$

die gesuchte Funktion $F_{t_1} = f(n_1)$ bestimmt.

Für Punkt P_{t_1} kann man schreiben:

$$F_{t_1} = F_{t_0} e^{-(H_{t_0} + H_{t_1})\frac{1}{2}\Delta t_{t_0}}.$$

Die zur Bestimmung von F_{t_1} benutzte Berechnungsmethode ist für die Ermittlung der nächsten Feldlinien dieselbe. Durch die Anwendung dieses Verfahrens ist man in der Lage, auf rechnerischem Wege das Kraftlinienbild für ein meridianebenes Feld zu bestimmen, wenn die Niveaulinie $(n = 0)$ und $F_{t_0} = f(n_0)$ gegeben sind.

Als praktische Anwendung spielt diese Methode eine wesentliche Rolle in der Bestimmung der Form der am Kabelende in der Hochspannungsmuffe angelegten Trichter.



Uber eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Konstanten von Schwingungskreisen: Schwingungszahlen, Strahlungsdämpfungen, Strom und Spannungsverteilung.

Von

Friedrich Müller, Petersburg.

1. Einleitung und Zusammenfassung der Resultate.

In vorliegender Arbeit wird eine allgemeine Methode[1]) zur Bestimmung von Schwingungskonstanten: Schwingungszahlen, Strahlungsdämpfungen, Strom und Spannungsverteilung gegeben. Da aber die endgültigen sich hierauf beziehenden Formeln doppelte Flächenintegrale enthalten, so erscheint die praktische Anwendbarkeit dieser Methode fürs erste als wenig aussichtsvoll. Trotzdem dürfte die Veröffentlichung der Ergebnisse der Theorie in ihrem gegenwärtigen Zustand rechtzeitig sein.

Es wird der Ausdruck des Vektorpotentials für das Feld eines beliebigen Erregers als Integral der flächenhaft verteilten Ströme einerseits, andererseits der Vektor der magnetischen Kraft als Rotor dieses Vektorpotentials und dann der Flächenrotor um einen Punkt der Oberfläche des Erregers gebildet. Dadurch erhält man den Ausdruck der Strömungsdichte auf dem Erreger einerseits unmittelbar, andererseits als Integral der auf diesem flächenhaft verteilten Ströme.

Aus diesen Überlegungen läßt sich eine Integralgleichung von folgender Form ableiten

$$\mathfrak{J}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds \,|\, \mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta) \,|\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c} r' + 1\right). \\ \{ J_1 \cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J\,\mathfrak{n}) \},$$

wo $\mathfrak{J}(x, y, z)$ die Strömungsdichte in einem festen Punkte $\mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta)$ diejenige in einem variablen Punkte resp. bezeichnet.

Der Kern dieser Gleichung ist

$$\frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c} r' + 1\right) \{ J_1 \cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(\mathfrak{n}\,J_1) \},$$

wo

$$\omega = \alpha i + \omega_0.$$

Dabei ist α der durch Strahlung hervorgerufene Dämpfungsfaktor, ω_0 die Schwingungsfrequenz; J_1, w_1 und n bezeichnen Einheitsvektore, deren Richtung mit denen der Strömung im Punkte ξ, η, ζ resp. äußeren Normale im Punkte x, y, z und der Richtung r' zusammenfallen; r' bezeichnet dabei die Entfernung vom variablen Punkte ξ, η, ζ bis zu einem festen außerhalb des Erregers gelegenen und dem Punkte x, y, z unendlich nahe gelegenen Aufpunkte. Eine ähnliche Gleichung läßt sich für die Spannungs- oder Ladungsverteilung auf dem Erreger ableiten. Zur Ermittlung unserer Unbekannten, der Funktion $\mathfrak{J}$ und der Schwingungskonstanten α und ω_0 wird für den Fall symmetrischer Erreger in folgender Weise verfahren: Es wird die quadratische Differenz zwischen linker und rechter Seite unserer Integralgleichung gebildet und die Werte der Unbekannten bestimmt, für welche dieses

[1]) Siehe auch H. Poincaré, Lumière Electrique, II. Serie, 13, pp. 7, 35, 67. 1911. Obwohl der hier beschrittene Weg schon früher in dieser Arbeit von Poincaré Verwendung findet, so sind meine speziellen Arbeitsformeln I, II, III usw. in dieser Arbeit, die sich mit Betrachtungen allgemeinerer Art beschäftigt, nicht enthalten.

Quadrat auf die gesamte Leiteroberfläche erstreckt ein Minimum wird. Dieses Minimum soll gleich Null sein oder der Null sich genügend nähern. Diese Bedingung fordert, daß die Abgeleiteten des Integrals nach α, ω_0 und denjenigen Parametern, welche $\mathfrak{F}$ bestimmen, gleich Null werden. Für symmetrische Erreger kann man ferner $\mathfrak{F}$ in eine Fourriersche Reihe in folgender Weise entwickeln:

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = F(z) = b_1 \cos \frac{\pi z}{2h} + b_2 \cos \frac{2\pi z}{2h} + \cdots\cdots$$

Aus diesen Überlegungen gelangen wir zu einem System von Gleichungen, die zur Ermittlung von b_2, b_3 b_n dienen können, wobei b_1 unbestimmt bleibt.

Diese Gleichungen sind von der Form

$$b_1 A_1' + b_2 A_2' + \cdots\cdots + b_n A_n' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_1 A_1^{(n-1)} + b_2 A_2^{(n-1)} + \cdots\cdots + b_n A_n^{(n-1)} = 0,$$

wo die Größen A-Funktionen von α und ω_0 sind. Indem wir dieses System von $n-1$-Gleichungen nach b_2, b_3, b_{n-1} auflösen, wobei b_1 unbestimmt bleibt, die so ermittelten Werte in die Gleichungen, welche durch Differenziation unserer quadratischen Differenz nach α und ω_0 entstehen, einsetzen, erhalten wir zwei transzendente Gleichungen zur Bestimmung von α und ω_0.

2. Aufstellung der Integralgleichung.

Das elektromagnetische Feld eines Erregers beliebiger Form läßt sich bekanntlich durch das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und das skalare Potential Φ der klassischen Elektronentheorie bestimmen. Diese Funktionen genügen bekanntlich den Differentialgleichungen

$$\nabla^2 \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -4\pi J,$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho,$$

wo J die Strömungsdichte, ϱ die Dichte der elektrischen Flächenladungen auf dem in einen vollkommenen Isolator (Vakuum) eingelagerten Erreger bezeichnet.

Bezeichnet ferner $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, so lassen sich diese Größen ebenfalls in bekannter Weise durch folgende Formeln bestimmen:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}.$$

Andererseits haben wir die Ausdrücke für $\mathfrak{A}$ und Φ als bestimmte Integrale

$$\mathfrak{A} = \int \frac{ds}{r'} J\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r'}{c}\right)$$

$$\Phi = \int \frac{ds}{r'} \varrho \left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r'}{c}\right)^{1)}$$

wobei die Integration auf sämtliche von Leitern erfüllten Gebieten zu erstrecken ist

$$r' = \sqrt{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2}$$

bezeichnet die Entfernung von einem äußeren Aufpunkt x', y', z' bis zu einem beliebigen auf dem Erreger gelegenen Quellpunkte. Das Argument $t - \frac{r'}{c}$ bedeutet, daß einem jeden Element des Integranden eine Zeit zukommt, welche um $\frac{r'}{c}$ zur Aufpunktszeit verfrüht ist.

[1]) Siehe M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. II, 2. Aufl., 1908.

Betrachten wir jetzt einen der Oberfläche unseres Erregers unendlich nahe gelegenen Aufpunkt. Ersteren können wir uns dabei schalenförmig vorstellen, bestehend aus einer sehr dünnen Schale eines vollkommenen Leiters. Es möge ferner der Punkt P (x, y, z) auf dem Erreger selbst liegen, und zwar am Fuße der den Punkt P′ (x + d x, y + d y, z + d z) enthaltenden Normale (s. Bild 1).

Bilden wir jetzt das Linienintegral von $\mathfrak{H}$ bestehend aus zwei der Erregerfläche S parallelen Elementen, von denen das eine den Aufpunkt P′ enthaltende ganz außerhalb S liegen möge; das andere innerhalb dieser und zwei weiteren Elementen, die auf S senkrecht stehen mögen. Dieses Integral läßt sich in bekannter Weise auf einen Flächenrotor von $\mathfrak{H}$ im Punkte P zurückführen.

$$[\mathfrak{n}, \operatorname{rot} \mathfrak{A}],$$

wo $\mathfrak{A}$ derjenige Wert zugeschrieben wird, den es in P′ annimmt. Andererseits nimmt dieses Integral den Wert an

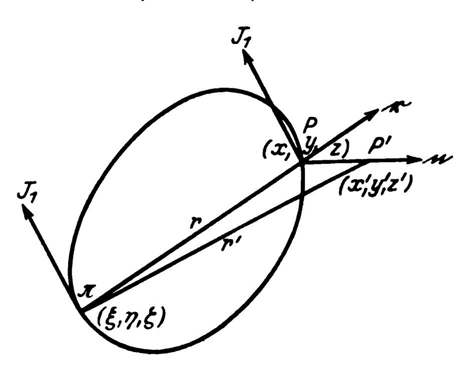


Bild 1.

$$4\pi J(x, y, z, t).$$

Wenn wir die zwei letzten Ausdrücke einander gleich setzen, so kommt

$$J(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{n}, \operatorname{rot}\int \frac{ds}{r'} J\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r'}{c}\right)\right],$$

wo

$$r' = \sqrt{(x + dx - \xi)^2 + (y + dy - \eta)^2 + (z + dz - \zeta)^2}.$$

Nehmen wir ferner an, J sei eine harmonische Zeitfunktion

$$J(x, y, z, t) = \mathfrak{J}(x, y, z)\, e^{i\omega t},$$

wo

$$\omega = \alpha i + \omega_0$$

ist, so erhalten wir nach Einsetzung dieses Wertes in die letzte Gleichung

$$\mathfrak{J}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{n}_1 \operatorname{rot}\int \frac{ds}{r'} \mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{i\omega}{c} r'}\right].$$

Da die Operation $[\mathfrak{n}, \operatorname{rot}]$ eine Differenzierung nach den Koordinaten x, y, z bedeutet, so kann sie unter das Integralzeichen eingeführt werden, somit

$$\mathfrak{J}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, |\mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta)| \left[\mathfrak{n}, \operatorname{rot}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r'}}{r'} J_1\right],$$

dabei ist J_1 ein Einheitsvektor, dessen Richtung mit der Strömungsrichtung im Quellpunkte ξ, η, ζ zusammenfällt, $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normale. Oder in Komponenten ausgedrückt:

$$\mathfrak{J}_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, |\mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta)| \left[\mathfrak{n}, \operatorname{rot}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r'}}{r'} J_1\right]_x$$

$$\mathfrak{J}_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, |\mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta)| \left[\mathfrak{n}, \operatorname{rot}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r'}}{r'} J_1\right]_y$$

$$\mathfrak{J}_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, |\mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta)| \left[\mathfrak{n}, \operatorname{rot}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r'}}{r'} J_1\right]_z.$$

Führen wir jetzt die unter dem Integralzeichen vorkommende vektorielle Multiplikation aus, so kommt

$$\mathfrak{F}_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, F_x(\xi, \eta, \zeta)\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c}r' + 1\right)$$

$$\{\cos(\mathfrak{n}\,x)\cos(\mathfrak{r}\,x) + \cos(\mathfrak{n}\,y)\cos(\mathfrak{r}\,y) + \cos(\mathfrak{n}\,z)\cos(\mathfrak{r}\,z)\} -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int ds\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c}r' + 1\right)$$

$$\{\mathfrak{F}_x(\xi, \eta, \zeta)\cos \mathfrak{n}\,x + \mathfrak{F}_y(\xi, \eta, \zeta)\cos(\mathfrak{n}\,y) + \mathfrak{F}_z(\xi, \eta, \zeta)\cos(\mathfrak{n}\,z)\}\cos(\mathfrak{r}\,x)$$

oder

$$\mathfrak{F}_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, \mathfrak{F}_x(\xi, \eta, \zeta)\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left(\frac{\omega}{c}r' + 1\right)$$

$$\left\{\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \cos(J\,\mathfrak{n})\frac{\cos(\mathfrak{r}\,x)}{\cos(J_1\,x)}\right\}$$

und in ähnlicher Weise:

$$\mathfrak{F}_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, F_y(\xi, \eta, \zeta) \tag{I}$$

$$\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c}r' + 1\right)\left\{\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \cos(J\,\mathfrak{n})\frac{\cos(\mathfrak{r}\,y)}{\cos(J\,y)}\right\}$$

$$\mathfrak{F}_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, F_z(\xi, \eta, \zeta).$$

$$\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c}r' + 1\right)\left\{\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \cos(J\,\mathfrak{n})\frac{\cos(\mathfrak{r}\,z)}{\cos(J\,z)}\right\}$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, |\mathfrak{F}(\xi, \eta, \zeta)|\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c}r' + 1\right). \tag{I'}$$

$$\{J_1\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \cos(J_1\,\mathfrak{n})\,\mathfrak{r}_1\}.$$

Der Integrand auf der rechten Seite stellt die Summe zweier Vektoren dar, von denen der erste die Richtung der Strömung J_1, der zweite die Richtung von w_1 besitzt.

Die Ausdrücke I bilden somit ein System homogener Integralgleichungen mit der unbekannten Funktion $\mathfrak{F}$. Der Kern der ersten dieser Gleichungen ist

$$\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left\{\frac{i\omega}{c}r' + 1\right\}\left\{\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \cos(\mathfrak{n}\,J_1)\frac{\cos(\mathfrak{r}\,x)}{\cos(J\,x)}\right\}.$$

Dabei muß die Strömungsrichtung J in sämtlichen Punkten des Erregers gegeben sein. Wir haben jetzt zur Aufgabe: Bestimmung der unbekannten Funktion $\mathfrak{F}$, sowie der Parameter α und ω_0.

Zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe fehlt uns noch die Gleichung, welche die Spannungs- oder Ladungsverteilung auf dem Erreger ergibt. Diese erhalten wir in folgender Weise: Indem wir den Gaußschen Satz an einen elementaren Zylinder, welcher ein Flächenelement um den Punkt P herausschneidet und den Punkt P' auf der einen Basis hat, anwenden, erhalten wir nach gemachten Voraussetzungen:

$$\varrho(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\nabla\int\frac{ds}{r'}\,\gamma\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r'}{c}\right) - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t},$$

wobei wieder

$$r' = \sqrt{(x + dx - \xi)^2 + (y + dy - \eta)^2 + (z + dz - \zeta)^2}$$

und ϱ die Ladungsdichte auf unserem Erreger bezeichnet. Indem wir wieder ϱ als harmonische Zeitfunktion ansetzen:

$$\varrho(x, y, z, t) = \varphi(y, x, z)\, e^{i\omega t}$$

$$\varrho\left((\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r'}{c}\right) = \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{i\omega\left(t - \frac{r'}{c}\right)}.$$

Nach Einführung dieser Ausdrücke und desjenigen von $\mathfrak{A}$ in die letzte Gleichung erhalten wir

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int ds\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, \operatorname{div} \nabla \left\{\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\right\} +$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{i\omega}{c}\int ds\, \mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta)\, \operatorname{div}\left\{\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'} J_1\right\}$$

und nach Ausführung der vektoriellen Operationen[1])

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int ds\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c}\right)^2 + \tag{II}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{i\omega}{c}\int ds\, \mathfrak{J}(\xi, \eta, \zeta)\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'^2}\left(\frac{i\omega}{c}r + 1\right)\cos(J\,1).$$

Wir bemerken, daß das System der Gleichungen (I) uud (II) die vollständige Lösung unseres Problems enthält. Zu diesem Zweck haben wir zuerst die homogene Gleichung (I) aufzulösen. Nach Auswertung der Funktion $\mathfrak{J}$, sowie der Parameter α und ω_0 und Substituierung ihrer Werte in (II) können wir diese als inhomogene Integralgleichung betrachten mit der unbekannten Funktion φ, die nach bekannten Methoden gelöst werden kann[2]). Da beide Gleichungen (I) und (II) die Entfernung r' von einem beliebigen Quellpunkte ξ, η, ζ bis zu einem beliebigen der Erregerfläche S unendlich nahe gelegenen Aufpunkt $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ enthalten, was eine Unbestimmtheit mit sich bringt, so kann man diese Gleichungen derart umformen, daß anstatt der r' die Entfernungen bis zum Punkte $P(x, y, z)$ eingehen. Für größere Werte von r' wird man es ohne weiteres durch r ersetzen können wegen Kleinheit der Strecke $\overline{PP'}$ im Vergleich zu r. Für eine kleine den

[1]) Es mögen der Bequemlichkeit wegen die folgenden Zwischenrechnungen angeführt werden:

$$\nabla\left(\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\right) = \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r'}\right)\nabla r.$$

$$\operatorname{div}\nabla\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'} = \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\left\{\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r'}\right)\operatorname{div}\nabla r' - \nabla r' \cdot \nabla\left[\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r'}\right)\right]\right\}.$$

$$\operatorname{div}\nabla\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'} = \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\left\{\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r'}\right)\frac{2}{r'} + \left[\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r'}\right)^2 + \frac{1}{r'^2}\right] + \nabla r' \nabla r'\right\}$$

$$\operatorname{div}\nabla\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'} = \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\left\{\frac{i\omega}{c}\right\}^2 \qquad \text{wegen } \nabla r' \nabla r' = 1.$$

Andererseits ist

$$\operatorname{div}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'} J_1 = \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\operatorname{div} J_1 - J_1 \nabla \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}$$

$$\operatorname{div}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'} J_1 = \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r'}\right)(J_1, \nabla r') = \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r'}}{r'}\left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r'}\right)\cos(J_1\, r).$$

[2]) Vgl. auch H. Poincarré, loc. cit.



Aufpunkt P enthaltende Fläche ist das nicht mehr statthaft. Außerdem wird für den Punkt P der Integrand logarithmisch unendlich.

Um diesen Teil unseres Integrals auszuwerten, bilden wir eine Tangentenfläche zu S in P und beschreiben auf dieser Fläche um den Punkt P einen kleinen Kreis. Dieser Kreis kann zugleich als Projektion eines kleinen Teils unserer Fläche aufgefaßt werden, welcher durch einen geraden Zylinder, dessen Basis mit unserem Kreis zusammenfällt, herausgeschnitten wird. Bei Verkleinerung unseres Kreises nähert sich die Fläche unseres kleinen Flächenstückes der Kreisfläche und das auf dieses Flächenstück verbreitete Integral unterscheidet sich nur durch Größe zweiter Ordnung von folgendem Ausdruck:

$$\int_{\Theta} \frac{2\pi R\,dR}{r^3} D\, e^{-\frac{i\omega}{c}r}\left(\frac{i\omega}{c}r+1\right)\mathfrak{F}(x,y,z).$$

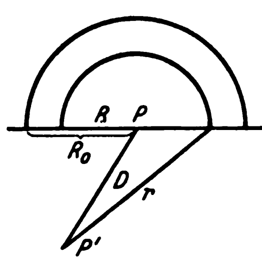


Bild 2.

Dieser Ausdruck entsteht aus (I) wenn wir ds dem Element einer Kreisfläche

$$ds = 2\pi R\,dR$$

$$\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) = \frac{D}{r} \qquad \cos(\mathfrak{J}_1\,\mathfrak{n}) = 0$$

gleichsetzen.

Indem wir $e^{-\frac{i\omega}{c}r}$ in eine Reihe entwickeln und die ersten Glieder berücksichtigen, erhalten wir wegen Kleinheit von r (s. Bild 2):

$$e^{-\frac{i\omega}{c}r}\left(\frac{i\omega}{c}r+1\right) = 1 - \left(\frac{i\omega}{c}r\right)^2\frac{1}{1\cdot 2} + \left(\frac{i\omega}{c}r\right)^3\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

Setzen wir diesen Ausdruck in unser Integral ein, so kommt

$$2\pi\left\{\int_{\Theta}\mathfrak{F}(x,y,z)\frac{R\,dR}{(\sqrt{R^2+D^2})^3}D - \left(\frac{i\omega}{c}\right)^2\frac{1}{2}\int_{\Theta}\mathfrak{F}(x,y,z)\frac{R\,dR}{\sqrt{R^2+D^2}}D + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{i\omega}{c}\right)^3\frac{1}{3}\int_{\Theta}\mathfrak{F}(x,y,z)\,R\,dR\cdot D + \dots\right\}.$$

Da $\mathfrak{F}(x,y,z)$ im Bereich unseres kleinen Flächenstückes als konstant und gleich dem Werte, welchen es im Punkte P annimmt, anzusehen ist, so erhalten wir endgültig

$$2\pi\,\mathfrak{F}(x,y,z)\left\{-\frac{D}{\sqrt{R^2+D^2}}\Bigg|_0^{R_0} + \left(\frac{i\omega}{c}\right)^2\frac{1}{2}\left|\sqrt{A^2+D^2}\right|_0^{R_0} D + \dots\right\}.$$

Wenn P′ an P heranrückt, so nähern sich der Null das erste, dritte und alle folgenden Glieder; das zweite Glied nimmt den Wert an:

$$2\pi\,\mathfrak{F}(x,y,z).$$

Führen wir dieses Glied auf die linke Seite unserer Gleichung (I′) herüber, so erhalten wir endgültig:

$$\mathfrak{F}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{S-\Theta} ds\,\mathfrak{F}(\xi,\eta,\zeta)\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c}r+1\right) \tag{I''}$$

$$\{\mathfrak{J}_1\cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1\cos(\mathfrak{J}_1\,\mathfrak{n})\}.$$

Dabei ist

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

und die Integration ist auf die ganze Leiteroberfläche, mit Ausschluß eines kleinen den Punkt P(x, y, z) umschließenden Flächenelementes zn erstrecken.

Je nachdem wir Gleichung (I′) oder (I″) verwenden, haben wir die Integration auf die ganze Leiteroberfläche oder resp. mit Ausnahme eines den Punkt umschließenden kleinen Kreises zu erstrecken. Bei Variierung der Lage des Punktes P bewegt sich im ersten Fall der entsprechende Aufpunkt auf einer der Leiteroberfläche S konzentrischen Fläche; im zweiten Fall liegt dieser Punkt stets auf der Leiteroberfläche selbst.

3. Die Lösung.

Bilden die Werte der Funktion $\mathfrak{F}$ und der Parameter α und ω_0 exakte Lösungen unserer Gleichungen (I′) oder (I″), so wird die linke Seite gleich der rechten. Nehmen diese Größen nur Näherungswerte an, so wird die linke von der rechten verschieden, und zwar derart, daß deren Differenz und das Quadrat dieser Differenz vom Näherungsgrade abhängen muß. Setzen wir voraus, daß ein bestimmtes Wertsystem $\mathfrak{F}$, α, ω_0 mit genügender Genauigkeit die wahren Werte dieser Größen bestimmt, so wird nicht nur die Differenz

$$\mathfrak{F}(x, y, z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S-\Theta} ds\, \mathfrak{F}(\xi, \eta, \zeta)\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r} \left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)$$
$$\{ J_1 \cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J_1 \mathfrak{n}) \}$$

für einen beliebigen Punkt x, y, z genügend klein werden, sondern auch das Integral dieses Ausdrucks auf die Leiteroberfläche verbreitet

$$\int ds \left\{ \mathfrak{F}(x, y, z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S-\Theta} ds\, \mathfrak{F}(\xi, \eta, \zeta)\, \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r^2} \left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right) \{J_1 \cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J_1 \mathfrak{n})\} \right\}^2. \quad \text{(III)}$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum für die Parameter α, ω_0 und diejenigen, welche die Form der Funktion $\mathfrak{F}$ bestimmen. Setzen wir also die Abgeleiteten dieses Ausdrucks nach diesen Parametern gleich Null, so erhalten wir ein System von Gleichungen, aus welchen diese Parameter bestimmt werden können[1]).

4. Die Anwendung auf symmetrische Erreger.

Es ist im vorhergehenden stillschweigend der Ansatz gemacht worden, daß unser Erreger Schwingungen ganz bestimmter Art ausführt, d. h. es ist für die Grundschwingung die Lage der Bauchlinien und Knotenpunkte gegeben.

Für symmetrische Erreger kann man dann setzen, daß $\mathfrak{F}(x, y, z)$ Funktion nur von einer Koordinate beispielsweise ist und sich als Fourriersche Reihe entwickeln läßt. Wir haben somit:

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = F(z) = b_1 \cos\frac{\pi z}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi z}{2h} + b_3 \cos\frac{3\pi z}{2h} + \ldots,$$

wo h eine Konstante, die von den Dimensionen des Erregers abhängt und mit dem maximalen Wert den z annehmen kann, zusammenfällt. Setzen wir diesen Ausdruck von $\mathfrak{F}$ in (III) ein, so kommt:

$$\int ds \left\{ \left(b_1 \cos\frac{\pi z}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi z}{2h} + \ldots\right) - \frac{1}{2\pi}\int ds \left(b_1 \cos\frac{\pi \zeta}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi \zeta}{2h} + \ldots\right) \right.$$
$$\left. \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r^2} \left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right) \{ J_1 \cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J_1 \mathfrak{n}) \} \right\}^2.$$

[1]) Siehe M. Brillouin, Annales de Physique VI, 1916, p. 137.

Wenn wir jetzt die Abgeleiteten dieses Ausdrucks nach $b_2, \ldots b_n, \ldots \alpha, \omega_0$ gleich Null setzen, so erhalten wir folgendes System von $(n+1)$ Gleichungen, b_1 als von der Intensität der Erregung abhängig, bleibt dabei unbestimmt.

$$\int ds \left[\left(b_1 \cos\frac{\pi z}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi z}{2h} + \ldots\right) - \frac{1}{2\pi}\int ds \left(b_1 \cos\frac{\pi \zeta}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi\zeta}{2h} + \ldots\right) \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)\{J_1 \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J\mathfrak{n})\}\right].$$

$$\left[\cos\frac{2\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{2\pi\zeta}{2h}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)\{J_1 \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J\mathfrak{n})\}\right] = 0.$$

$$\int ds \left[b_1 \cos\frac{\pi z}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi z}{2h} + \ldots\right) \quad \frac{1}{2\pi}\int ds \left(b_1 \cos\frac{\pi \zeta}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi\zeta}{2h} + \ldots\right) \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)\{J_1 \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J\mathfrak{n})\}\right].$$

$$\left[\cos\frac{3\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{3\pi\zeta}{2h}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)\{J_1 \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J\mathfrak{n})\}\right] = 0.$$

. . . .

$$\int ds \left[b_1 \cos\frac{\pi z}{2h} + b_2 \cos\frac{1\pi z}{2h} + \ldots\right) - \frac{1}{2\pi}\int ds \left(b_1 \cos\frac{\pi \zeta}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi\zeta}{2h} + \ldots\right) \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)\{J_1 \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J\mathfrak{n})\}\right].$$

$$\left[-\frac{1}{2\pi}\int ds \left(b_1 \cos\frac{\pi \zeta}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi\zeta}{2h} + \ldots\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)\right\} \{J_1 \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J\mathfrak{n})\}\right] = 0.$$

$$\int ds \left[\left(b_1 \cos\frac{\pi z}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi z}{2h} + \ldots\right) - \frac{1}{2\pi}\int ds \left(b_1 \cos\frac{\pi \zeta}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi\zeta}{2h} + \ldots\right) \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)\{J_1 \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J\mathfrak{n})\}\right].$$

$$\left[-\frac{1}{2\pi}\int ds \left(b_1 \cos\frac{\pi \zeta}{2h} + b_2 \cos\frac{2\pi\zeta}{2h} + \ldots\right)\left\{\frac{\partial}{\partial\omega_0}\frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right)\right\} \{J_1 \cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(J_1\mathfrak{n})\}\right] = 0.$$

$(n-1)$ dieser Gleichungen, beispielsweise die ersten $(n-1)$, bilden ein Gleichungssystem von der Form

$$\begin{aligned}
&b_1 A_1' + b_2 A_2' + \ldots \qquad b_n A_n' = 0\\
&b_1 A_1^{('')} + b_2 A_2^{('')} + \ldots \qquad b_n A_n^{('')} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_1 A_1^{(n-1)} + b_2 A_2^{(n-1)} + \cdots b_n A_n^{(n-1)} = 0,
\end{aligned}$$

aus welchen sich die Unbekannten b_2, b_3. b_n durch die Koeffizienten A und b_1 bestimmen lassen. Setzen wir die so bestimmten Größen b_2, b_3, b_n in die 2 letzten Gleichungen ein, so erhalten wir zwei weitere Gleichungen zur Bestimmung der Schwingungskonstanten α und ω_0 und somit die vollständige Lösung unserer Aufgabe. Die Funktionen A erhalten dabei folgende Form:

$$A_1' = \int ds \left[\cos\frac{\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right]\left(\cos\frac{\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right)$$

$$A_2' = \int ds \left[\cos\frac{2\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{2\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right]\left(\cos\frac{\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right)$$

. . . .

$$A_n' = \int ds \left[\cos\frac{n\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{n\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right]\left(\cos\frac{\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right)$$

. . . .

$$A_1^{(n)} = \int ds \left[\cos\frac{\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right]\left(\cos\frac{n\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{n\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right)$$

$$A_2^{(n)} = \int ds \left[\cos\frac{2\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{2\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right]\left(\cos\frac{n\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{n\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right)$$

. . . .

$$A_n^{(n)} = \int ds \left[\cos\frac{n\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{n\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right]\left(\cos\frac{n\pi z}{2h} - \frac{1}{2\pi}\int ds \cos\frac{n\pi\zeta}{2h} B\cdot C\right),$$

wobei ist

$$B = \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r^2}\left(\frac{i\omega}{c} r + 1\right) \quad \text{und} \quad C = \mathfrak{J}_1 \cos(\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}) - \mathfrak{r}_1 \cos(\mathfrak{J}\,\mathfrak{n}).$$

Es wäre sehr wünschenswert, die Ergebnisse dieser Theorie an einigen Spezialfällen zu prüfen, in erster Linie an dem Rotationsellipsoid und dessen Grenzfällen, der Kugel und dem Stab; doch dürften auf diesem Wege erhebliche mathematische Schwierigkeiten entstehen. Ich hoffe, darauf nächstens zurückzukommen.

Physikalisches Laboratorium des Polytechn. Instituts von Leningrad (Petersburg).



Über den Zusammenhang von Strom und Spannung in festen Dielektrizis.

Von

H. Gabler.

Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.

Inhaltsverzeichnis.

I. Einleitung.

Während das umfangreiche experimentelle und theoretische Material über die Vorgänge bei der Entladung in Gasen es gestattet, sich ganz konkrete Vorstellungen über die physikalische Natur des Entladungsprozesses zu machen[1]), sind die Gesetzmäßigkeiten, die den Durchbruch in flüssigen und festen Körpern bestimmen, noch völlig unbekannt. Von den wenigen Arbeiten, in denen Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit fester, isolierender Körper angestellt wurden, seien besonders hervorgehoben die von H. H. Poole[2]), der die Abhängigkeit der Leitfähigkeiten von den Feldstärken bei verschiedenen Dielektrika, wie Glas, Glimmer, Paraffin, Zelluloid, ermittelte, sowie eine Arbeit von K. W. Wagner[3]), der die Abhängigkeit von Strom und Spannung für einige feste Körper bestimmte. Im Anschluß an seine experimentellen Beobachtungen hat Wagner eine Theorie aufgestellt, in welcher angenommen wird, daß die gesamte elektrische Energie, die dem Dielektrikum zugeführt wird, sich in Wärme umsetzt und diese das Material schließlich zerstört. Diese rein thermische Erklärung des elektrischen Durchbruches, die z. B. für die Begründung des momentanen Durchschlages bei Stoßspannungen Schwierigkeiten bereitet, ist neuerdings von Rogowski[4]) mit einer elektrischen Auffassung vereinigt worden. Rogowski sieht in der elektrischen Feldstärke eine wesentliche Ursache des Durchbruchsphänomens, zumal wenn es sich um Stoßspannungen handelt; denn es ist schwer verständlich, wie bei einer nur sehr kurzen elektrischen Beanspruchung, die Bruchteile einer Sekunde wirkt, die für die Zertrümmerung notwendige Wärme erzeugt werden könnte. Gegen Wagners Theorie sprechen auch

[1]) Siehe W. O. Schumann, Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen. Julius Springer, Berlin; daselbst umfassendes Literaturverzeichnis.

[2]) H. H. Poole, Phil. Mag. 32, 112 (1916) und 34, 195 (1918); ferner Phil. Mag. 42, 488 (1921).

[3]) K. W. Wagner, The Physical Nature of the Electrical Breakdown of Solid Dielectrics. (Journal of the Amer. Inst. of Electrical Engineers 1922.)

[4]) Rogowski, Der Durchschlag fester Isolatoren. (Arch. f. Elektrot., 13, 1924, 2. Heft.)

die experimentellen Untersuchungen von Rochow[1]) an Glas, der zwischen — 18° C und 90° C, einem Temperaturintervall, innerhalb dessen die Leitfähigkeit des Glases um das etwa 250000fache zunimmt, keine Änderung der Durchbruchfeldstärke feststellen konnte.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es, an einer Reihe von Dielektrizis den Verlauf der Stromspannungskurven bis unmittelbar zur kritischen Spannung, bei der die Zertrümmerung des Dielektrikums eintritt, zu bestimmen.

2. Die Meßmethode.

a) Erzeugung hoher Gleichspannungen bis 30000 Volt.

Alle Messungen wurden mit Gleichstrom ausgeführt. Die erforderliche Gleichspannung bis etwa 30000 Volt wurde folgendermaßen erhalten:

Die Spannung eines Wechselstromgenerators (500 Per), die durch Veränderung seines Magnetfeldes reguliert werden konnte, wurde auf Hochspannung transformiert und mittels einer Glühkathodenröhre (AEG.) gleichgerichtet. Der durch die Röhre fließende Strom beruht auf reiner Elektronenemission der Kathode. Die gleichrichtende Wirkung des Ventils kommt also dadurch zustande, daß Strom nur in der Richtung Kathode—Anode fließen kann und die Röhre in entgegengesetzter Richtung undurchlässig ist. Wird nun der Röhre ein Wechselstrom aufgeprägt, so kann nur der Strom einer Halbwelle durch den Gleichrichter fließen; während der zweiten Halbperiode fließt kein Strom. Der vom Gleichrichter gelieferte Strom besteht also bei Ohmscher Belastung aus einzelnen Stromstößen (Bild 1).

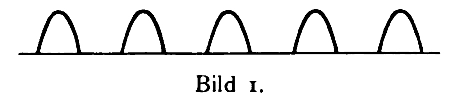


Bild 1.

Zur Abflachung dieser Stromstöße wurden dem Gleichrichter Drosselspulen in Serie geschaltet. Die vom Gleichrichter gelieferten Stromstöße werden von mehreren, untereinander parallel liegenden Kondensatoren aufgenommen[2]) und laden sie auf die konstante Spannung

$$U = \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

Ein Entladen kann wegen der Ventilwirkung der Röhre nicht erfolgen. Wird an die Kondensatoren der Belastungskreis angeschlossen (Dielektrikum), so tritt eine Spannungsschwankung an den Kondensatoren ein, die dadurch verursacht wird, daß während der Halbperiode, während der der Gleichrichter keinen Strom liefert, ein Teil der Kondensatorladung über den Belastungskreis abfließt. Die Spannungsschwankung wird um so kleiner sein, je kleiner der von den Kondensatoren abfließende Strom im Verhältnis zum Emissionsstrom des Gleichrichters ist. Der Sättigungsstrom des Gleichrichters betrug bei maximaler Heizung (6 Amp.) etwa 40 mA. Es zeigte sich, daß, je nach der Anordnung der Kondensatoren und Selbstinduktionsspulen, erhebliche Spannungsunterschiede am Dielektrikum auftraten.

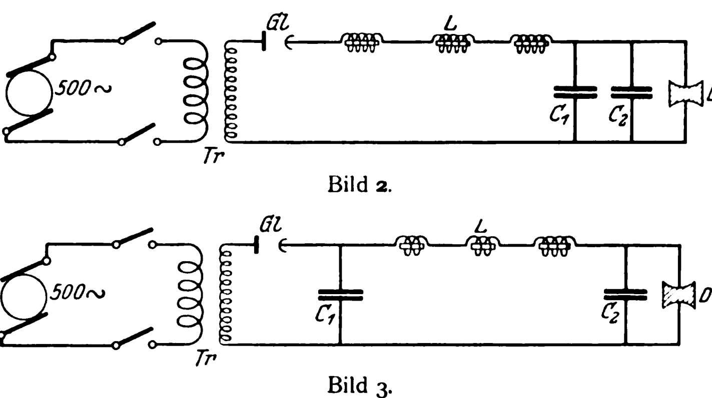


Bild 2.

Bild 3.

[1]) Rochow, Über einige Fragen der elektrischen Festigkeitslehre. Jenaer Dissert. 1924.

[2]) Als Kondensatoren dienten einige Minosflaschen, die das Glaswerk Schott & Gen. (Jena) freundlichst zur Verfügung stellte. Ihre Kapazität betrug durchschnittlich C = 4000 cm; sie wurden bis zu Spannungen von 25 kV eff geprüft und für Dauerbetrieb brauchbar befunden.

Werden, wie in Bild 2, die Selbstinduktionsspulen vor die Kondensatoren geschaltet, so wirken sie dem Anwachsen des Ladestromes entgegen und sind zwecklos. In diesem Falle wurde am Dielektrikum nur 19% der Spannung erhalten, die in der abgeänderten Anordnung (Bild 3) gemessen wurde.

Diese Schaltung hat sich gegenüber allen anderen möglichen am besten bewährt. Die Kondensatoren liegen hier symmetrisch in bezug auf die Selbstinduktionsspulen. Jede Spannungsschwankung an den Enden von C_1 verursacht eine Stromschwankung, die man sich nach Fourier zerlegt denken kann in eine sinusförmige Grundschwingung der Frequenz 500 und eine Reihe höherer Harmonischen. Der Grundschwingung wie auch den Oberwellen wirken die Selbstinduktionsspulen nach Maßgabe ihres Selbstinduktionskoeffizienten L als Scheinwiderstände entgegen. Die Berechnung der resultierenden Spannungsschwankung am zweiten Kondensator der Kapazität C_2 wird zeigen, wie die Größen C_1, C_2, L, R zu dimensionieren sind, damit die Spannungsschwankung auf jeden gewünschten Betrag, beispielsweise 1‰, herabgemindert wird.

Berechnung der Spannungsschwankung.

Der vom Kondensator C_1 abfließende Strom ist

$$i = -C_1 \cdot \frac{d U_1}{dt}. \tag{1}$$

Die Spannungsschwankung an diesem Kondensator sei durch die gestrichelte Kurve in Bild 4 veranschaulicht.

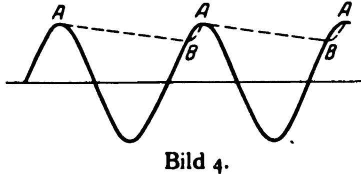


Bild 4.

Im Punkte A herrscht am Kondensator C_1 die volle Transformatorspannung. Die Spannung sinkt, während der Strom gemäß Gleichung (1) über den Belastungskreis abfließt, um von B an, wo der Gleichrichter anfängt, erneut Energie in den Kondensator zu pumpen, wieder auf den Betrag der Sekundärspannung (Punkt A) anzuwachsen. Gleichung (1) kann integriert werden, da der Strom praktisch nahezu konstant ist:

$$-\Delta U_1 = U_A - U_B = \frac{i \cdot t}{C_1}, \tag{2}$$

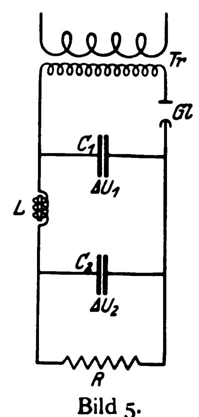


Bild 5.

worin für t die Zeit zu setzen ist, die durch den Abstand AB gekennzeichnet wird. Es soll für t die Dauer einer Periode angenommen werden; die Verhältnisse werden durch diese Wahl ungünstiger, als sie der Wirklichkeit entsprechen. Es ist

$$t = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

und

$$\Delta U_1 = \frac{2\pi i}{\omega C_1}. \tag{2a}$$

Die Amplitude der Spannungsschwankung am Kondensator C_1 wird sich zur Amplitude der Schwankung am Kondensator C_2 verhalten wie die Scheinwiderstände der angeschlossenen Kreise. Bezeichnet ΔU_2 die Schwankung der Spannung am zweiten Kondensator, so wird

$$\frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} = \frac{|\mathfrak{Z}_2|}{|\mathfrak{Z}_1|}. \tag{3}$$

Es ist, wenn L die Selbstinduktion aller Spulen (Bild 5), C_1 die Kapazität des ersten Kondensators, C_2 die des zweiten Kondensators und R ein dem Dielektrikum in Serie geschalteter Widerstand ist, der der Strombegrenzung (im Augenblick des Durchbruches) dient,



$$\frac{1}{\mathfrak{Z}_2} = \frac{1}{R} + j\omega C_2$$

absoluter Betrag:

$$\left|\frac{1}{\mathfrak{Z}_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2} \tag{4}$$

$$\mathfrak{Z}_1 = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C_2}.$$

Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners ergibt

$$\mathfrak{Z}_1 = j\omega L + \frac{\frac{1}{R} - j\omega C_2}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2}.$$

Trennung von reellen und imaginären Bestandteilen

$$\mathfrak{Z}_1 = j\omega L - \frac{j\omega C_2}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2} + \frac{1}{R\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2\right]}$$

$$\mathfrak{Z}_1 = j\left(\omega L - \frac{\omega C_2}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2}\right) + \frac{1}{R\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2\right]}$$

absoluter Betrag

$$|\mathfrak{Z}_1| = \sqrt{\left[\omega L - \frac{\omega C_2}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2}\right]^2 + \left[\frac{1}{R\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2\right]}\right]^2}. \tag{5}$$

Aus (3) folgt
$$\Delta U_2 = \Delta U_1 \cdot \frac{|\mathfrak{Z}_2|}{|\mathfrak{Z}_1|} = \frac{2\pi i}{\omega C_1} \cdot \frac{|\mathfrak{Z}_2|}{|\mathfrak{Z}_1|}.$$

Setzt man für $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{Z}_1$ die in 4) bzw. (5) gefundenen Werte ein, so ergibt sich für ΔU_2

$$\Delta U_2 = \frac{2\pi i}{\omega C_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2} \cdot \sqrt{\left[\omega L - \frac{\omega C_2}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2}\right]^2 + \left[\frac{1}{R\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C_2)^2\right]}\right]^2}}. \tag{6}$$

Für $R = \infty$ vereinfacht sich die Formel wesentlich, und man erhält einen Spezialfall, den Hull[1]) angegeben hat:

$$\Delta U_2 = \frac{2\pi i}{\omega C_1 (\omega^2 L C_2 - 1)}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Spannungsschwankung um so geringer wird, je höher die Kreisfrequenz ω, die Kapazität C der Kondensatoren und die Selbstinduktion L der Spulen ist.

Legt man für die Berechnung von ΔU_2 folgende Werte der Versuchsanordnung zugrunde (6)

$$J = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{Amp}, \qquad R = 5 \cdot 10^5\,\Omega$$
$$L = 100\,\text{H}, \qquad C_1 = C_2 = 1{,}65 \cdot 10^{-8}\,\text{F}$$
$$\omega = 1000\,\pi, \qquad U_{max} = 20\,\text{kV},$$

so wird $\Delta U_2 = 23$ Volt.

Die Spannungsschwankung ist nur wenig größer als 1‰.

Die experimentelle Bestätigung dieses Resultates wurde folgendermaßen erbracht: Mit einem Schleifenoszillographen (Schleife aperiodisch gedämpft bei 500 Per) ließen sich keine Schwankungen nachweisen, hingegen waren sie deutlich zu

[1]) A. W. Hull, General Electrical Review, 1919. The Production of Constant High Potential With Moderate Power Capacity.

beobachten, wenn die Kapazität verringert wurde oder die Selbstinduktionsspulen kurzgeschlossen wurden.

b) Die Spannungsmessung.

Die Spannung am Dielektrikum wurde, soweit sie kleiner als 20 kV war, mit geeichten elektrostatischen Voltmetern (Hartmann & Braun) gemessen. Höhere Spannungen wurden mit einer Präzisionsfunkenstrecke ermittelt. Zur Beseitigung der Verzögerung erfolgte eine Bestrahlung der Funkenstrecke mit Quecksilber-Uviol-Licht. Eine mechanische Verschiebung der Plattenelektroden bei hohen elektrischen Feldstärken trat nicht ein[1]).

c) Die Strommessung.

Die Strommessung erfolgte durch elektrostatische Spannungsmessung an einem hohen, bekannten Widerstand, der in Serie zum Dielektrikum lag und, wenn die Strommessung erfolgt war, kurzgeschlossen wurde. Zur elektrostatischen Spannungsmessung wurde ein Binantenelektrometer (Bartels, Göttingen) verwandt. Der Meßbereich erstreckte sich über fünf Zehnerpotenzen (Größenordnung 10^{-3} V — 10^2 V); durch geeignete Wahl der Nadelspannung konnte der benötigte Meßbereich erhalten werden. Schon die nicht kommutierten Ausschläge sind, wie es die Theorie des Binantenelektrometers[2]) fordert, der angelegten Spannung proportional. Die mittlere Abweichung von der Proportionalität unter Zugrundelegung eines gemessenen Anfangswertes war kleiner als $^1/_5$%, so daß es nach Erneuerung der Aufhängefäden genügte, etwa drei Spannungswerte für die Neueichung vorzugeben. Für größere Ausschläge wurde der Skalenausschlag e auf den Bogen des halben Winkels reduziert: Das erste Glied der Reihe

$$\varphi = 28{,}648\,p\left(1 - \frac{1}{3}p^2 + \frac{1}{5}p^4 \cdots\cdots\right)$$

$\left(p = \frac{e}{A},\ e = \text{Skalenteile in mm},\ A = \text{Abstand des Spiegels in Skalenteilen}\right)$

reichte zur Korrektur, wenn der Ausschlagwinkel 5^0 nicht überschritt.

Als Widerstände wurden teils Flüssigkeitswiderstände, teils Präzisionswiderstände aus Manganindraht benutzt. Als geeigneter Flüssigkeitswiderstand, der vor allem das Ohmsche Gesetz befolgt, ein nicht zu hohes spezifisches Leitvermögen besitzt und einen kleinen Temperaturkoeffizienten hat, diente eine von Nernst[3]) angegebene Lösung:

1 Mol H_3BO_3 Borsäure
1 Mol $C_6H_8(OH)_6$ Mannit
0,06 g KCl
} gelöst in 1 Liter dest. Wasser.

Der geringe Zusatz von Chlorkalium bewirkt, daß der bisher sehr kleine Temperaturkoeffizient α vollständig verschwindet. α wurde ermittelt, indem in einer Brückenanordnung (mit Wechselstrom und Telephon) die zu zwei Temperaturen t_1 und t_2 gehörigen Leitvermögen k_1 bzw. k_2 bestimmt wurden. Der Temperaturkoeffizient ergab sich zu

$$\alpha = \frac{K_2 - K_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}03}{28{,}5} = \frac{30{,}0}{28{,}5} \cdot 10^{-3} \approx 1\,‰.$$

Als Widerstandsgefäße dienten dünne Glaskapillaren bis zu 0,1 mm Durchmesser. Die Eichung der Flüssigkeitswiderstände erfolgte mit einem Drehspulengalvanometer (S. & H.), einer Empfindlichkeit von etwa 10^{-10} Amp. pro mm Skalenteil bei 2 m Skalenabstand und einem Weston-Normalelement aus einer Strom- und

[1]) Die wirkende Kraft betrug 22 g; durch sie wurde die Stabilität der Funkenstrecke, wie eine Belastungsprobe zeigte, nicht beeinträchtigt.

[2]) F. Dolezalek, Ann. d. Phys. 26, 312 (1908).

[3]) Nernst, Zeitschr. f phys. Chemie 14, 631 (1894).

Spannungsmessung. Auf diese Weise konnten leicht Flüssigkeitswiderstände bis zur Größenordnung $10^{10}\,\Omega$ hergestellt werden. Die Genauigkeit der Eichung konnte durch Wahl höherer Spannungen auf etwa $^1/_2\,\%$ erhöht werden.

d) Methodische Schwierigkeiten.

Die Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung wird durch Bild 6 veranschaulicht:

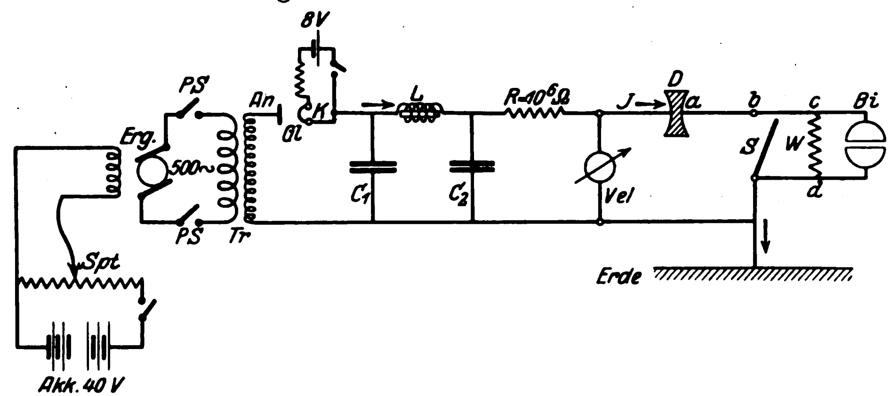


Bild 6.

Es bedeutet:

Spt = Spannungsteiler,
Erg = Erregerwicklung der Maschine,
P. S. = Schalter zum Anlegen der Primärspannung an den Transformator (Tr),
Gl = Glühkathodengleichrichter,
An = Anode, K = Kathode,
$C_1\,C_2$ = Kondensatoren,
L = Selbstinduktionsspulen mit Eisenkern,
R = Ohmscher Widerstand,
V_{el} = Elektrostatisches Voltmeter zur Spannungsmessung,
D = Dielektrikum,
Bi = Binantenelektrometer,
W = Widerstand am Binantenelektrometer,
S = Schalter zum Kurzschließen von W.

Die Glühkathode des Gleichrichters wird der Ausgangspunkt des Gleichstromes I_g, der den Vorschaltwiderstand R durchströmt und durch das zu untersuchende Dielektrikum D zur Erde abfließt.

Die Spannungsmessung bot keine Schwierigkeiten: durch einen geeigneten Spannungsteiler konnte eine genügend langsame Steigerung der Magneterregung des Generators, damit seiner erzeugten Spannung und der transformierten und gleichgerichteten Meßspannung erzielt werden. Die methodischen Schwierigkeiten, die sich im Verlauf der Arbeit einstellten und zu beseitigen waren, wurden naturgemäß durch die Strommessung verursacht. Der Strom, der durch das Dielektrikum fließt, muß in seiner vollen Größe den Widerstand W passieren, wenn der richtige Wert gemessen werden soll. Deshalb war es von größter Bedeutung, den Teil der Versuchsanordnung zwischen Dielektrikum und der geerdeten Schachtel des Binantenelektrometers (in Bild 6 durch die Strecke a—b—c—d gekennzeichnet) einwandfrei zu isolieren. Es sollen jetzt die einzelnen Fehlerquellen, die dabei auftraten, näher diskutiert werden.

Fehlerquellen und deren Beseitigung.

Drei Bedingungen muß eine einwandfreie Versuchsanordnung genügen:

1. Das elektrische Feld muß berechenbar sein;
2. Verunreinigungen zwischen Elektrodenmaterial und Dielektrikum, die die Durchbruchfeldstärke herabsetzen, sind zu vermeiden;
3. Gleitfunken über die Oberfläche dürfen nicht auftreten.

Die untersuchten Dielektrika wurden in Gestalt einer Bikonkavlinse untersucht, da die Feldverteilung zwischen Kugelelektroden bekannt und in der Mitte nahezu homogen ist. Verunreinigungen und Luftbläschen zwischen Elektroden und Dielektrikum wurden folgendermaßen vermieden:

Die Linse L wurde zwischen zwei gut aufgepaßte Hartgummibacken H gebracht (Bild 7), die durch zwei Schrauben (die im Bild fortgelassen sind) fest verschraubt werden konnten. Die Hartgummizylinder tragen eine Bohrung, in die ein Glasrohr G eingeführt und fest verkittet werden konnte. Am Ende ist die Bohrung

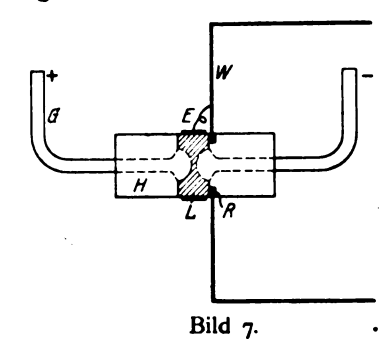
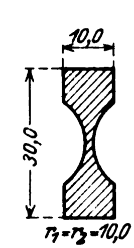


Bild 7.



Ausmessungen der Linse.

erweitert und schließt sich genau der Aushöhlung der Linse an. Die Aushöhlung der Linse ist nicht bis zum Rande vorgenommen, um das Dielektrikum gut einspannen zu können. Als Elektrodenmaterial diente im allgemeinen chemisch reines Quecksilber. Die Einspannvorrichtung wurde, nachdem das Dielektrikum mit Benzin und Alkohol von anhaftenden Unsauberkeiten befreit und eingespannt worden war, unter dem Rezipienten einer Luftpumpe evakuiert (auf etwa 1 mm Hg Druck) und durch ein seitlich angebrachtes Rohr Quecksilber vom äußeren Luftdruck in die beiden Glasröhren gedrückt. Auf diese Weise konnte ein sauberes Anliegen der Elektroden am Dielektrikum ohne störende Zwischenschichten von Luft oder Verunreinigungen erhalten werden. Eine Gleitfunkenbildung über die Oberfläche des Dielektrikums trat nicht ein, da durch geeignete Wahl der Schichtdicke eine Durchbruchfeldstärke erhalten werden konnte, für die die Durchbruchspannung kleiner war als die für die Gleitfunkenbildung erforderliche.

Infolge der hohen Spannung am Dielektrikum bildete sich ein starkes elektrostatisches Feld aus. Ein Teil der Kraftlinien verlief durch Luft und endigte an geerdeten Teilen der Anordnung. Die störenden Einflüsse dieses Feldes (Influenzladungen auf den Zuleitungen zum Binantenelektrometer) machten ein Messen mit dem Elektrometer unmöglich. Eine vollständige Abschirmung der Kraftlinien konnte nur erzielt werden, indem die gesamte Apparatur, die zur Strommessung gehörte, d. h. Binantenelektrometer und Widerstände, in einem geerdeten, allseitig geschlossenen Metallkasten untergebracht wurde. Die Einspannvorrichtung mit dem Dielektrikum wurde durch die Wand des Kastens, die mit einem auf den rechten Hartgummizylinder aufgedrehten Messingring R fest verlötet war, festgehalten (Bild 7). Die eine geerdete Hälfte der Einspannvorrichtung befindet sich also, wie Bild 8 zeigt, innerhalb, die andere, unter Spannung stehende, außerhalb des Metallkastens.



Diese Art der Aufhängung an der geerdeten Seite der Einspannvorrichtung verursachte keine Stromverluste. Ströme, die nicht durch, sondern über die Oberfläche des Dielektrikums flossen, wurden durch den Erdungsring E (Bild 7) abgeleitet und konnten nicht das Meßresultat fälschen. Die vorteilhafte Aufhängung der Einspannvorrichtung kam auch den anderen Teilen des Meßkreises zugute. Die Zuleitung zur „positiven" Schachtel des Binantenelektrometers bedurfte keiner weiteren Aufhängung oder Befestigung, was immer einen Stromverlust zur Folge

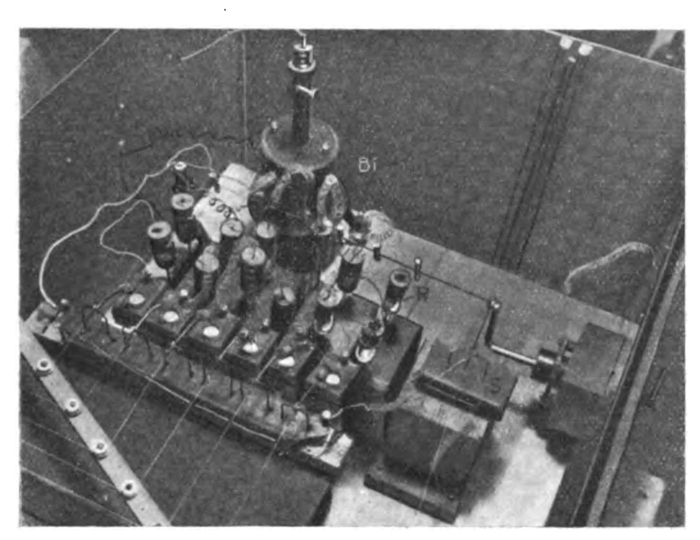


Bild 8. Die Anordnung zur Strommessung.
Bi = Binantenektrometer,
R = Flüssigkeitswiderstand,
S = Schalter zum Kurzschließen der Binanten.

gehabt hätte, sondern konnte bequem in das Quecksilber getaucht und von dem dickwandigen Glasrohr der Einspannung getragen werden. Der Schalter S (Bild 9), der den Widerstand nach der Strommessung kurzzuschließen hatte, wurde als Hebel ausgebildet, der ebenfalls in das Quecksilber eintauchte und mittels eines Fadens durch die Kastenwand über einige bewegliche Rollen geführt, von außen betätigt werden konnte. Eine Zahl untereinander parallel liegender Widerstände, die nach

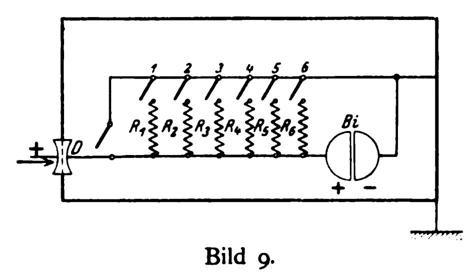


Bild 9.

Zehnerpotenzen ($10^7 - 10\,\Omega$) abgestuft wurden, konnten auf dieselbe Weise von außen nach Bedarf einzeln eingeschaltet werden (Bild 9). Sämtliche Schalter wurden von der geerdeten Seite der Anordnung aus betätigt.

Eine weitere wichtige Fehlerquelle entstand durch Kriechströme über die Oberfläche der Glaskapillaren der Flüssigkeitswiderstände. Es war von größter Wichtigkeit, ein möglichst wenig hygroskopisches Glas zu wählen[1]) und die zuvor mit

[1]) Cohnstaedt, Über die Wasserhaut auf Glas usw. Ann. d. Phys. 38, 223 (1912).

absolutem Alkohol behandelte Oberfläche sorgfältig mit Schellack zu überziehen. Nur dann konnte erreicht werden, daß die Oberflächenkriechströme um fünf bis sechs Zehnerpotenzen kleiner wurden als der durch die Kapillare fließende Hauptstrom. Der Isolationswiderstand der verwandten Manganinrheostaten war größer als $10^{14}\,\Omega$, wie eine Isolationsmessung zeigte; der am Binantenelektrometer liegende Klemmwiderstand derselben höchstens $10^{7}\,\Omega$. Auch in diesem Fall waren die Oberflächenkriechströme um wenigstens sieben Zehnerpotenzen kleiner als der gemessene Strom. Die an diesen Meßwiderständen liegenden Spannungen waren nie größer als $^{1}/_{10}$ Volt.

Für Messungen, bei denen es darauf ankam, die größte Empfindlichkeit des Binantenelektrometers, also eine Spannungsempfindlichkeit von mehreren Millivolt pro mm Skalenteil auszunutzen, wurden die Flüssigkeitswiderstände unbrauchbar, weil sie beträchtliche Polarisationsspannungen zeigten. Durch Veränderung des Elektrodenmaterials konnte die Polarisation zwar verringert, aber nicht beseitigt werden. Auch Elektroden aus Edelmetallen zeigten Polarisationsspannungen, vor allem mit Platinmohr überzogene Platinelektroden, bei denen Polarisationsspannungen bis 0,1 V (etwa 100 Skalenteile!) festzustellen waren[1]). Eine von Campbell[2]) angegebene Mischung von Xylol mit Alkohol als Flüssigkeitswiderstand wurde vermieden, weil sie eine nur geringe Variation des Widerstandes zuließ, einen beträchtlichen Temperaturkoeffizienten zeigte (etwa 1,5% pro Grad C) und strenge Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes, die die angewandte Methode der Strommessung erforderte, nicht vorhanden war.

Gang der Messung.

Die Messung ging so vor sich, daß zuerst die Spannung am Dielektrikum (bei kurzgeschlossenem Widerstand am Binantenelektrometer) gemessen und dann der zugehörige Stromwert ermittelt wurde. Die Spannungssteigerung wurde sehr langsam und stoßfrei vorgenommen (etwa 100 V sekundär pro sec); das Eintreten des stationären Stromes wurde nach einigen Sekunden beobachtet. Trat der Durchbruch während der Strommessung ein, so war ein Zerreißen der Elektrometerfäden wegen der starken Drehbeanspruchung fast unvermeidlich. Der hohe Präzisionswiderstand am Binantenelektrometer wurde geschützt durch Einschalten eines Vorschaltwiderstandes (Flüssigkeitssäule) in den Hauptkreis; er wurde so dimensioniert, daß im Augenblick des Kurzschlusses einer Widerstandsstufe des Präzisionswiderstandes ein Leistungsverbrauch von höchstens ein Watt zukam.

Die Nadelspannung des Binantenelektrometers über obere und untere Zuleitung war entgegengesetzt gleich und wurde von einer Batterie geliefert, deren Mitte geerdet wurde. Es wurden je nach der benötigten Empfindlichkeit Spannungen von $+40\,V - 0 - -40\,V$ bis $+140\,V - 0 - -140\,V$ angelegt. Die Batterien mußten ebenfalls auf geerdeten Blechen aufgestellt werden, um Kriechströme über die Oberfläche der Glasgefäße der Akkumulatoren abzuleiten. Für die Registrierung des Elektrometerausschlages war eine objektive Ablesung einer Fernrohrablesung vorzuziehen, weil, zumal unmittelbar vor einem Durchbruch, eine gleichzeitige Beobachtung von Strom- und Spannungswert aus sicherheitstechnischen Gründen erwünscht war.

Für den Antriebsmotor des Generators kam die Spannung des städtischen Netzes nicht in Frage, da sie Schwankungen bis 4% zeigte und die Genauigkeit

[1]) Daß es sich zweifellos um Polarisationsspannungen handelte, bewies die Tatsache, daß das Elektrometer den genau gleichgroßen Ausschlag in entgegengesetzter Richtung zeigte, falls die Zuleitungen zu den Flüssigkeitswiderständen vertauscht wurden.

[2]) Campbell, Note on the Electrical Resistance of Xylol-Alcohol Mixtures. Phil. Mag. 23, 668 (1912).



der Spannungsmessung, die bei 15 kV etwa $^1/_2$% betrug, wesentlich beeinträchtigt worden wäre. Als konstante Spannungsquelle diente eine Akkumulatorenbatterie von 220 V. Die Genauigkeit der Strommessung betrug bei höchster Elektrometerempfindlichkeit (etwa 8 Skalenteile pro 10^{-3} V bei 1,20 m Skalenabstand) für Ströme der Größenordnung 10^{-10} A, $^3/_4$%. Wurden nicht metallische, sondern Flüssigkeitswiderstände verwandt, so sank, infolge der nicht ganz fehlerlosen Bestimmung ihres Widerstandswertes, die Genauigkeit der Strommessung auf etwa 1,5%.

3. Die Meßreihen.

Vorbemerkung.

Um einwandfreie Resultate zu erhalten, wurde im allgemeinen eine Schichtdicke von 0,15 mm als untere Grenze gesetzt. Dünnere Schichten erwiesen sich als unbrauchbar, da infolge gröberer Inhomogenitäten feine Risse und Sprünge unvermeidlich waren. Auf größte Sauberkeit bei der Behandlung der Dielektrizis zu achten, war Vorbedingung. Wurde die Füllung der Einspannvorrichtung nicht unter dem Rezipienten vorgenommen, sondern von Hand ausgeführt, so trat eine Herabsetzung der Durchbruchfeldstärke bis zu 75% ein infolge der nicht zu vermeidenden Luftschichten zwischen Quecksilber und Dielektrikum; die Stromwerte waren dauernden Schwankungen unterworfen und nicht genau bestimmbar.

a) Messungen an Bakelit[1]).

Untersuchungen wurden nur vorgenommen mit bestem, aus mehrfacher Destillation gewonnenem Bakelit. Wasserhaltiges Bakelit wies Streuungen der Durchbruchfeldstärke über 100% auf und machte exakte Strommessungen unmöglich. Die Ergebnisse sind auf Bild 10 veranschaulicht. Kurve 2 wurde erhalten, indem plötzlich die Spannung abgeschaltet und die Messung wieder begonnen wurde. Kurve 3 wurde analog aus 2 erhalten. Von etwa 5000 V an setzte ohne weitere Spannungssteigerung eine selbständige Strömung ein, die, wie aus Zeitbeobachtungen ersichtlich war, exponentiell anstieg und nach einigen Sekunden die Zertrümmerung

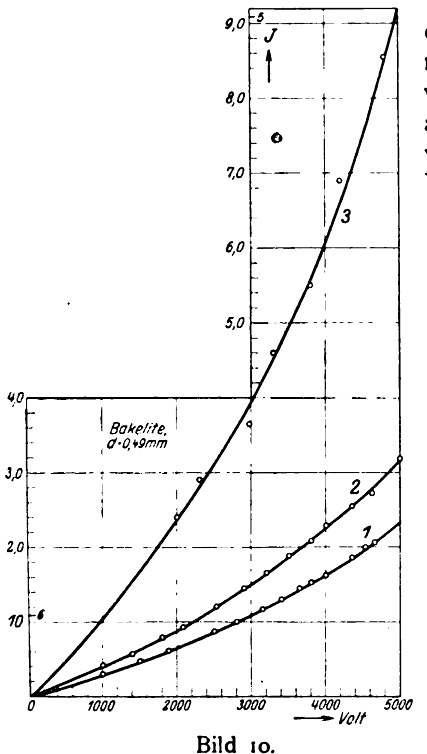


Bild 10.

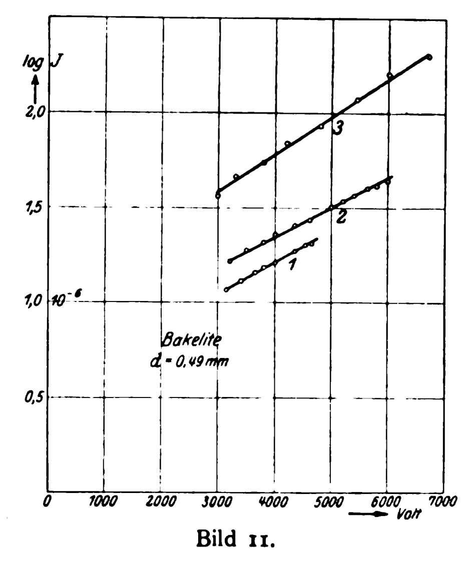


Bild 11.

[1]) L. H. Baekeland, Bakelite, ein neues synthetisches Harz, Journal of Industrial and Engineering Chemistry, March 1909 und Chemikerzeitung, 1909, 35.



der Probe verursachte. Ein genaues Verfolgen des Stromes war wegen der Schnelligkeit des Stromanstieges nicht möglich. Bei einer Schichtdicke von etwa 0,50 mm zeigten alle Messungen genau geradlinigen Verlauf der Stromspannungskurven, also Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes, bis zu Spannungen von etwa 1600 Volt. Bei höheren Spannungen gehen die Kurven allmählich in e-Funktionen über, wie die logarithmische Darstellung (Bild 11) zeigt. Die Tatsache, daß gemessene Stromwerte nicht wieder zu reproduzieren sind, beweist, daß das Material unter dem Einfluß der elektrischen Spannung einer dauernden Änderung unterworfen ist. Durch eine Anzahl weiterer Messungen wurde bestätigt, daß eine maximale Spannung besteht, die das Material in einen Labilitätszustand versetzt und eine selbständige, stetig anwachsende Strömung hervorruft, die schließlich den Durchbruch bewirkt. Eine Probe, die etwa 40 Minuten der Spannung ausgesetzt wurde, war von zahlreichen Sprüngen durchsetzt und zeigte Aussprengungen, die zweifellos auf Erwärmung zurückzuführen sind. Es ist anzunehmen, daß ein geringer, nicht zu beseitigender Wassergehalt sekundär eine elektrolytische Leitfähigkeit bewirkt, die sich dem eigentlichen Durchbruchsmechanismus überlagert.

Da die Verhältnisse bei Bakelit außerordentlich unübersichtlich und kompliziert sind und keine Messungen unmittelbar vor dem Durchbruch möglich waren, wurden die Untersuchungen an diesem Material bald eingestellt.

b) Messungen an Idonit.

Idonit ist ein Stoff, der gewonnen wird, indem man Bakelit mit Papier verarbeitet. Im Gegensatz zu den an Bakelit gewonnenen Ergebnissen sind bei Idonit

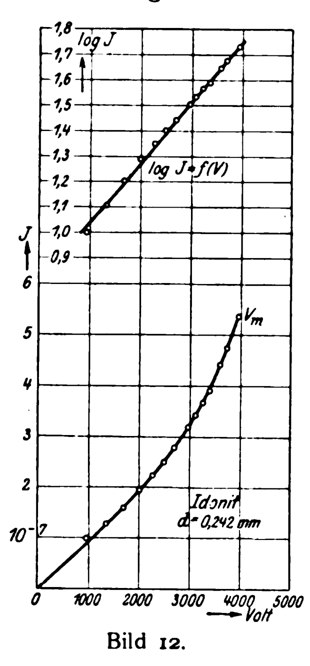


Bild 12.

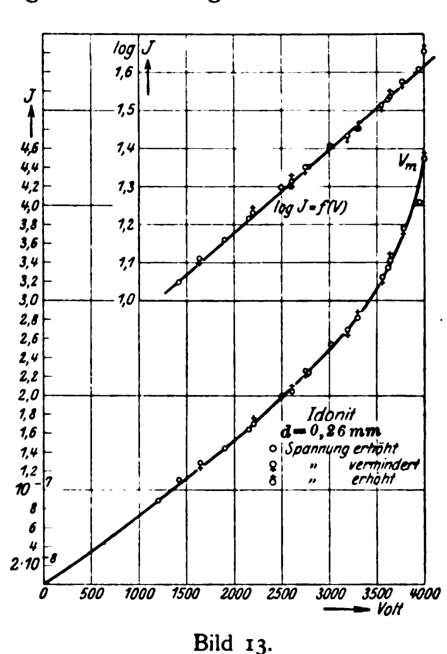


Bild 13.

die Meßwerte für den Strom, wie alle Beobachtungen zeigten, bis zum Durchbruch völlig konstant, so daß die Abhängigkeit von Strom und Spannung bis zu dieser Grenze beobachtet werden konnte. Der Verlauf einer Stromspannungskurve ist auf Bild 12 angegeben. Ändert man den Ordinatenmaßstab in der Weise, daß man an Stelle der Stromwerte die Logarithmen der Stromwerte aufträgt, so erhält man eine gerade Linie. Die Stromspannungskurve ist also als einfache e-Funktion darstellbar:

$$J = C_1 e^{C_2 \cdot V}.$$

Reproduzierbarkeit der Werte.

Die gemessenen Stromwerte sind gut reproduzierbar, d. h. der zu einem fest vorgegebenen Spannungswert gemessene Strom wird bei wiederholtem Durchlauf der Stromspannungskurve stets wieder erhalten. Bild 13 zeigt das Ergebnis an einer so behandelten Probe. Die ⊙-Punkte wurden zunächst gemessen. Da auf Grund mehrfach wiederholter Messungen an Material gleicher Dicke der Wert der Durchbruchspannung bekannt war, konnte diese Messung bis wenige % (etwa 1,25 %) unter die Durchbruchspannung geführt werden. Dann wurde die Spannung vermindert, und zwar sowohl äußerst langsam wie auch sprunghaft. Die bei der Abwärtsbewegung aufgenommenen Punkte sind durch ♀ gekennzeichnet. Erneute Spannungssteigerung bis zur Durchbruchspannung führte zu den durch ♂ markierten Werten. Die logarithmische Darstellung (Bild 13 oben) der Stromwerte in Abhängigkeit von der Spannung ergab wiederum die typische Gerade, der sich die beobachteten Punkte gut anpassen.

Abhängigkeit des Stromes von der Schichtdicke.

Bild 14 charakterisiert den Verlauf der Stromspannungskurven an zwei Proben, von denen die eine etwa doppelte Schichtdicke als die andere besaß. Vergleicht man an diesen Kurven, wie an Kurve auf Bild 13, die zwischen diesen beiden verläuft, die Ströme, die zu der gleichen Feldstärke gehören (Tabelle 1), so ergibt sich gute Übereinstimmung der Stromwerte bei höheren Feldstärken. Bei kleineren Feldstärken ist der Strom, der die dünnere Probe durchfließt, größer.

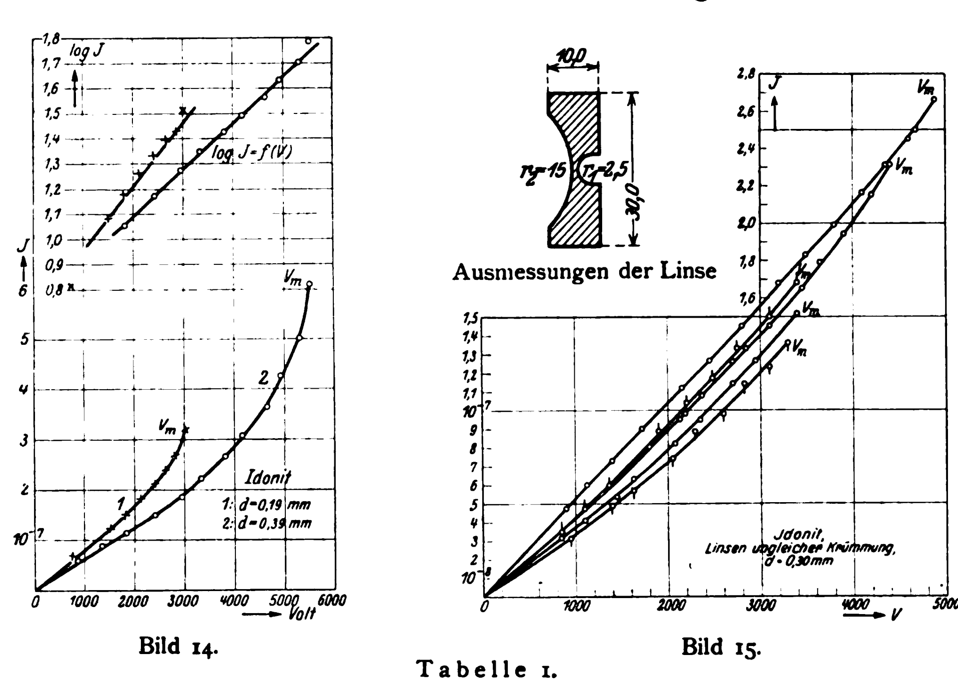


Bild 14. Bild 15.

Tabelle 1.

Ströme an Proben verschiedener Dicke, bezogen auf die gleiche Feldstärke, für Idonit.

Feldstärke	I_1 (1 = 0,39 mm)	I_2 (2 = 0,19 mm)	I_3 (3 = 0,26 mm)
130 kV/cm	$4{,}50 \cdot 10^{-7}$ Amp.	$4{,}44 \cdot 10^{-7}$ Amp.	$4{,}44 \cdot 10^{-7}$ Amp.
120 „	$3{,}80 \cdot 10^{-7}$ „	$4{,}00 \cdot 10^{-7}$ „	$3{,}96 \cdot 10^{-7}$ „
100 „	$2{,}80 \cdot 10^{-7}$ „	$3{,}20 \cdot 10^{-7}$ „	$3{,}09 \cdot 10^{-7}$ „
80 „	$2{,}02 \cdot 10^{-7}$ „	$2{,}50 \cdot 10^{-7}$ „	$2{,}36 \cdot 10^{-7}$ „
60 „	$1{,}45 \cdot 10^{-7}$ „	$1{,}80 \cdot 10^{-7}$ „	$1{,}73 \cdot 10^{-7}$ „



Abhängigkeit vom Elektrodenmaterial.

Wurden an Stelle von Quecksilberelektroden Silberelektroden verwandt, die

1. durch Kathodenzerstäubung,
2. durch chemische Ausscheidung aus einer Silbernitratlösung

gewonnen wurden, so ergab sich völlige Übereinstimmung im Verlauf der Stromspannungskurven. Anderes Metall durch Kathodenzerstäubung auf Idonit anzubringen, gelang nicht, da das Material infolge der Erwärmung dauernd Gas abgab, welches das erforderliche Vakuum zerstörte.

Polaritätserscheinungen.

Es war festzustellen, ob bei Verwendung von Linsen ungleicher Krümmung eine Abhängigkeit der Durchbruchfeldstärke von der Polarität der Elektroden zu erkennen war. Als Krümmungsradien wurden gewählt: $r_1 = 2{,}50$ mm, $r_2 = 15{,}0$ mm; die Schichtdicke aller Proben betrug 0,30 mm. Auf Bild 14 sind einige Meßreihen zusammengestellt. Es ergab sich, daß, wenn man die schwächere Krümmung positiv wählte, die Durchbruchspannung um wenigstens 30% kleiner war wie im anderen Falle; wurde die stärkere Krümmung der Probe als positive Elektrode gewählt, so zeigte das Material größere elektrische Festigkeit. Die Feldverzerrung infolge der Krümmung bewirkte, daß die Steigung der Stromspannungskurven gegenüber den Kurven bei homogenem Feld wesentlich geschwächt wurde. Die Reproduzierbarkeit der Messungen wurde auch an Linsen ungleicher Krümmung bestätigt.

Restladungen.

Bild 16 gibt den zeitlichen Abfall von Restladungen wieder. Die Beobachtung wurde nach Auslauf des Generators begonnen; nach einer Abklingungszeit von $t = 5$ Minuten war noch ein Strom der Größenordnung 10^{-13} Amp. nachzuweisen. Wurde an einer Probe die Spannung vermindert, so erfolgte die Bestimmung des betreffenden Meßpunktes erst nach Ablauf der Abklingungszeit.

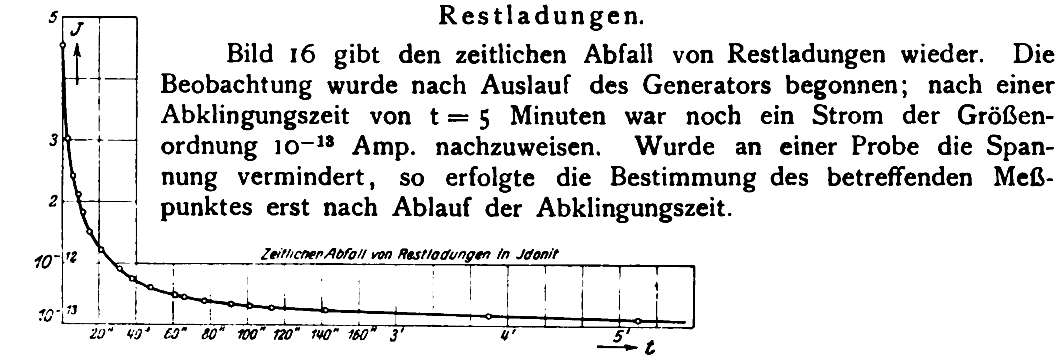


Bild 16.

c) Messungen an Hartgummi.

Hartgummi erwies sich als ein Stoff wesentlich schlechterer Leitfähigkeit: während sich bei Idonit der Durchbruchsmechanismus bei Strömen der Größenordnung 10^{-8} bis 10^{-7} Amp. vollzog, wurde bei Hartgummi unter gleichen Verhältnissen Ströme von 10^{-11} Amp., die unmittelbar vor dem Durchbruch die Größenordnung 10^{-9} Amp. erreichten, gemessen. Der Verlauf der Stromspannungskurven ist auf Bild 17 wiedergegeben. Der Anstieg der Kurven erfolgt erst bei relativ hohen Spannungen und wesentlich steiler als bei Idonit.

Bild 17

Bild 18.

Wählt man wieder logarithmischen Strommaßstab (Bild 18), so erhält man eine Exponentialfunktion, die sich bei nochmaligem Logarithmieren der Stromwerte in eine Gerade transformieren läßt. Die Stromspannungskurven befolgen demnach das Gesetz

$$J = e^{C_1 \cdot e^{C_2 \cdot V}},$$

dessen strenge Gültigkeit alle Messungen bestätigten. Die gemessenen Stromwerte waren bis zum Durchbruch völlig stabil[1]). Der Charakter der Durchschlagsfigur war ebenfalls grundverschieden von Idonit. Bei Idonit war der Durchschlag ein feiner Kanal, selten größer als etwa 1 μ, dem unbewaffnetem Auge unsichtbar. Bei Hartgummi zeigte sich stets ein Loch, etwa 0,5—1,0 mm stark, das auf eine explosionsartige Aussprengung hindeutete.

Abhängigkeit vom Elektrodenmaterial.

Versuche mit Silber- und Kupferelektroden ergaben genaue Übereinstimmung der Stromspannungskurven mit den Ergebnissen an Quecksilberelektroden. Bild 19 zeigt eine mit Silberelektroden aufgenommene Kurve; aus Bild 20 ist der Verlauf der logarithmischen Darstellungen zu ersehen: der Logarithmus des Stromes als Funktion der

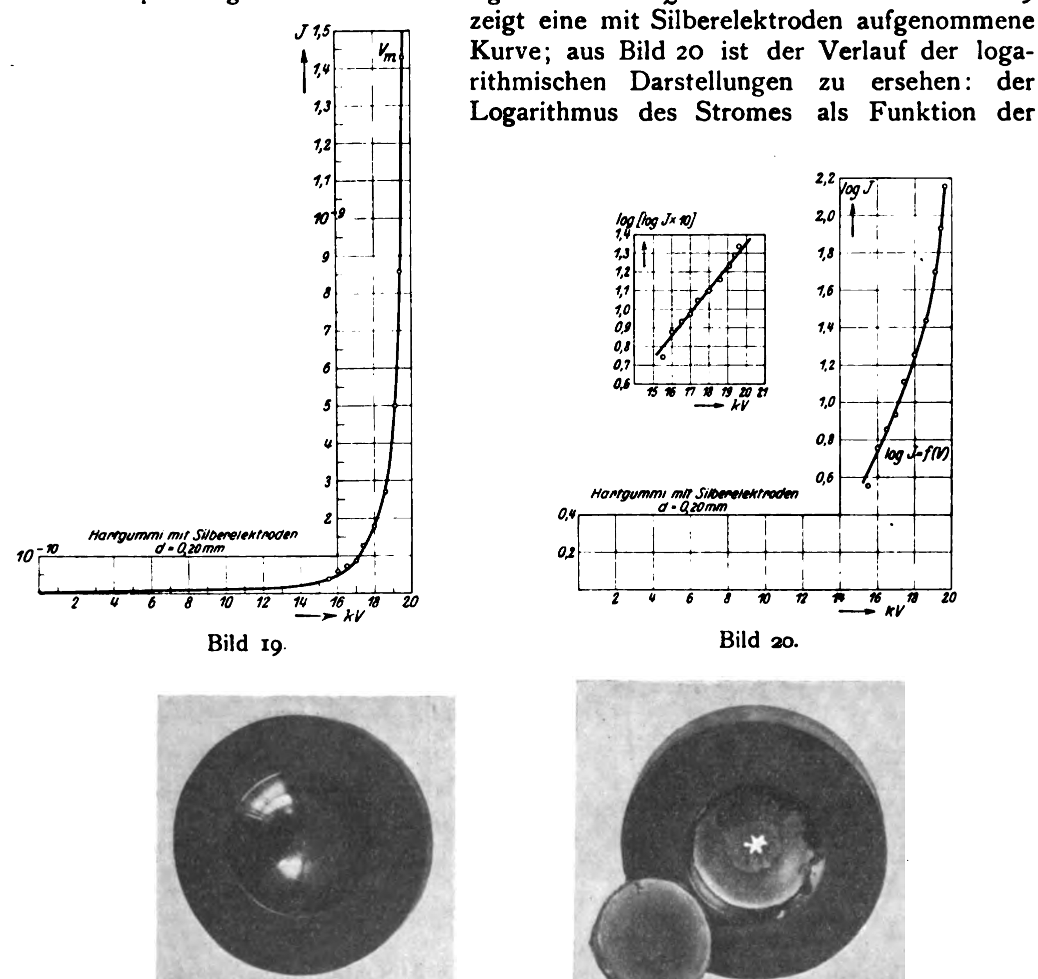


Bild 19.

Bild 20.

Bild 21.

Bild 22.

[1]) Der Durchbruch trat, wie bei Idonit, „plötzlich" ein; der bisher in Ruhe befindliche Lichtzeiger des Binantenelektrometers verschwand mit einem Ruck aus dem Gesichtsfeld. ($t < {}^1/_{10}$ sec.) Die Spannung am Dielektrikum sank momentan auf Null.

Spannung ergab wieder eine Exponentialfunktion und deren logarithmische Darstellung eine gerade Linie. Interessant sind die verschiedenartigen Durchschlagsfiguren, die infolge der ungleichen Wärmeableitung im Augenblick des Durchbruches entstanden. Bild 21 zeigt einen normalen Durchbruch, etwa 0,5 mm, bei Quecksilberelektroden: die entstehende Wärme fließt durch die massive Quecksilbersäule verhältnismäßig leicht ab. Das Wärmeleitvermögen der dünnen Silberschicht hingegen ist bedeutend geringer (Dicke der Silberschicht einige Tausendstel mm): die entstehende Wärme kann schlechter abfließen und trägt in höherem Maße zur Zerstörung des Materials bei (Bild 22: Loch von etwa 3 mm Durchmesser).

Ermüdungserscheinungen.

Wurde an einer Probe 60% der Durchschlagspannung überschritten, so war keine Reproduktion gleicher Stromwerte bei den entsprechenden Spannungswerten möglich. Auf Bild 23 wurde die normale Messung bis an die gestrichelte Gerade durchgeführt und dann die Spannung durch Schwächen des Generatorsfeldes plötzlich um 54% ihres Betrages verringert. Der dabei beobachtete Strom war 16mal so groß als der ursprünglich zu diesem Spannungswert gehörige. Der Durchbruch erfolgte etwa 8% unterhalb der Spannung, bei der er eingetreten wäre, falls die Stromspannungskurve ohne

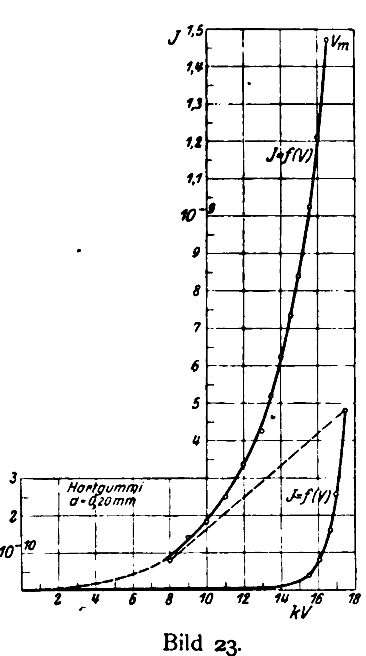


Bild 23.

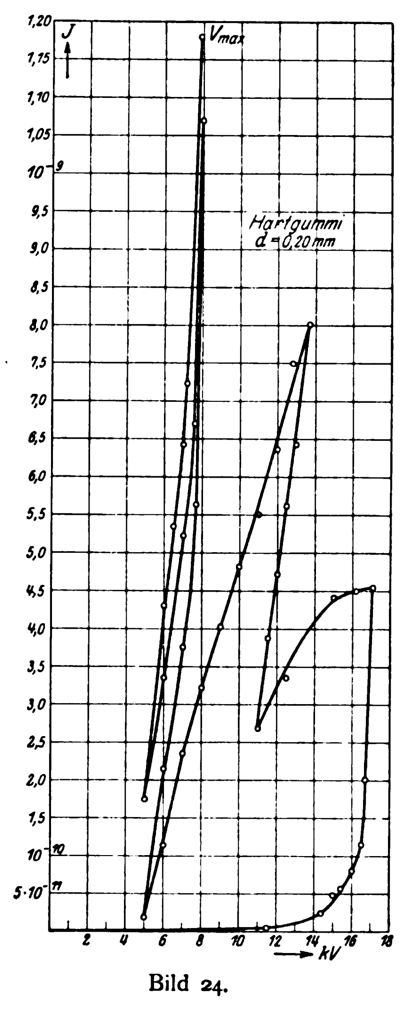


Bild 24.

jede Modifikation aufgenommen worden wäre. Alle Meßpunkte waren stabil und wurden (mit besonderem Augenmerk der Stromwert nach dem Spannungssprung) einige Minuten beobachtet.

Es war von großem Interesse, den Verlauf der Stromspannungskurven, die nicht durch sprungweise, sondern sehr langsame Verminderung der Spannung erhalten werden konnten, zu kennen. Außerdem konnte eine solche Messung darüber Auf-



schluß geben, ob infolge dieser Behandlung der Probe größere Herabsetzungen der Durchbruchspannung zu erreichen sind. Das Ergebnis zeigt Bild 24. Es gelang, durch fortgesetzte Spannungssteigerung und -schwächung die Durchbruchspannung um über 50% ihres normalen Betrages herabzumindern. Der für die Durchbruchspannung gemessene Strom war auf das etwa 400fache des ursprünglich bei dieser Spannung gemessenen Wertes angewachsen. Sämtliche Kurvenstücke, die bei Spannungssteigerung aufgenommen wurden, gehen in sukzessiver Approximation in den Funktionsverlauf $y = e^{C_1 \cdot e^{C_2 \cdot x}}$ über, wie die logarithmische Darstellung bestätigte: die gefundene Gesetzmäßigkeit bleibt also auch erhalten, wenn das Material starken Belastungsänderungen unterworfen wird.

Ströme an Proben verschiedener Schichtdicke, die der gleichen Feldstärke entsprachen, konnten bei Hartgummi nicht verglichen werden, da wegen der Veränderlichkeit des Materials bereits bei gleichen Schichtdicken große Unterschiede der Durchbruchfeldstärke und der gemessenen Ströme festgestellt wurden. Polaritätserscheinungen an Linsen ungleicher Krümmung ($r_1 = 0{,}25$ mm, $r_2 = 15{,}0$ mm) traten bei Hartgummi nicht auf.

Verlauf der Stromspannungskurven bei höheren Temperaturen.

Um Stromspannungskurven bei höheren Temperaturen aufnehmen zu können, wurde die Versuchsanordnung in der Weise abgeändert, daß die Einspannvorrichtung des Dielektrikums in eine Wanne gebracht wurde, deren eine Hälfte außerhalb, die andere innerhalb mit der Wand des zur elektrostatischen Abschirmung dienenden Metallkastens verlötet wurde. In die Wanne wurde Transformatorenöl gefüllt und mittels einer Heizspirale elektrisch geheizt. Temperaturunterschiede im Öl wurden mit einem Rührwerk ausgeglichen, die Temperatur des Öles wurde mit einem Quecksilberthermometer mit $^1/_5$ °-Teilung bestimmt. Für jede Temperatur konnte durch Vorschaltwiderstände der Heizstrom so reguliert werden, daß genau so viel Wärme zu- wie abgeführt wurde. Eine Meßreihe wurde erst begonnen, nachdem die gewünschte Temperatur 15 Minuten lang vorhanden war.

Versuchsergebnisse.

Die Temperaturerhöhung bewirkt eine Abnahme des Widerstandes der Probe. Die gemessenen Ströme wachsen dementsprechend, hingegen bleibt die Durch-

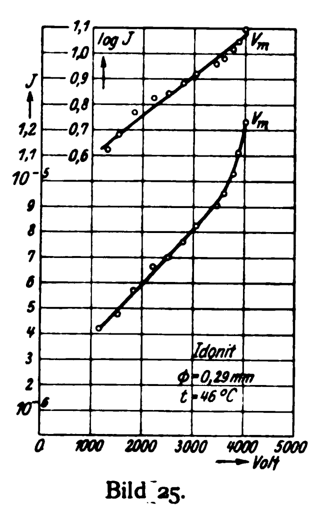


Bild 25.

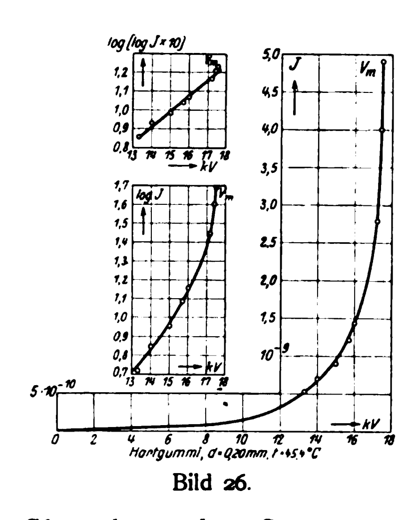


Bild 26.

bruchfeldstärke konstant und der Charakter der Stromspannungskurve erhalten. Bild 25 zeigt eine Messung an Idonit bei 46° C. Der Strom

ist gegenüber einer Probe gleicher Schichtdicke bei 20° C auf das 30—40fache angewachsen. Die Durchbruchfeldstärke ist dieselbe, die logarithmische Darstellung des Strommaßstabes führt wieder zu einer geraden Linie. Auf Bild 26 ist eine an Hartgummi bei 45,4° C aufgenommene Stromspannungskurve wiedergegeben. Die logarithmischen Darstellungen zeigen, daß auch hier der Verlauf der Stromspannungskurve erhalten bleibt. Ein Vergleich mit den bei 20° C an einer Probe gleicher Schichtdicke gemessenen Strömen ergibt etwa das 3,5fache. Die Abhängigkeit der Ströme von der Temperaturveränderung war nicht genau bestimmbar, weil die Abweichung der Stromwerte für einige Proben gleicher Schichtdicke und gleicher Temperatur schon erheblich war. Messungen bei höheren Temperaturen gelangen nicht. Bei etwa 60° C tritt eine chemische Umwandlung ein: die Stoffe quellen auf und werden bereits bei niederen Spannungen zerstört.

4. Diskussion der Versuchsergebnisse.

Wendet man die an den untersuchten Stoffen gewonnenen Ergebnisse auf die wärmetheoretische Betrachtungsweise K. W. Wagners an, so ergibt sich, daß der Verlauf der Stromspannungskurven nicht mit dem von seiner Theorie geforderten übereinstimmt. Unter der Annahme, daß die Widerstandsänderung das Gesetz

$$R = R_0 \cdot e^{-\alpha\Theta}$$

(Θ = Temperaturdifferenz zwischen der erwärmten Stelle und dem übrigen Teil des Isolators, R_0 = Widerstand bei der Anfangstemperatur ($\Theta = 0$), α = const)

befolgt, gelangt Wagner[1]) zu folgender Darstellung der Stromspannungscharakteristik:

$$f(V, I) = \frac{I}{V} - \frac{1}{R_0} \cdot e^{\frac{\alpha}{\beta} \cdot I \cdot V} = 0$$

(I = Strom, V = Spannung, β = Koeffizient der Wärmeleitfähigkeit)

oder

$$I = \frac{1}{R_0} \cdot V \cdot e^{\frac{\alpha}{\beta} \cdot V \cdot I} = C_1 \cdot V \cdot e^{C_2 \cdot V \cdot I}.$$

Nach einigen Umrechnungen erhält man

$$\log \frac{z}{V^2} = C_2 \cdot z + C, \tag{1}$$

wenn $z = V \cdot I$ und $C = \log C_1$ gesetzt ist. Faßt man hierin die Größen $\log \frac{z}{V^2}$ und z als Variabeln auf, so gibt das Gesetz (1) eine lineare Beziehung, die auf Grund der gewonnenen Ergebnisse nicht zu bestätigen ist. Weiterhin dürften nach Wagners Theorie Polaritätseffekte überhaupt nicht auftreten, denn die erzeugte Wärmemenge $I^2 \cdot R$ ist unabhängig vom Vorzeichen, d. h. von der Richtung, in der das Dielektrikum vom Strom durchflossen wird. Das Vorhandensein von Polaritätseffekten spricht ebenfalls gegen die Wärmetheorie des Durchbruchs. „Risse" oder „Fäden" im Material, oder sonstige Kennzeichen einer thermischen Beanspruchung waren außer an Bakelit an keinem der untersuchten Stoffen vor dem Durchbruch nachzuweisen. Die an Hartgummi festgestellten Ermüdungserscheinungen sind sicherlich nicht thermischer Natur, denn nie konnte erreicht werden, daß sich der Anfangszustand wieder einstellte: das Material hat sich vollständig verändert.

Die Prüfung der von Rogowski[2]) auf Grund anderer Betrachtungen über die Wärmeausbreitung gewonnenen Parameterdarstellung der Stromspannungscharakteristik, die unter der Annahme gewonnen ist, daß Elektroden und Isolatoroberfläche

[1]) K. W. Wagner, Journ. of the Amer. Inst. of Elect. Engineers, 1922, 41, S. 1034.
[2]) Rogowski, Arch. f. Elektrot. 1924, 13, 2. Heft, S. 164.

stark gekühlt werden[1]), genügt ebenfalls nicht dem experimentell ermittelten Verlauf, denn führt man einige gemessene Wertepaare I und P ein, so erhält man verschiedene Konstante. Diese Gleichung gilt bei reiner Wärmeauffassung des Durchschlags und gleichmäßiger elektrischer Durchströmung des Isolators. Sie ist von Rogowski selbst bei seiner wärmeelektrischen Auffassung des Durchschlags aufgegeben worden.

Für die Hochspannungstechnik ergeben sich wichtige Gesichtspunkte für die Verwendung von Idonit und Hartgummi als Isolatoren. Während sich Hartgummi in der Schwachstromtechnik als gutes Isolationsmaterial bewährt, verliert es seine guten Eigenschaften, wenn es Spannungen ausgesetzt wird, die 60% seiner Durchbruchspannung überschreiten: das Material „altert" unter dem Einfluß des elektrischen Feldes. Trotz seiner geringeren Festigkeit ist ihm Idonit überlegen, weil es dauernd Spannungen standhält, die nur wenige Prozent unter seiner Durchbruchspannung liegen.

5. Zusammenfassung.

Es wird eine Methode beschrieben, die es ermöglicht, den Zusammenhang von Strom und Spannung an festen Dielektrizis zu ermitteln und die auftretenden Fehlerquellen auszuschalten. Zunächst wird die Erzeugung der erforderlichen Gleichspannungen bis etwa 30000 Volt, dann die Spannungs- und Strommessung behandelt.

Für die Untersuchung fester Dielektrizis war die Beachtung dreier Gesichtspunkte von Bedeutung:

1. Das Vorhandensein eines homogenen Feldes zwischen den Elektroden bzw. die genaue Kenntnis der Feldverteilung.
2. Das sichere Aufliegen des Elektrodenmaterials, ohne störende Zwischenschichten von Luft oder Verunreinigungen, die eine Herabsetzung der Durchbruchfeldstärke bewirken.
3. Die Vermeidung von Gleitfunken über die Oberfläche des Dielektrikums und die Ableitung von Oberflächenkriechströmen, die die Strommessung fälschen.

Die untersuchten Stoffe zeigten folgende Eigenschaften:

I. Bakelit.

1. Die an Bakelit gewonnenen Stromspannungskurven waren nicht zu reproduzieren. Es besteht eine maximale Spannung, die eine selbständige, stetig anwachsende Strömung hervorruft, die schließlich den Durchbruch bewirkt.

II. Idonit.

2. Die Stromspannungskurven an Idonit befolgen das Gesetz

$$I = C_1 \cdot e^{C_2 \cdot V}.$$

---

[1]) Sie lautet:

$$I = \frac{2}{D} \cdot \sqrt{\frac{2K}{\gamma \cdot R_{max}}(1+\varepsilon)} \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\varepsilon}$$

$$P = 2 \cdot \sqrt{\frac{2K}{\gamma} \cdot R_{max} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}.$$

D = Plattendicke in cm,
k = Wärmeleitfähigkeit in Watt/cm Grad C,
R_{max} = spez. Widerstand in Ohm/cm³ an der Oberfläche. (Kühltemperatur bekannt!),
γ = Temperaturkoeffizient,
$R_{max} = R_{min} \cdot (1 + \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$
und ihre explizite Darstellung $I = f(P)$:

$$I = \frac{2}{D} \cdot \sqrt{\frac{2K}{\gamma \cdot R_m}\left(1 + \frac{P^2}{\frac{8K}{\gamma} \cdot R_m - P^2}\right)} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(P \cdot \sqrt{\frac{1}{\frac{8K}{\gamma} R_m - P^2}}\right).$$



3. Sie sind durch Spannungsschwächung und -steigerung gut zu reproduzieren.
4. Vergleicht man an Proben verschiedener Schichtdicke die Ströme, die zu der gleichen Feldstärke gehören, so ergibt sich gute Übereinstimmung der Stromwerte bei höheren Feldstärken. Bei kleineren Feldstärken sind die Ströme, die die dünnere Probe durchfließen, größer.
5. Der Verlauf der Stromspannungskurven bleibt derselbe, wenn an Stelle von Quecksilber Silber oder Kupfer als Elektrodenmaterial tritt.
6. Linsen ungleicher Krümmung ($r_1 = 0{,}25$ mm, $r_2 = 15{,}0$ mm) zeigen Polaritätserscheinungen. Ist die stärkere Krümmung positiv, so liegt die Durchbruchfeldstärke um etwa 30% höher.
7. An Idonit wurden beträchtliche Restladungen festgestellt.

III. Hartgummi.

8. Die Stromspannungskurven an Hartgummi befolgen das Gesetz

$$I = e^{C_1 \cdot e^{C_2 \cdot V}}.$$

9. Die Stromspannungskurven sind nicht zu reproduzieren, wenn etwa 60% der Durchschlagsspannung überschritten wird. Durch fortgesetzte Spannungssteigerung und -schwächung gelingt es, die Durchbruchspannung um über 50% ihres normalen Betrages herabzumindern; die Ströme wachsen um zwei Zehnerpotenzen. Der Verlauf der Stromspannungskurven bleibt auch erhalten, wenn das Material starken Belastungsänderungen unterworfen wird.
10. Die Verwendung von Silber und Kupfer als Elektrodenmaterial kat keinen Einfluß auf den Verlauf der Stromspannungscharakteristik.
11. Wird die Temperatur einer Probe künstlich erhöht, so nimmt ihre Leitfähigkeit zu, hingegen bleibt die Durchbruchfeldstärke konstant und der Charakter der Stromspannungskurve erhalten.

Die Gültigkeit der Wärmetheorie des Durchbruchs von K. W. Wagner konnte für dünne Schichten nicht bestätigt werden, da keine Übereinstimmung zwischen den experimentell bestimmten Stromspannungskurven und dem theoretisch geforderten Verlauf besteht, ferner die Theorie keine Erklärung für die vorhandenen Polaritäts- und Ermüdungserscheinungen geben kann.

Die Arbeit wurde im Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena ausgeführt und im September 1924 abgeschlossen. Auch an dieser Stelle möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. W. O. Schumann, meinen herzlichsten Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und die liebenswürdige Unterstützung, die mir im Verlauf derselben zuteil wurde. Herrn Geheimrat Prof. Dr. Dr.-Ing. h. c. M. Wien bin ich für viele wertvolle Ratschläge zu großem Dank verpflichtet. Die Durchführung der Arbeit war nur möglich mit Unterstützung seitens der Industrie. Mein Dank richtet sich vor allem an die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft, die Helmholtz-Gesellschaft, die Firmen Carl Zeiß, Jena, Glaswerk Schott & Gen., Jena und die AEG. Berlin.

Abgeschlossen am 13. Februar 1925.



Archiv für Elektrotechnik

XIV. Band. 5. Heft 1925.

Die Lösung von Wechselstromaufgaben mit reellen Hilfsmitteln.

Von

Dr.-Ing. Fr. Natalis.

Die Lösung von Wechselstromaufgaben wird z. Z. überwiegend mit der sogenannten symbolischen Methode ausgeführt, bei der Vektoren durch komplexe Zahlen dargestellt werden. Die Anwendung komplexer Größen ist an sich nicht zu verwerfen, da man darunter nicht imaginäre d. h. mit unseren Sinnen und Meßinstrumenten nicht meßbare Größen zu verstehen braucht. Dagegen geht die Übersicht über die Rechnungsgrößen und ihre Maßeinheiten völlig verloren, wenn man auch Vektorverhältnisse $\left(\text{z. B. } \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{i}} = \text{Scheinwiderstand oder } \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{e}} = \text{Scheinleitwert}\right)$ durch komplexe Größen darstellt. Verfasser hat sich daher seit längerer Zeit bemüht, komplexe Größen aus den Rechnungen ganz zu entfernen und nur mit reellen Größen, den Vektoren und Vektorverhältnissen zu operieren. Die Erfahrung zeigt, daß man damit zu wesentlich durchsichtigeren Entwicklungen kommt, und daß die Formeln direkt das Rezept für die Konstruktion des zugehörigen Vektordiagramms enthalten.

Der Unterschied zwischen den beiden Methoden wird am besten dadurch geklärt, daß man einen nach der symbolischen Methode behandelten Aufsatz nach der neuen Rechnungsart umarbeitet und beide miteinander vergleicht. Ich benütze dabei als Beispiel die vorzügliche Abhandlung des Herrn Pflieger-Haertel „Zur Theorie der Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik", Archiv für Elektrotechnik, 22. August 1924, 5. Heft, S. 396, und folge im wesentlichen seinem Gedankengang. Die Priorität für letzteren wie auch für die Resultate gebührt natürlich Herrn Pflieger-Haertel.

Herr Pflieger-Haertel stellt sich die Aufgabe, für eine zirkulare Kurve dritter Ordnung in allgemeiner Lage den Vektor des Doppelpunktes zu bestimmen und knüpft dabei an frühere Untersuchungen von O. Bloch an, der die Bedingungen entwickelt hat, unter denen der Doppelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt. Dieser Doppelpunkt kann ein eigentlicher Doppelpunkt sein, der dem Schnittpunkt einer Schleife entspricht, oder ein Rückkehrpunkt, so daß die Kurve eine Spitze besitzt, oder ein isolierter, singulärer Punkt, der außerhalb des Kurvenzuges liegt.

Die Gleichung einer derartigen zirkularen Kurve dritter Ordnung lautet:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{t}\,\frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\,v + \mathfrak{r}\,v^2}{\mathfrak{t} + \mathfrak{s}\,v} = \frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\,v + \mathfrak{r}\,v^2}{1 + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}}\,v} \text{ [1]}, \tag{1}$$

worin $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ Vektoren, $\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}}$ ein Vektorverhältnis und v einen (zwischen $-\infty$ und $+\infty$) veränderlichen reellen Zahlenwert bedeuten. Der Vektor $\mathfrak{z}$ ergibt sich demnach als ein Vektor $\mathfrak{t}$, der mit dem Vektorverhältnis $(\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\,v + \mathfrak{r}\,v^2) : (\mathfrak{t} + \mathfrak{s}\,v)$ zu multiplizieren ist. Der gesuchte Doppelpunkt sei durch einen noch zu bestimmenden Vektor $\mathfrak{x}$ bestimmt. Um den Doppelpunkt in den Ursprung zu verlegen, verschieben wir das Ordinatensystem um den Vektor $\mathfrak{x}$ und erhalten:

[1] Vgl. Die Berechnung von Gleich- und Wechselstromsystemen, II. Auflage, Fr. Natalis, Julius Springer, 1924.

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{q} v + \mathfrak{r} v^2}{1 + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} v} - \mathfrak{x} = \frac{(\mathfrak{p} - \mathfrak{x}) + \left(\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} \mathfrak{x}\right) v + \mathfrak{r} v^2}{1 + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} v}. \tag{2}$$

Da der Doppelpunkt in dem neuen Ordinatensystem in den Nullpunkt fallen soll, so muß der Zähler des (letzten) Bruches für 2 verschiedene Werte von v gleich Null werden. Würden wir den Vektor $\mathfrak{x}$ so wählen, daß die 3 Vektoren $(\mathfrak{p} - \mathfrak{x})$, $\left(\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} \mathfrak{x}\right)$, $\mathfrak{r}$ einen geschlossenen Linienzug bilden, so würde für $v = 1$ zwar der Zähler auch zu Null werden. Diesem Werte von $\mathfrak{x}$ würde aber in der Regel kein Doppelpunkt entsprechen, da es nur unter besonderen weiteren Annahmen einen zweiten Wert v gibt, der den Zähler gleichfalls zu Null macht. Soll der Zähler für die Werte v_1 und v_2 zu Null werden, so muß

$$(\mathfrak{p} - \mathfrak{x}) + \left(\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} \mathfrak{x}\right) v_1 + \mathfrak{r} v_1^2 = 0$$

und

$$(\mathfrak{p} - \mathfrak{x}) + \left(\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} \mathfrak{x}\right) v_2 + \mathfrak{r} v_2^2 = 0,$$

also

$$\left(\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} \mathfrak{x}\right) = - \mathfrak{r} (v_1 + v_2)$$

sein. Das ist aber nur möglich, wenn

$$\left(\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} \mathfrak{x}\right) \parallel \mathfrak{r} \text{ und weiterhin } (\mathfrak{p} - \mathfrak{x}) \parallel \mathfrak{r}$$

ist. Wählen wir daher $\mathfrak{x}$ derart, daß die genannten 3 Vektoren gleiche Richtung besitzen, so erhalten wir eine skalare Gleichung zweiten Grades in v, der zwei Werte v_1 v_2 entsprechen, die den Zähler der Gleichung (2) zu Null machen. Wir setzen daher

$$\mathfrak{p} - \mathfrak{x} = \lambda \mathfrak{r} \tag{3}$$

und

$$\mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} \mathfrak{x} = - \mu \mathfrak{r}, \tag{4}$$

also den Zähler von Gleichung (2) gleich $\mathfrak{r} (\lambda - \mu v + v^2)$, worin λ und μ[1]) reelle Zahlenwerte bedeuten. Hieraus ergibt sich:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p} - \lambda \mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}} (\mathfrak{q} + \mu \mathfrak{r}) \tag{5}$$

und daraus

$$\lambda \mathfrak{r} + \mu \frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{r} = \mathfrak{p} - \frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{q}\,^{1}). \tag{6}$$

Setzen wir zur Vereintachung die Vektoren

$$\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{r} = \mathfrak{a} \tag{7}$$

und

$$\mathfrak{p} - \frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{q} = \mathfrak{b}, \tag{8}$$

also

$$\lambda \mathfrak{r} + \mu \mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,^{1}), \tag{9}$$

---

[1]) In Gleichung (4) ist in Übereinstimmung mit Pflieger-Haertel μ mit negativem Vorzeichen gewählt, damit in Gleichung (6) und (9) die Summe und nicht die Differenz zweier Vektoren auftritt.

so bedeutet dieses, daß der Vektor $\mathfrak{b}$, entsprechend Bild 1, in zwei Vektoren von der Richtung $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{a}$ zerlegt werden soll. Bezeichnen wir diese mit $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ ($\lambda \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$; $\mu \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$), so ist

$$\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b} \tag{10}$$

und

$$\lambda = \frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{r}}, \tag{11}$$

$$\mu = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}}. \tag{12}$$

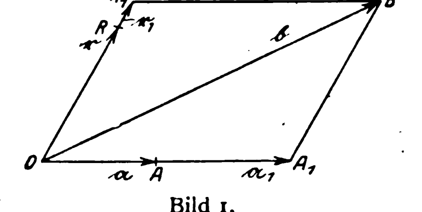


Bild 1.

Mit diesen Werten für λ und μ wird Gleichung (5) unter Berücksichtigung von Gleichung (7)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p} - \mathfrak{r}_1 = \frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}}\left(\mathfrak{q} + \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}}\mathfrak{r}\right) = \frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}}\mathfrak{q} + \mathfrak{a}_1, \tag{13}$$

woraus sich eine überaus einfache Konstruktion von $\mathfrak{x}$ ergibt. Um auch die beiden Werte v_1 v_2 zu finden, welche dem Vektor $\mathfrak{x}$ zugehören, setzen wir die beiden Ausdrücke für $\mathfrak{x}$ nach Gleichung (13) in Gleichung (2) ein und erhalten

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{x} = \frac{(\mathfrak{p} - \mathfrak{p} + \mathfrak{r}_1) + \left(\mathfrak{q} - \mathfrak{q} - \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}}\mathfrak{r}\right)v + \mathfrak{r}v^2}{1 + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}}v} = \frac{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}}\mathfrak{r}v + \mathfrak{r}v^2}{1 + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}}v}. \tag{14}$$

Für $\mathfrak{z} - \mathfrak{x} = 0$ wird

$$\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{r}} - \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}}v + v^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lambda - \mu v + v^2 = 0. \tag{15}$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\lambda}\right). \tag{16}$$

Ist $\mu^2 - 4\lambda > 0$, so gibt es zwei voneinander verschiedene reelle Werte v_1 v_2, die der Gleichung (14) $\mathfrak{z} - \mathfrak{x} = 0$ genügen, und die Kurve besitzt einen eigentlichen Doppelpunkt.

Ist dagegen $\mu^2 - 4\lambda < 0$, so werden v_1 v_2 konjugiert komplex und die Kurve besitzt daher einen singulären Punkt außerhalb des den fortlaufenden reellen Werten von v entsprechenden Kurvenzuges.

Ist schließlich $\mu^2 - 4\lambda = 0$ oder

$$\mu = \pm 2\sqrt{\lambda}; \quad \lambda = \frac{1}{4}\mu^2, \tag{17}$$

so werden v_1 und v_2 reell und gleich. In diesem Fall besitzt die Kurve an dieser Stelle einen Rückkehrpunkt und es ist

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{2}\mu = \pm\sqrt{\lambda}. \tag{18}$$

Ist daher $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{r}$, also $\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}} = \mu$ gegeben, so ist

$$\lambda = \frac{\mu^2}{4} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{r}_1 = \lambda\mathfrak{r}$$

gleichfalls bekannt, woraus sich $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{r}_1$ leicht bestimmen läßt.

In der Einleitung war geäußert, daß sich für $v = 1$ nur ausnahmsweise ein Doppelpunkt ergibt. Nach Gleichung (15) ist dabei $\lambda - \mu v + v^2 = 0$. Soll diese Gleichung sowohl für $v_1 = 1$ wie für einen weiteren Wert v_2 erfüllt sein, so muß

$$\text{für } v_1 = 1 \left\{ \begin{array}{l} \lambda - \mu + 1 = 0 \quad \text{und} \\ \lambda - \mu v_2 + v_2^2 = 0 \quad \text{sein, woraus sich} \\ \lambda = \mu - 1 \quad \text{und} \\ \mu = v_2 + 1 \quad \text{ergibt.} \end{array} \right.$$

Ist daher außer $v_1 = 1$ einer der Werte λ, μ, v_2 gegeben, so sind auch die beiden anderen damit bestimmt. Soll der Doppelpunkt außerdem ein Rückkehrpunkt sein, so muß auch $v_2 = 1$ sein. Damit ergibt sich $\mu = 2$, $\lambda = 1$. Mit diesen Werten ist auch Gleichung (17) $\lambda = \frac{1}{4}\mu^2$ erfüllt. Es gibt daher für $v_1 = 1$ unendlich viele Wertpaare λ, μ, für die die Kurve einen Doppelpunkt oder isolierten Punkt, aber nur ein Wertpaar, für das sie an dieser Stelle ($v_1 = 1$) einen Rückkehrpunkt besitzt.

Konstruktion der zirkularen Kurven dritter Ordnung.

Bloch hat eine einfache Konstruktion für derartige Kurven angegeben unter Benutzung eines Kreises und einer Geraden. Nachstehend soll eine andere Konstruktion entwickelt werden, wobei der Ursprung des Ordinatensystems in den Doppelpunkt verschoben ist. Nach Gleichung (1), (7), (11) und (12) ist

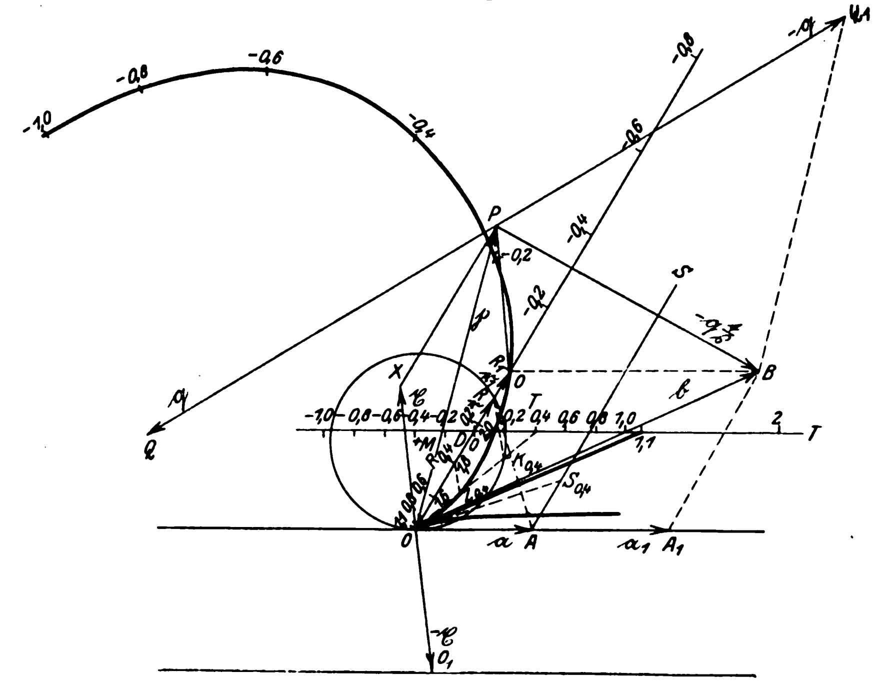


Bild 2. Kurve mit Rückkehrpunkt.

$$\mathfrak{z} - \mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{r}_1 - \frac{a_1}{a}\mathfrak{r}\,v + \mathfrak{r}\,v^2}{1 + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}}\,v} = \frac{a}{a + \mathfrak{r}\,v}\,\mathfrak{r}\,(\lambda - \mu\,v + v^2). \tag{19}$$

Der Faktor $(\lambda - \mu v + v^2)$ ist ein reeller (veränderlicher) Zahlenwert, der für verschiedene Werte von v (... — 2, — 1, 0, 1, 2 ...) leicht zu berechnen ist.

a) Kurve mit Rückkehrpunkt in o.

Mit $\lambda = \frac{1}{4}\mu^2$ wird

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \mu v + v^2 &= \left(v - \frac{1}{2}\mu\right)^2 \\ \mathfrak{z} - \mathfrak{x} &= \frac{a}{a + \mathfrak{r}\,v}\,\mathfrak{r}\left(v - \frac{1}{2}\mu\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

In Bild 2 ist die Kurve aus den gegebenen Vektoren $\mathfrak{p} = OP$, $\mathfrak{q} = PQ$ ($-\mathfrak{q} = PQ_1$), $\mathfrak{r} = OR$ und dem Vektorverhältnis $\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}} = \frac{PQ_1}{PB}$[1] konstruiert. Es ist fernerhin $\mu = 2{,}2$ angenommen, woraus sich $\lambda = \frac{1}{4}\mu^2 = 1{,}21$ ergibt.

Nach Gleichung (8) ist $\mathfrak{p} - \frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}}\mathfrak{q} = \mathfrak{b} = OB$. Ferner ist $\mathfrak{r}_1 = \lambda\mathfrak{r} = 1{,}21\,\mathfrak{r} = OR_1$. Zieht man $OA_1 \parallel R_1B$ und $BA_1 \parallel R_1O$, so ist der Punkt A_1 ($\mathfrak{a}_1 = OA_1$) gefunden. Der

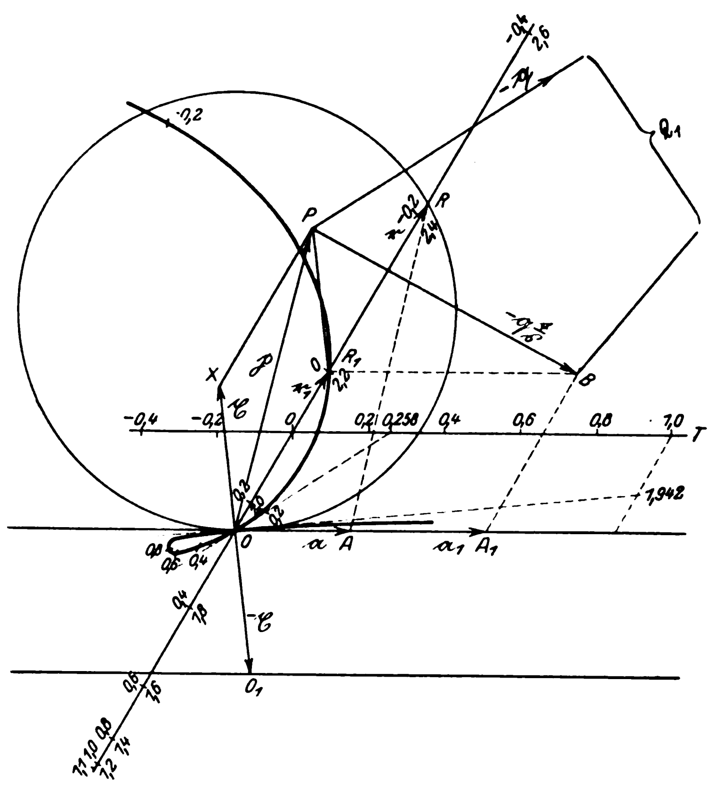


Bild 3. Kurve mit Doppelpunkt.

Punkt A ($\mathfrak{a} = OA$) wird gefunden, indem entweder $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mu} = \frac{\mathfrak{a}_1}{2{,}2}$ ermittelt oder das Dreieck $\triangle ROA \sim \triangle Q_1PB$ konstruiert wird, da nach Gleichung (7) $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{t}}$ ist. Nach Gleichung (13) ergibt sich ferner:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p} - \mathfrak{r}_1 = OX.$$

Wir müssen daher den Ordinatenursprung um $-\mathfrak{x}$, d. h. von O nach O_1 verschieben.

Der Faktor $(\lambda - \mu v + v^2) = \left(v - \frac{1}{2}\mu\right)^2 = (v - 1{,}1)^2$ ergibt für

$v =$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	0	$+0{,}2$	$+0{,}4$	$+0{,}6$	$+0{,}8$	$+1{,}0$	$+1{,}1$	$+2{,}0$
$(v-1{,}1)^2 =$	4,41	3,61	2,89	2,25	1,69	1,21	0,81	0,49	0,25	0,09	0,01	0	0,81.

Mit diesen Faktoren $(v - 1{,}1)^2$ ist nach Gleichung (20) der Vektor $\mathfrak{r}$ zu multiplizieren. Wir schreiben daher an den Strahl $\mathfrak{r} = OR$ (und zwar zu beiden Seiten, da die Punktreihe in O rückläufig ist) die zugehörigen Werte von v.

[1] Ein Vektorverhältnis kann beliebig verdreht und Zähler und Nenner mit einer beliebigen reellen Zahl multipliziert werden. Man kann daher den Zähler ($\mathfrak{s}$) gleich $-\mathfrak{q}$ setzen.

Die hiermit gefundenen Werte $\mathfrak{r}(v - 1{,}1)^2$ sind nunmehr nach Gleichung (20) mit dem Vektorverhältnis $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{r} v}$ zu multiplizieren. Die Gerade $\mathfrak{a} + \mathfrak{r} v$ wird dargestellt durch die Parallele AS zu OR. Für $v = 0{,}4$ ergibt sich beispielsweise der Punkt $S_{0,4}$, und das Vektorverhältnis $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{r} v}$ ist gleich $\frac{OA}{OS_{0,4}}$. Um den zugehörigen Kurvenpunkt $Z_{0,4}$ zu finden, haben wir daher $\triangle ROK_{0,4} \sim \triangle S_{0,4}OA$ zu konstruieren und $R_{0,4}Z_{0,4} \parallel RK_{0,4}$ zu ziehen. Da der $\sphericalangle OK_{0,4}R = OAS = \text{Const.}$ ist, so liegen die K-Punkte auf einem Kreise um M, der durch O geht und OA in O berührt[1]). Die Konstruktion der K-Punkte wird erleichtert, wenn man statt des Linienzuges OAS den Linienzug ODT ($OD = OA$ und $DT \parallel OA$) benützt und von D aus die

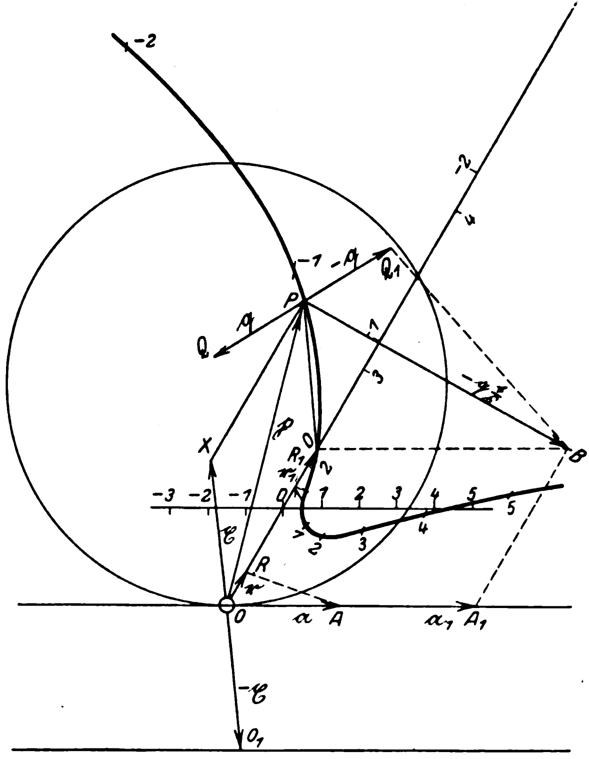


Bild 4. Kurve mit isoliertem Doppelpunkt.

Werte $v \cdot |\mathfrak{r}|$ auf DT abträgt. Dann ist der Schnittpunkt des Strahles $OT_{0,4}$ mit dem Kreis der gesuchte Punkt $K_{0,4}$. Die Konstruktion entspricht der bekannten Inversion einer Geraden und der Linienzug ODT ist das Spiegelbild von OAS in bezug auf die Winkelhalbierende.

Der zugehörige Punkt $Z_{0,4}$ der Kurve wird gefunden, indem man $R_{0,4}Z_{0,4} \parallel RK_{0,4}$ zieht und den Schnittpunkt $Z_{0,4}$ mit dem Strahl $OT_{0,4}$ aufsucht. In dieser Weise ist die gesuchte Kurve mit Rückkehrpunkt in O punktweise konstruiert. Dieselbe geht durch den Punkt R_1.

b) Kurve mit Doppelpunkt in O.

Eine derartige Kurve ist in Bild 3 dargestellt. Dabei sind gegenüber Bild 2 die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{p}$ unverändert angenommen. Damit bleibt das Parallelo-

[1]) Der Kreis braucht nicht, wie in Bild 2 dargestellt, durch den Punkt R zu gehen, da das Vektorverhältnis durch gleichartige Linearverlängerung der beiden Vektoren sich nicht verändert.

gramm OA_1BR_1, der Wert $\mu = 2,2$ und die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $PB = -q\frac{t}{\mathfrak{g}}$ unverändert, während die Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ ihre Richtung beibehalten, aber ihre Beträge im gleichen Verhältnis ändern. Dem Bilde 3 ist der Wert $\lambda = 0,484$ zugrunde gelegt.

Der Faktor

$$\lambda - \mu v + v^2 = \left(v - \frac{\mu}{2}\right)^2 + \lambda - \frac{\mu^2}{4} = (v - 1,1)^2 - 0,726$$

ergibt für

$v =$	$-0,2$	0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	$1,0$	$1,1$	$1,2$	$2,0$
$\lambda - \mu v + v^2 =$	$0,96$	$0,48$	$0,08$	$-0,24$	$-0,48$	$-0,64$	$-0,72$	$-0,73$	$-0,72$	$0,08$.

Im übrigen ist die Kurve in gleicher Weise punktweise konstruiert wie Bild 2. Die Tangenten im Punkte O entsprechen den Werten $v_1 = 0,258$ und $v_2 = 1,942$.

c) Kurve mit isoliertem Doppelpunkt in O.

Auch für diese in Bild 4 dargestellte Kurve ist $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ ($\mu = 2,2$), $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{p}$ unverändert angenommen, aber $\lambda = 4,84$ gesetzt. Damit ergibt sich der Faktor

$$\lambda - \mu v + v^2 = \left(v - \frac{\mu}{2}\right)^2 + \lambda - \frac{\mu^2}{4} = (v - 1,1)^2 + 3,63$$

für

$v =$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
zu $\lambda - \mu v + v^2 =$	$20,44$	$13,24$	$8,04$	$4,84$	$3,64$	$4,44$	$7,24$	$12,04$	$18,84$.

Der fortlaufende Kurvenzug geht nicht wie in Bild 2 und 3 durch den Ursprung. Die Kurve besitzt aber im Ursprung O einen isolierten Doppelpunkt.

Hysterese und Wirbelströme in Eisenblechen.

Von

Franz Ollendorff, Berlin.

Übersicht.

1. Einleitung; Ziel der Arbeit.

Die übliche Anschauung über die Entstehung der Eisenverluste wechselfeldtragender Materialien unterscheidet als Verlustursachen Hysterese und Wirbelströme. Rechnungsmäßig führt diese Anschauung zu getrenntem Ansatz für beide Verlustanteile.

Indessen ist leicht ersichtlich, daß eine solche Berechnungsweise zu falschen Resultaten Anlaß geben muß. Denn die Stärke der Wirbelströmung ist durch das Durchflutungsgesetz mit der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$, durch das Induktionsgesetz mit der magnetischen Induktion verknüpft; für die Beziehung zwischen

Induktion und Feldstärke ist aber die Hysterese erscheinung von entscheidender Bedeutung.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die Hysterese- und Wirbelstromverluste simultan zu berechnen; indem sie bezüglich der Form des Hysteresevorganges einen einfachen Ansatz machen muß, ist freilich eine quantitative Ungenauigkeit nicht zu vermeiden. Dieser Nachteil wird indessen ausgeglichen durch die erhöhte physikalische Einsicht in die Magnetisierungsgesetze des Eisens bei zeitlich veränderlichen Vorgängen.

a) Grundlagen.

2. Analytische Formulierung der Hystereseerscheinung.

Der analytischen Formulierung der Hystereseerscheinung stehen außerordentliche Schwierigkeiten entgegen; denn schon die Gleichung der Kurve, welche beim erstmaligen Magnetisieren des ferromagnetischen Materials durchlaufen wird, ist nicht bekannt. Noch viel weniger ist es möglich, die Mehrdeutigkeit, welche durch die Hystereseerscheinung in den Magnetisierungsvorgang hineingetragen wird, exakt zu erfassen.

Demnach wird eine Näherung notwendig. Hierbei ist zu fordern, daß das wesentliche Merkmal der Hystereseerscheinung, die Schleifenbildung, erhalten bleibe. Als einfachsten Kurvenzug, welcher dieser Forderung genügt, wählen wir eine Ellipse. Lage und Form der Ersatzellipse sind an Hand versuchsmäßiger Kurven der wirklichen Hystereseschleife möglichst genau anzupassen.

Die Ellipse liefert durch Abszisse und Ordinate ihrer Kurvenpunkte die gleichzeitigen Werte von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$; über den zeitlichen Verlauf dieser Größen selbst enthält sie keine Aussagen.

Die Benutzung einer einzigen Ellipse für alle Zeitpunkte zwingt zur Beschränkung auf den quasistationären Zustand; denn während vorübergehender „Schalt"felder werden im Eisen mehrere, sich nicht deckende Kurvenzüge durchlaufen. Der zeitliche Ansatz

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_{max}\cdot\cos\omega t\\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_{max}\cdot\cos(\omega t - \psi_a)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

erfüllt die Bedingungen des quasistationären Zustandes. Der hier eingeführte Winkel ψ_a, welcher die Phasennacheilung der Induktion gegen die Feldstärke mißt, heiße der Hysteresewinkel. Er ist von grundlegender Bedeutung für unsere Theorie.

Andererseits ist leicht beweisbar, daß der Ansatz (1) zu dem Ersatzbilde der Hystereseschleife führt, welches oben eingeführt wurde: der Ellipse.

Zum Beweise ist die Zeit aus der Gleichung (1) zu eliminieren. Durch Entwicklung der trigonometrischen Funktion in der Gleichung der Induktion kommt

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_{max}} = \cos\omega t\cos\psi_a + \sin\omega t\cdot\sin\psi_a$$

und durch Einführung der Feldstärkengleichung

$$\cos\omega t = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{max}};\qquad \sin\omega t = \sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{max}}\right)^2}$$

wird

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_{max}} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{max}}\cdot\cos\psi_a + \sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{max}}\right)^2}\cdot\sin\psi_a.\tag{2}$$

Wir substituieren

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_{max}} = \mathfrak{b};\quad \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{max}} = \mathfrak{h},\tag{3}$$

womit (2) in

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \cos \psi_a + \sqrt{1 - \mathfrak{h}^2} \cdot \sin \psi_a$$

oder nach leichter algebraischer Umformung in

$$\mathfrak{b}^2 - 2\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{h} \cos \psi_a + \mathfrak{h}^2 = \sin^2 \psi_a \tag{4}$$

übergeht. Es ist zweckmäßig, ein neues um 45° gegen das System ($\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$) gedrehtes Koordinatensystem x, y mittels

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{h} &= (x + y) \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ \mathfrak{b} &= (x - y) \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

einzuführen (Bild 1). Durch Einsetzen von (5) in (4) wird

$$\frac{x^2}{2} - 2\, x \cdot y \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{y^2}{2} - 2 (x^2 - y^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \psi_a + \frac{x^2}{2} +$$
$$+ 2\, x \cdot y \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{y^2}{2} = \sin^2 \psi_a.$$

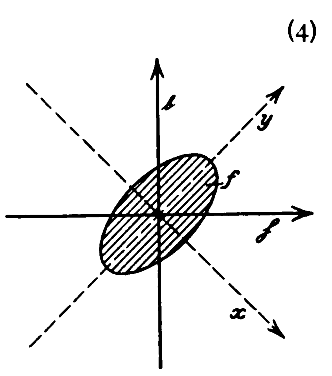


Bild 1. Zur Transformation der Ellipsengleichung auf die Normalform.

oder nach Zusammenfassung

$$x^2 (1 - \cos \psi_a) + y^2 (1 + \cos \psi_a) = \sin^2 \psi_a \tag{6}$$

oder

$$\frac{x^2}{\left[\dfrac{\sin \psi_a}{\sqrt{1 - \cos \psi_a}}\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\dfrac{\sin \psi_a}{\sqrt{1 + \cos \psi_a}}\right]^2} = 1. \tag{6a}$$

Hiermit ist der Beweis geliefert. Einer einfachen Gesetzmäßigkeit gehorcht nach (6a) die Ellipsenfläche

$$f = \pi \frac{\sin \psi_a}{\sqrt{1 - \cos \psi_a}} \cdot \frac{\sin \psi_a}{\sqrt{1 + \cos \psi_a}} = \pi \cdot \sin \psi_a.$$

Mit Rücksicht auf (3) beträgt die Ellipsenfläche im System ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$)

$$F = \mathfrak{H}_{max} \cdot \mathfrak{B}_{max} \cdot f = \mathfrak{H}_{max} \cdot \mathfrak{B}_{max} \cdot \pi \cdot \sin \psi_a. \tag{7}$$

Hieraus folgt die Möglichkeit, den Hysteresewinkel in einfachster Weise aus der vorgelegten Hystereseschleife durch Planimetrieren der umschlossenen Fläche zu gewinnen. Im allgemeinen wird sich hierbei eine Abhängigkeit des Hysteresewinkels von $\mathfrak{B}_{max}$ und $\mathfrak{H}_{max}$ ergeben, deren Charakter aus den bekannten Steinmetzschen oder Richterschen Gesetzen erschlossen werden kann.

Für die weitere Rechnung wird ψ_a als gegeben vorausgesetzt.

Nachdem die Gleichwertigkeit des Ansatzes (1) mit dem Ersatz der Hystereseschleife durch eine Ellipse gezeigt ist, braucht von nun ab nur die Gleichung (1) als Ausdruck der Hystereseerscheinung berücksichtigt zu werden. Es ist zweckmäßig, diese Gleichungen in komplexer Form zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{R}_e(\bar{\mathfrak{H}}); \quad \bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_{max} \cdot e^{j \omega t} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{R}_e(\bar{\mathfrak{B}}); \quad \bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_{max} \cdot e^{-j \psi_a} \cdot e^{j \omega t} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Das von der Zeit unabhängige Verhältnis

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{\mathfrak{B}}}{\bar{\mathfrak{H}}} = \frac{\mathfrak{B}_{max}}{\mathfrak{H}_{max}} \cdot e^{-j \psi_a} = \mu \cdot e^{-j \psi_a} \tag{9}$$

definieren wir als komplexe Permeabilität des Eisens. Die Bestimmung der komplexen Permeabilität aus der vorgelegten Hystereseschleife ist einfach: Durch die von der Schleife umschlossene Fläche ist der Winkel ψ_a, durch die Amplitudenwerte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ der Betrag μ bestimmt.

Die komplexe Permeabilität schildert nicht nur zusammen mit der Gleichung (1) die Hystereseerscheinung des quasistationären Zustandes, sondern ist im Verein mit einem zeitlich gedämpften Feldverlauf

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_{max} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t = \Re (\mathfrak{H}_{max} \cdot e^{(-\delta + j\omega) t}) \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_{max} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos (\omega t - \psi_a) = \Re (\mathfrak{B}_{max} \cdot e^{(-\delta + j\omega - j\psi_a) t}) \end{aligned}\right\} \quad (1a)$$

imstande, einen Schaltvorgang wiederzugeben. Die durch (1a) dargestellte Kurve ist eine elliptische Spirale, welche sich in stetig enger werdenden Windungen dem Nullpunkte nähert (Bild 2). Auf diesen Zusammenhang soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden; wir beschränken uns fortan auf den quasistationären Zustand.

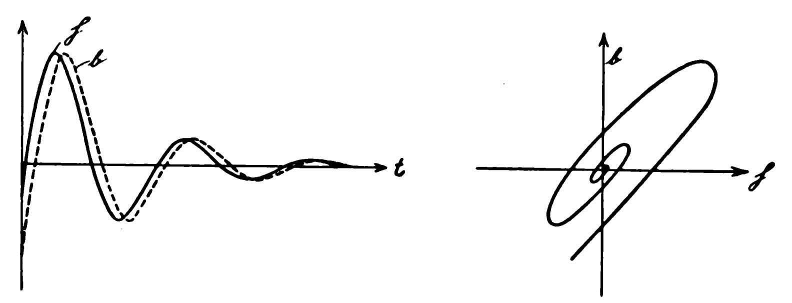


Bild 2. Hysteresevorgang bei exponentiell verklingendem Felde.

3. Die Feldgleichungen der Wirbelströmung unter Berücksichtigung der Hysterese[1]).

Mit Benutzung der komplexen Permeabilität lassen sich die Feldgleichungen der Wirbelströmung sogleich aus den Maxwellschen Gleichungen gewinnen. Wir streichen den hypothetischen elektrischen Verschiebungsstrom im Eisen.

Die Maxwellschen Feldgleichungen, in technischen Einheiten: Volt/cm für die elektrische, Amp/cm für die magnetische Feldstärke geschrieben, lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\, \mathfrak{H} &= \mathfrak{i} \\ \text{rot}\, \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \cdot 10^{-8} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Zur Einführung der komplexen Permeabilität beschränken wir uns auf den quasistationären Zustand; wir schreiben daher zweckmäßig die Feldgleichungen ebenfalls in komplexer Form

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\, \overline{\mathfrak{H}} &= \overline{\mathfrak{i}} \\ \text{rot}\, \overline{\mathfrak{E}} &= -\overline{\mathfrak{B}}\, j\omega \cdot 10^{-8} \end{aligned}\right\} \quad (10a)$$

Feldstärke $\mathfrak{E}$ und Stromdichte $\mathfrak{i}$ sind durch das Ohmsche Gesetz verknüpft

$$\mathfrak{i} = \varkappa \mathfrak{E}, \quad (11)$$

wo $\varkappa$ in $1/\Omega/\text{cm}^3$ zu messen ist. Die Einführung von (9) und (11) in (10a) liefert

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\, \overline{\mathfrak{H}} &= \overline{\mathfrak{i}} \\ \text{rot}\, \frac{\overline{\mathfrak{i}}}{\varkappa} &= -\overline{\mu} \cdot \overline{\mathfrak{H}}\, j\omega \cdot 10^{-8} = -\mu \cdot e^{-j\psi_a} \cdot \overline{\mathfrak{H}} \cdot j\omega \cdot 10^{-8} \end{aligned}\right\} \quad (10b)$$

Durch Elimination von $\mathfrak{i}$ gewinnen wir die partielle Differentialgleichung

$$\nabla^2 \overline{\mathfrak{H}} = \varkappa \overline{\mu} \cdot j\omega \cdot 10^{-8} \cdot \overline{\mathfrak{H}} = \varkappa \mu \cdot e^{-j\psi_a} \cdot j\omega \cdot 10^{-8}\, \overline{\mathfrak{H}}, \quad (12)$$

welcher $\overline{\mathfrak{H}}$ zu genügen hat. Wir setzen zur Abkürzung

$$\varkappa \overline{\mu} \cdot j\omega \cdot 10^{-8} = \varkappa \mu \cdot e^{-j\psi_a} j\omega \cdot 10^{-8} = -k^2, \quad (13)$$

[1]) Vgl. hierzu: Truxa, Über den Einfluß der Hysteresis auf den Wechselstromwiderstand massiver Eisenleiter. Arch. f. Elektrotechnik, XII, 1923, S. 354 ff.

also

$$k = \sqrt{-\varkappa\mu e^{-j\psi_a} j\omega\cdot 10^{-8}} = \sqrt{\frac{\omega\varkappa\mu\cdot 10^{-8}}{2}}\cdot\sqrt{-2je^{-j\psi_a}} \qquad (13\,a)$$

und nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\left.\begin{aligned} k &= \pm(1-j)e^{-\frac{j\psi_a}{2}}\sqrt{\frac{\omega\varkappa\mu\cdot 10^{-8}}{2}} = \\ &= \pm\left[\left(\cos\frac{\psi_a}{2}-\sin\frac{\psi_a}{2}\right)-j\left(\cos\frac{\psi_a}{2}+\sin\frac{\psi_a}{2}\right)\right]\cdot\sqrt{\frac{\omega\varkappa\mu\cdot 10^{-8}}{2}}\end{aligned}\right\} \qquad (13\,b)$$

Ferner führen wir die Hysteresekoeffizienten

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\psi_a}{2}-\sin\frac{\psi_a}{2} &= a_1\\ \cos\frac{\psi_a}{2}+\sin\frac{\psi_a}{2} &= a_2\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

ein, welche aus dem gegebenen Hysteresewinkel nach Bild 3 leicht abzugreifen sind. Mit (14) schreibt sich k einfacher:

$$k = \pm[a_1 - j\,a_2]\cdot\sqrt{\frac{\omega\varkappa\mu\cdot 10^{-8}}{2}}. \qquad (13\,c)$$

Die Einführung von (13) in (12) liefert für $\overline{\mathfrak{H}}$ die Gleichung

$$\nabla^2\overline{\mathfrak{H}} = -k^2\overline{\mathfrak{H}}, \qquad (15)$$

welche aus der Theorie der Wärmeleitung wohlbekannt ist.

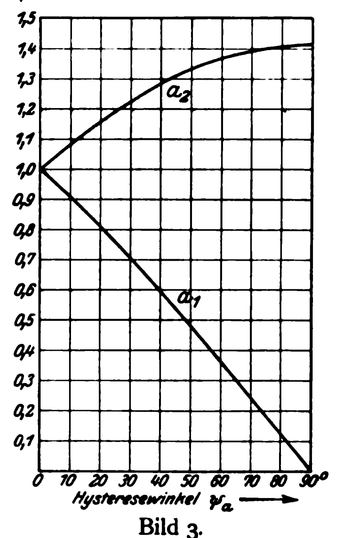


Bild 3.
Die Hysteresekoeffizienten.

b) Wirbelströmung in Eisenblechen.

4. Integration der Feldgleichungen.

Die Schwierigkeit der Integration der Feldgleichungen liegt nicht in der Auffindung allgemeiner Integrale. Vielmehr sind solche Partikularlösungen aufzusuchen, welche bestimmten physikalisch realisierbaren Systemen angepaßt sind.

Wir wählen als Beispiel die Wirbelströmung in Transformatorblechen, welche die technisch wichtigste ist und zugleich den einfachsten Lösungsweg gestattet. Auf diesen Fall lassen sich, wie Dreyfus[1]) gezeigt hat, die Strömung in lamellierten Polschuhen und Ankern von Dynamomaschinen zurückführen.

Bild 4 zeigt die bekannte Anordnung eines Transformatorbleches. Als Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems wird die Blechmitte gewählt. In der Längsrichtung des Bleches sei die z-Achse definiert, in der Querschnittsebene die x- und y-Achse. Die x-Achse soll parallel der Schmalseite, die y-Achse parallel der Breitseite orientiert sein.

Bild 4. Transformatorblech.

Bei praktisch verwertbaren Blechen ist stets die Länge l sowie die Breite b außerordentlich groß gegen die Dicke h (Bild 4). Diese Verhältnisse gestatten die

[1]) L. Dreyfus, Die Feldverteilung und Wirbelstrombildung in den Ankern von Dynamomaschinen bei der Ummagnetisierung durch hochperiodige Wechsel- und Drehfelder. Arch. f. Elektrot. Bd. IV, S. 99.

Annahmen, daß der Induktionsvektor $\mathfrak{B}$ überall die Richtung der z-Achse besitze, und daß die Wirbelströmung durchweg in Ebenen $z =$ konst. verlaufe. Ferner darf die x-Komponente der Wirbelströmung, welche nur unmittelbar an der Schmalseite merkliche Werte annimmt, vernachlässigt werden. Durch diese Vereinfachungen wird das Problem eindimensional, und wir erhalten aus (15) durch Spezialisierung die totale Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \bar{\mathfrak{H}}}{d x^2} = - k^2 \bar{\mathfrak{H}}, \tag{16}$$

da die Ableitungen nach y und z zu streichen sind.

Die Lösungen dieser Gleichungen sind bekanntlich

$$\bar{\mathfrak{H}} = A \sin k x + B \cos k x \tag{17}$$

mit A und B als Integrationskonstanten.

Zur Bestimmung von A und B dient eine Randbedingung: die Feldstärke $\bar{\mathfrak{H}}_r$ am Rande ist gegeben. Für

$$x = \pm \frac{h}{2} \qquad \text{soll} \qquad \bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{H}}_r \tag{18}$$

werden. Dieser Bedingung wird ersichtlich durch die Wahl

$$\bar{\mathfrak{H}} = \frac{\bar{\mathfrak{H}}_r}{\cos k \frac{h}{2}} \cdot \cos k x \tag{17a}$$

genügt.

Um den physikalischen Inhalt dieser Gleichung zu übersehen, führen wir aus (13c) den Wert von k ein und finden

$$k \cdot \frac{h}{2} = \left[a_1 - j a_2\right] \sqrt{\frac{\omega \varkappa \mu \cdot 10^{-8}}{2}} \cdot \frac{h}{2}.$$

Wir definieren durch

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega \varkappa \mu \cdot 10^{-8}}{2}} \cdot h \tag{19}$$

die reduzierte Blechbreite. Da der Hysteresewinkel ψ_a in ξ nicht eingeht, faßt ξ lediglich die Dimensionierung und die Wirbelstromkonstanten zusammen.

Durch Einführung von (19) in (17a) wird

$$\bar{\mathfrak{H}} = \frac{\bar{\mathfrak{H}}_r}{\cos\left[a_1 - j a_2\right] \cdot \frac{\xi}{2}} \cdot \cos\left[a_1 - j a_2\right] \cdot \xi \cdot \frac{x}{h}. \tag{17b}$$

Zweckmäßig ist die Zerlegung in Amplitude und Phasenwinkel, für welche nach leichter Rechnung[1])

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathfrak{H}} &= \frac{\bar{\mathfrak{H}}_r}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cof}\, a_1 \xi + \cos a_2 \xi\right)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cof}\, a_1 \xi \cdot \frac{2x}{h} + \cos a_2 \xi \frac{2x}{h}\right)}\, e^{j(\varphi - \varphi_r)} \\ &\text{mit} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg}\left(a_2 \xi \cdot \frac{x}{h}\right) \cdot \mathfrak{Tg}\left(a_1 \xi \cdot \frac{x}{h}\right) \\ \operatorname{tg} \varphi_r &= \operatorname{tg}\left(a_2 \xi \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \mathfrak{Tg}\left(a_1 \xi \cdot \frac{1}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{17c}$$

folgt.

[1]) Vgl Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Teubner 1923, S. 11.

Die Verteilung der Feldstärke über den Querschnitt hin ist durch die Funktion

$$\mathfrak{F}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cof}\, a_1 \xi \frac{2x}{h} + \cos a_2 \xi \frac{2x}{h}\right)} \tag{17d}$$

gegeben. Für sehr kleine Hysteresewinkel ψ_a wird $a_1 = a_2 = 1$ daher erhalten wir die bekannte Feldverdrängung nach dem Rande (magnetische Hautwirkung). Durch einen endlichen Hysteresewinkel ψ_a wird das Argument der $\mathfrak{Cof}$-Funktion verkleinert, dagegen das der cos-Funktion vergrößert. Der Sinn der hierdurch bewirkten Modifikation der Feldverteilung wird durch die Betrachtung des physikalisch freilich nicht realisierbaren Grenzfalles $\psi_a = \frac{\pi}{2}$ klargestellt, für welchen Bild 2 mit $a_1 = b$ in (17d) die Verteilung

$$\mathfrak{F}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos a_2 \xi \frac{2x}{h}\right)} = \cos a_2 \xi \frac{x}{h}$$

liefert; sie besitzt in der Blechmitte den Wert

$$\mathfrak{F}(0) = 1,$$

welcher nirgends überschritten werden kann.

Wegen der Abhängigkeit des Winkels φ von x variiert auch die Phase von Punkt zu Punkt; dies bewirkt, daß die momentane Feldverteilung in jedem Augenblick anders aussieht. In praktischen Fällen weicht die Verteilung von der bekannten Verteilung im hysteresefreien Stoff nicht wesentlich ab, so daß auf Zeichnung der Feldbilder verzichtet werden kann.

Durch (17c) ist eine stehende magnetische Welle im Blech dargestellt. Gehen wir aber von (17a) unmittelbar zur reellen Form über, so kommt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \Re e\left(\frac{\mathfrak{H}_{r\,max}}{\cos k \frac{h}{2}} \cdot \cos k x \cdot e^{j\omega t}\right) = \Re e\left(\frac{\mathfrak{H}_{r\,max}}{\cos k \frac{h}{2}} \cdot \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2}\, e^{j\omega t}\right) = \\ &= \frac{\mathfrak{H}_{r\,max}}{2}\, \Re e\left[\frac{1}{\cos k \frac{h}{2}}\left(e^{j(\omega t + kx)} + e^{j(\omega t - kx)}\right)\right],\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

womit die stehende Welle in zwei von beiden Seiten des Bleches nach der Mitte zu vordringende Wellen aufgespalten wird. Hierbei ist der reelle Teil von k

$$\Re e(k) = \pm a_1 \cdot \sqrt{\frac{\omega \varkappa \mu \cdot 10^{-8}}{2}}$$

ein Maß der Phasenverzögerung des Innenfeldes gegen das Randfeld. Eine noch anschaulichere Deutung des Ausdruckes $\Re e(k)$ erhält man durch Betrachtung des gesamten reellen Postens

$$\omega t \pm \Re e(k) \cdot x = \Re e(k)\left[\frac{\omega}{\Re e(k)} \cdot t \pm x\right],$$

wo ersichtlich

$$c = \frac{\omega}{\Re e(k)} = \frac{\omega}{a_1 \cdot \sqrt{\frac{\omega \varkappa \mu \cdot 10^{-8}}{2}}} \tag{21}$$

die Geschwindigkeit der Welle mißt.

Führen wir statt der Geschwindigkeit die Wellenlänge λ ein mittels

$$\lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} = c,$$

so kommt



$$\lambda = \frac{2\pi}{a_1 \sqrt{\frac{\omega \varkappa \mu \cdot 10^{-8}}{2}}}. \tag{21a}$$

Der imaginäre Anteil

$$\delta = \mathfrak{I}_m(k) = \mp a_2 \sqrt{\frac{\omega \varkappa \mu \cdot 10^{-8}}{2}} \tag{22}$$

bestimmt die Stärke der räumlichen Abdämpfung.

Indem wir uns erinnern, daß $\sqrt{\frac{\omega \varkappa \mu \cdot 10^{-8}}{2}}$ lediglich die Wirbelstromkonstanten enthält, gewinnen die Hysteresekoeffizienten a_1 und a_2 in (21) und (22) eine einfache physikalische Bedeutung: Der starke Abfall von a_1 (Bild 2) zeigt an, daß die Hystereseerscheinung das Eindringen der Wellen beschleunigt und die Wellenlänge vergrößert; der Anstieg von a_2 sagt aus, daß gleichzeitig die Dämpfung vermehrt wird.

Für $\psi_a = \frac{\pi}{2}$ ergeben unsere Formeln eine unendlich große Wellengeschwindigkeit. Diese scheinbare Unstimmigkeit mit sonst üblichen physikalischen Vorstellungen findet ihre Erklärung darin, daß wir zu Beginn der Rechnung den Verschiebungsstrom gestrichen haben, was bei Beschränkung auf den stationären Zustand zulässig ist. Wollten wir das Eindringen des Wellenkopfes in das Eisen verfolgen, so wäre die Berücksichtigung des Verschiebungsstromes unerläßlich. Ansatz und Ausführung dieser Rechnung scheitern aber daran, daß die Dielektrizitätskonstante des Eisens nicht bekannt ist.

5. Der Energiestrom.

Das Ziel unserer Rechnung ist die Ermittlung der Verluste, welche durch den elektromagnetischen Energiestrom von außen her in das Eisen hineingetragen werden.

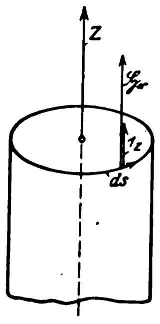


Bild 5. Zur Berechnung des Energiestromes.

Wir schicken eine allgemeine Betrachtung voraus. Bild 5 zeigt ein zylindrisches Eisenstück, dessen Achse mit der z-Achse eines rechtsachsigen Koordinatensystems zusammenfalle. Die Randfeldstärke sei nach Größe und Richtung konstant und variiere zeitlich einfach harmonisch

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_{r\,max} \cdot \cos(\omega t + \varphi). \tag{23}$$

Der gesamte Induktionsfluß Φ möge ebenfalls einfach harmonisch pulsieren

$$\Phi = \Phi_{max} \cdot \cos(\omega t). \tag{24}$$

Wir wollen Φ zu $\mathfrak{H}_r$ in Beziehung setzen mittels

$$\mathfrak{H}_r = \Phi_{max}(U \cdot \cos \omega t - V \sin \omega t) \cdot 10^{+8}. \tag{23a}$$

Die Dichte der Energieeinströmung in das Eisenstück ist nach Poynting gegeben durch

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]. \tag{25}$$

Die Einströmung in eine Scheibe von 1 cm Länge des Eisenstückes ergibt sich durch Integration längs des Umfanges

$$N/\mathrm{cm} = \int [\mathfrak{E}_r \mathfrak{H}_r] \cdot [d\mathfrak{s} \cdot 1_z], \tag{26}$$

wo $d\mathfrak{s}$ nach Bild 5 ein Element der Berandungskurve eines Querschnittes bedeutet und 1_z einen Einheitsvektor parallel der z-Achse.

Zur Auswertung des Vektorproduktes ist zu bedenken, daß die Wirbelströmung in Ebenen $z =$ konst. verläuft; daher stehen $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{H}_r$ senkrecht aufeinander und der Vektor $\mathfrak{S}$ bildet mit dem Vektor $[d\mathfrak{s} \cdot 1_z]$ den gleichen Winkel wie die Vektoren $\mathfrak{E}_r$ und $d\mathfrak{s}$. Wegen der Voraussetzung $\mathfrak{H}_r =$ konst. kann weiter $\mathfrak{H}_r$ vor das Integral gezogen werden, so daß

$$N/cm = \mathfrak{H}_r \cdot \int \mathfrak{E}_r \cdot d\mathfrak{s} = \mathfrak{H}_r \cdot E_u. \tag{26a}$$

entsteht, wo

$$E_u = \int \mathfrak{E}_r \, d\mathfrak{s} \tag{27}$$

die Umlaufsspannung längs des Eisenzylinders ist.

Die hier durchgeführte Rechnung gilt ohne Rücksicht auf die besondere Art der Felderregung; es ist jedoch leicht, unter Bezugnahme auf die übliche Erregungsart mittels Spulen das Ergebnis (26a) zu bestätigen. Man hat hierzu nur $\mathfrak{H}_r$ mittels des Durchflutungsgesetzes in Beziehung zum magnetisierenden Strom, Φ mittels des Induktionsgesetzes in Beziehung zur Spannung zu setzen.

Wir berechnen aus (24) die Umlaufsspannung durch Anwendung des zweiten Maxwellschen Satzes

$$E_u = -\frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} = + \Phi_{max} \cdot \omega \cdot \sin \omega t \cdot 10^{-8}. \tag{24a}$$

Durch Kombination von (23a) mit (24a) ergibt sich die Energieeinströmung

$$N/cm = \Phi_{max}^2 \cdot \omega \, (U \sin \omega t \cos \omega t - V \sin^2 \omega t). \tag{28}$$

Wird statt der Kreisfrequenz die Frequenz f mittels $\omega = 2\pi f$ eingeführt, so kommt

$$N/cm = \Phi_{max}^2 \cdot 2\pi f \, (U \sin \omega t \cos \omega t - V \sin^2 \omega t). \tag{28a}$$

Die Energieeinströmung erscheint in zwei Anteile zerlegt, deren erster

$$N_s/cm = \Phi_{max}^2 \cdot 2\pi f U \cdot \frac{\sin 2\omega t}{2} \tag{29}$$

mit der doppelten Kreisfrequenz um Null pulsiert, während der zweite

$$N_\omega/cm = - \Phi_{max}^2 \cdot 2\pi f \cdot \mathfrak{B} \sin^2 \omega t \tag{29}$$

um den Mittelwert

$$\bar{N}_\omega/cm = - \Phi_{max}^2 \cdot 2\pi f \cdot \mathfrak{B} \cdot \frac{1}{2} \tag{29a}$$

schwankt. Bekanntlich ist N_s/cm ein Maß der Blindleistung, welche die reversiblen magnetischen Energieänderungen bewirkt, während $\bar{N}_\omega/cm$ als Wirkleistung das Äquivalent der Verluste in das Eisen hineinträgt. Indem wir uns hier auf den Wirkanteil beschränken, erkennen wir in

$$\bar{N}_\omega/cm/f = - \Phi_{max}^2 \cdot \pi \cdot \mathfrak{B} \tag{30}$$

den Verlust pro Periode. Das negative Vorzeichen rührt von der Vorzeichenwahl des Poyntingschen Vektors her und ist für das Ergebnis belanglos.

Es ist zweckmäßig, die Blechdimensionen dadurch zu eliminieren, daß statt des Induktionsflusses die mittlere räumliche Induktionsamplitude eingeführt wird. Mit dem Eisenblechquerschnitt $q = b \cdot h$ folgt zunächst

$$\mathfrak{B}_{mitt} = \frac{\Phi_{max}}{q} = \frac{\Phi_{max}}{b \cdot h}. \tag{31}$$

Indem Gleichung (30) beiderseitig mit q dividiert wird, beziehen wir auch den Verlust auf die Volumeinheit; er heiße w. An Stelle von w benutzen wir zur Darstellung des Verlustes die Größe $v = \frac{w}{\mathfrak{B}_{mitt}^2}$, welche die Verlustziffer heiße:

$$w = \frac{\bar{N}/cm/f}{q} = -\frac{\Phi_{max}^2}{q^2} \cdot q \cdot \pi \cdot \mathfrak{B} = -\mathfrak{B}_{mitt}^2 \cdot [q \cdot \pi \cdot \mathfrak{B}] = -\mathfrak{B}^2_{mitt} \cdot v. \tag{32}$$

Wir gehen nun dazu über, die geschilderte Rechnung für den Sonderfall des Eisenbleches durchzuführen.

Zunächst ist der Induktionsfluß zu bestimmen. Durch Integration über den Blechquerschnitt wird in komplexer Form



$$\overline{\Phi} = \overline{\mu} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \overline{\mathfrak{H}} \cdot dx \cdot \mathfrak{b}$$

und durch Einsetzen von (17a) und (9)

$$\overline{\Phi} = \mu \cdot e^{-j\psi_a} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{H}}_r}{\cos k \frac{h}{2}} \cdot \frac{\sin k \cdot \frac{h}{2}}{\frac{k}{2}} \mathfrak{b} = \mu \cdot \mathfrak{b} \cdot h \cdot \overline{\mathfrak{H}}_r \frac{\operatorname{tg} k \frac{h}{2}}{k \frac{h}{2}} e^{-j\psi_a}. \tag{33}$$

Die Auflösung nach $\overline{\mathfrak{H}}_r$ ergibt

$$\overline{\mathfrak{H}}_r = \frac{\overline{\Phi}}{\mu \cdot b h} \cdot k \cdot \frac{h}{2} \cdot e^{+j\psi_a} \operatorname{cotg} k \cdot \frac{h}{2}. \tag{33 a}$$

Mit Rücksicht auf (13b), (13c), (14) und (19) ist

$$k \cdot \frac{h}{2} e^{j\psi_a} \operatorname{cotg} k \cdot \frac{h}{2} = (1 - j) e^{\frac{j\psi_a}{2}} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \operatorname{cotg} [a_1 - j a_2] \frac{\xi}{2} =$$

$$= \left(\cos \frac{\psi_a}{2} + \sin \frac{\psi_a}{2}\right) \frac{\xi}{2} \operatorname{cotg} [a_1 - j a_2] \frac{\xi}{2} - j \left(\cos \frac{\psi_a}{2} - \sin \frac{\psi_a}{2}\right) \frac{\xi}{2} \operatorname{cotg} [a_1 - j a_2] \frac{\xi}{2} =$$

$$= [a_2 - j a_1] \frac{\xi}{2} \cdot \operatorname{cotg} [a_1 - j a_2] \frac{\xi}{2}.$$

Die komplexe Kotangensfunktion läßt sich in Real- und Imaginärteil aufspalten[1]) und liefert in (33a) eingesetzt

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{H}}_r &= \frac{\overline{\Phi}}{\mu \cdot b \cdot h} \cdot [a_2 - j a_1] \frac{\xi}{2} \operatorname{cotg} [a_1 - j a_2] \frac{\xi}{2} \\ &= \frac{\overline{\Phi}}{\mu \cdot b \cdot h} \cdot [a_2 - j a_1] \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\sin a_1 \xi + j \operatorname{Sin} a_2 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi} \\ = \frac{\overline{\Phi}}{\mu \cdot b \cdot h} \cdot &\left[\frac{\xi}{2} \cdot \frac{a_2 \sin a_1 \xi + a_1 \operatorname{Sin} a_2 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi} - j \frac{\xi}{2} \cdot \frac{a_1 \sin a_1 \xi - a_2 \operatorname{Sin} a_2 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi} \right] \end{aligned}\right\} \tag{33 b}$$

Gehen wir zur reellen Form über, indem $\Phi = \Re e (\overline{\Phi}) = \Re e (\Phi_{max} e^{j\omega t})$ eingesetzt wird, so kommt endlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}_r = \Re e (\overline{\mathfrak{H}}_r) = \frac{\Phi_{max}}{\mu \cdot b \cdot h} \cdot \\ \cdot \left[\frac{\xi}{2} \frac{a_2 \sin a_1 \xi + a_1 \operatorname{Sin} a_2 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi} \cdot \cos \omega t - \frac{\xi}{2} \frac{a_2 \operatorname{Sin} a_2 \xi - a_1 \sin a_1 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi} \cdot \sin \omega t \right]. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Durch Vergleich mit (23a) finden wir

$$10^8 \cdot V = \frac{1}{\mu \cdot b \cdot h} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{a_2 \cdot \operatorname{Sin} a_2 \xi - a_1 \sin a_1 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi} \tag{36}$$

und demnach

$$V = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{a_2 \cdot \operatorname{Sin} a_2 \xi - a_1 \sin a_1 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi} \cdot 10^{-8}. \tag{36a}$$

Besonders interessiert die Abhängigkeit der Verlustziffer von der reduzierten Blechbreite.

Für sehr kleine Werte von ξ gelten die Nährungswerte

$$a_2 \operatorname{Sin} a_2 \xi - a_1 \sin a_1 \xi = \sim [a_2^2 - a_1^2] \xi$$

$$\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi = \sim [a_2^2 + a_1^2] \frac{\xi^2}{2!},$$

---

[1]) Jahnke-Emde, a. a. O.

so daß

$$\lim_{\xi \to 0} V = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{1}{2} \frac{a_2^2 - a_1^2}{[a_2^2 + a_1^2] \frac{1}{2!}} \cdot 10^{-8} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin \psi_a \cdot 10^{-8} \tag{37}$$

kommt, wo (14) berücksichtigt ist.

Der gewonnene Ausdruck besitzt eine außerordentlich einfache physikalische Bedeutung. Durch Multiplikation mit $\mathfrak{B}_{max}^2$ wird der Verlust pro Volumeinheit erhalten

$$w\, 10^{-8} = \mathfrak{B}_{mitt}^2 \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin \psi_a \cdot 10^{-8} = \mathfrak{B}_{mitt}\, \mathfrak{H}_{max} \cdot \pi \cdot \sin \psi_a \cdot 10^{-8},$$

worin wir den Inhalt der Hystereseschleife wieder erkennen. Für äußerst geringe reduzierte Blechbreiten ist also der sogenannte „Hystereseverlust" vorherrschend. Wesentlich für die Bedeutung dieses Ergebnisses ist der Umstand, daß geringe reduzierte Blechbreite vorausgesetzt wird; die Höhe der Frequenz an sich spielt daher keine entscheidende Rolle, wenngleich eine Ummagnetisierung mit sehr langsamen Wechselströmen als Sonderfall der Gleichung (37) entspringt.

Nimmt umgekehrt ξ erhebliche Werte an, so sind schließlich die trigonometrischen Funktionen gegen die Hyperbelfunktionen zu streichen und wir erhalten

$$\lim_{\xi \to \infty} V = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{1}{2} \xi \cdot a_2 \cdot \mathfrak{Tg}\, a_2 \xi \cdot 10^{-8} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot a_2 \cdot 10^{-8}. \tag{38}$$

Dieser Fall ist verwirklicht für abnormal starke Bleche oder für hohe Frequenzen. Insbesondere bestimmt also Gleichung (38) die Eisenverluste in den Blechen von Hochfrequenzmaschinen. In die Verlustformel gehen Hysteresekonstante und Wirbelstromkonstante simultan ein; eine direkte Trennung der Verlustkomponenten ist nicht mehr möglich.

6. Trennung der Verluste.

Die Wirbelstromverluste sind definiert als die Joulesche Wärme, die von den Leitungsströmen im Eisen erzeugt wird. Wir beziehen ihre Größe zweckmäßig ebenso wie die Gesamtverluste auf einen Blechabschnitt von 1 cm axialer Länge mittels

$$\overline{N}_{wirb}/cm = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{|i|^2_{max}}{\varkappa}\, dx \cdot b, \tag{39}$$

so daß die Hystereseverluste nach dem Energieprinzip die Größe

$$N_{hyst}/cm = N/cm - N_{wirb}/cm \tag{40}$$

besitzen. Nach (10b) gilt

$$i = \frac{d\mathfrak{H}}{dx}, \tag{41}$$

also mit Rücksicht auf (17a)

$$i = -\frac{\mathfrak{H}_r}{\cos k \cdot \frac{h}{2}} \cdot k \cdot \sin k x. \tag{41a}$$

Wir ersetzen $\mathfrak{H}_r$ durch Φ nach Gleichung (33a) und erhalten in kompelxer Schreibweise

$$\left.\begin{aligned}\bar{i} &= \frac{\bar{\Phi}}{\mu\cdot b\cdot h}\cdot k\cdot\frac{h}{2}\,e^{j\psi_n}\cdot\operatorname{cotg} k\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\cos k\cdot\frac{h}{2}}\cdot k\cdot\sin k x = \\ &= \frac{\bar{\Phi}}{\mu\cdot b\cdot h}\cdot\frac{k^2\cdot h}{2}\cdot e^{j\psi_n}\cdot\frac{\sin k x}{\sin k\frac{h}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{41 b}$$

oder mit Einführung von (13c) und (19)

$$\bar{i} = \frac{\bar{\Phi}}{\mu\cdot b\cdot h}\cdot\frac{k^2\cdot h}{2}\cdot e^{j\psi_n}\cdot\frac{\sin\left[a_1 - j\,a_2\right]\xi\cdot\frac{x}{h}}{\sin\left[a_1 - j\,a_2\right]\frac{\xi}{2}}. \tag{41 c}$$

Durch Aufspaltung im Betrag und Phasenwinkel gewinnen wir die Amplitude des Stromes

$$i_{max} = \frac{\Phi_{max}}{\mu\cdot b\cdot h}\cdot\frac{|k^2|\cdot h}{2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathfrak{Cof}\, a_2\xi\cdot\frac{2x}{h} - \cos a_1\xi\frac{2x}{h}\right]}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathfrak{Cof}\, a_2\xi - \cos a_1\xi\right]}}. \tag{42}$$

Hiermit geht der Ausdruck (39) der Wirbelstromverluste in

$$\left.\begin{aligned}N_{wirb}/cm &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_{max}^2}{\mu^2\cdot b^2\cdot h^2}\cdot\frac{|k^2|^2\cdot h^2 b}{2}\cdot\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Cof}\, a_2\xi - \cos a_1\xi} \\ &\times\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left[\mathfrak{Cof}\, a_2\xi\frac{2x}{h} - \cos a_1\xi\frac{2x}{h}\right]dx\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

über. Die Auswertung des Integrales ergibt

$$N_{wirb}/cm = \frac{1}{2}\,\frac{\Phi_{max}^2}{\mu^2\cdot b^2\cdot h^2}\cdot\frac{|k^2|^2\cdot h^2 b}{2}\cdot\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{h}{2\xi}\;\frac{\frac{1}{a_2}\,\mathfrak{Sin}\, a_2\xi - \frac{1}{a_1}\sin a_1\xi}{\mathfrak{Cof}\, a_2\xi - \cos a_1\xi} \tag{44}$$

oder, da $|k^2|\,h^2 = 2\,\xi^2$

$$N_{wirb}/cm = \frac{1}{2}\,\frac{\Phi_{max}^2}{\mu\cdot b\cdot h}\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{|k^2|\cdot\xi}{2}\;\frac{\frac{1}{a_2}\,\mathfrak{Sin}\, a_2\xi - \frac{1}{a_1}\sin a_1\xi}{\mathfrak{Cof}\, a_2\xi - \cos a_1\xi}. \tag{45}$$

Die Verluste pro Periode entstehen nach Division mit $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

$$N_{wirb}/cm/f = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_{max}^2}{\mu\cdot b\cdot h}\cdot\frac{2\cdot\pi}{\mu\cdot\varkappa\cdot\omega}\cdot\frac{|k^2|\cdot\xi}{2}\;\frac{\frac{1}{a_2}\cdot\mathfrak{Sin}\, a_2\xi - \frac{1}{a_1}\sin a_1\xi}{\mathfrak{Cof}\, a_2\xi - \cos a_1\xi}, \tag{46}$$

also mit Rücksicht auf (13)

$$N_{wirb}/cm/f = \frac{\Phi_{max}^2}{\mu\cdot b\cdot h}\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{2}\cdot\frac{\frac{1}{a_2}\,\mathfrak{Sin}\, a_2\xi - \frac{1}{a_1}\sin a_1\xi}{\mathfrak{Cof}\, a_2\xi - \cos a_1\xi}\cdot 10^{-8}. \tag{46 a}$$

Indem wir hier auf mittlere räumliche Induktion $\mathfrak{B}_{mitt}$ reduzieren, kommt

$$N_{wirb}/cm/ = f\,\frac{\mathfrak{B}_{mitt}^2}{\mu\cdot b\cdot h}\cdot b\cdot h\cdot\pi\cdot\frac{\xi}{2}\cdot\frac{\frac{1}{a_2}\,\mathfrak{Sin}\, a_2\xi - \frac{1}{a_1}\sin a_1\xi}{\mathfrak{Cof}\, a_2\xi - \cos a_1\xi}\cdot 10^{-8}. \tag{47}$$

Wir definieren analog (32) die Wirbelstromverlustziffer

$$V_{wirb} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{a_2} \operatorname{Sin} a_2 \xi - \frac{1}{a_1} \sin a_1 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi}. \tag{48}$$

Der Aufbau dieser Formel besitzt eine bemerkenswerte Analogie zur Gesamtverlustziffer (36a).

Wir berechnen schließlich aus (40) die Hystereseverluste und beschränken uns sogleich auf die Ermittlung der Verlustziffer

$$V_{hyst} = V - V_{wirb}. \tag{40a}$$

Die Ausrechnung ergibt

$$V_{hyst} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\left[a_2 - \frac{1}{a_2}\right] \operatorname{Sin} a_2 \xi - \left[a_1 - \frac{1}{a_1}\right] \sin a_1 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi}. \tag{49}$$

Nun ist nach (14)

$$\left.\begin{aligned} a_2 - \frac{1}{a_2} &= \frac{a_2^2 - 1}{a_2} = \frac{\sin \psi_a}{a_2} \\ a_1 - \frac{1}{a_1} &= \frac{a_1^2 - 1}{a_1} = -\frac{\sin \psi_a}{a_1} \end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

so daß

$$V_{hyst} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin \psi_a \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{a_2} \operatorname{Sin} a_2 \xi + \frac{1}{a_1} \sin a_1 \xi}{\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi} \tag{50}$$

kommt.

In den Formeln (48) und (50) ist die Trennung der Verluste durchgeführt. Wir prüfen die Ergebnisse durch Ermittlung der Grenzwerte für sehr kleine reduzierte Blechbreiten.

Zunächst erhalten wir aus (48)

$$\lim_{\xi \to 0} V_{wirb} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\xi (1 - 1)}{\frac{\xi}{2!} (a_2^2 + a_1^2)} = 0 \tag{51}$$

und aus (50)

$$\lim_{\xi \to 0} V_{hyst} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin \psi_a \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\xi (1 + 1)}{\frac{\xi}{2!} (a_2^2 + a_1^2)} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin \psi_a. \tag{52}$$

Brechen wir die Reihenentwicklung der trigonometrischen Funktionen erst mit dem Gliede dritter Ordnung ab, so wird

$$\frac{1}{a_2} \cdot \operatorname{Sin} a_2 \xi - \frac{1}{a_1} \sin a_1 \xi = a_2^2 \frac{\xi^3}{3!} + a_1^2 \cdot \frac{\xi^3}{3!}$$

$$\frac{1}{a_2} \operatorname{Sin} a_2 \xi + \frac{1}{a_1} \sin a_1 \xi = \xi + a_2^2 \cdot \frac{\xi^3}{3!} + \xi - a_1^2 \frac{\xi^3}{3!}$$

$$\operatorname{Cof} a_2 \xi - \cos a_1 \xi = \frac{a_2^2 \xi^2}{2!} + \frac{a_1^2 \xi^2}{2!}$$

und folglich

$$V_{wirb} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{a_2^2 \frac{\xi^3}{3!} + a_1^2 \frac{\xi^3}{3!}}{\frac{a_2^2 \xi^2}{2!} + \frac{a_1^2 \xi^2}{2!}} = \frac{\pi}{\mu} \frac{\xi^2}{6}. \tag{53}$$

$$V_{hyst} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin\psi_a \cdot \frac{\xi}{2} \left[\frac{\xi + \xi}{\frac{a_2^2 \xi^2}{2!} + \frac{a_1^2 \xi^2}{2!}} + \frac{a_2^2 \frac{\xi^3}{3!} - a_1^2 \frac{\xi^3}{3!}}{\frac{a_2^2 \xi^2}{2!} + \frac{a_1^2 \xi^2}{2!}} \right] = \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin\psi_a \cdot \left[1 + \frac{\xi^2}{6} \cdot \sin\psi_a \right]. \quad (54)$$

Erinnern wir uns, daß nach (13) das Quadrat der reduzierten Blechbreite für ein gegebenes Eisenblech ein Maß der Frequenz ist, so folgt aus (53) und (54): Für hinreichend kleine Frequenzen wachsen die Wirbelstromverluste proportional der Frequenz an; die Hystereseverluste bestehen aus einem konstanten und einem ebenfalls der Frequenz proportionalen Anteil.

Sowohl die Wirbelstrom- wie die Hystereseverlustziffer ergeben demnach, in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen, je eine gerade Linie (Bild 6). Die Neigungswinkel stehen in der Beziehung

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{hyst}}{\operatorname{tg} \alpha_{wirb}} = \frac{\sin^2 \psi_a}{1}. \quad (55)$$

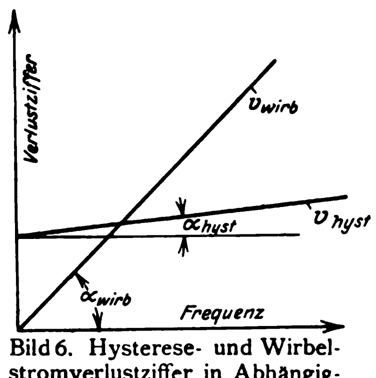


Bild 6. Hysterese- und Wirbelstromverlustziffer in Abhängigkeit von der Frequenz.

Für nicht extrem stark hysteresebehaftetes Material ist also der Anstieg der Hystereseverlustkurve in der Umgebung von $\xi = 0$ außerordentlich klein gegenüber dem Anstieg der Wirbelstromverlustkurve.

Ist endlich die reduzierte Blechbreite extrem groß, so gelten die asymptotischen Ausdrücke

$$\lim_{\xi \to \infty} V_{wirb} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{1}{a_2}$$

$$\lim_{\xi \to \infty} V_{hyst} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin\psi_a \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{1}{a_2}.$$

Hier wachsen beide Verluste proportional mit der reduzierten Blechbreite an und stehen in dem konstanten Verhältnis

$$\frac{V_{hyst}}{V_{wirb}} = \frac{\sin\psi_a}{1}. \quad (56)$$

7. Zahlenbeispiel.

Die Folgerungen der entwickelten Formeln sollen an Hand eines Zahlenbeispiels aufgedeckt werden.

Wir legen ein Eisenmaterial zugrunde, dessen Leitfähigkeit den Wert

$$\varkappa = 5 \cdot 10^4 \text{ Siemens/cm}^3$$

besitzt. Die räumlich gemittelte Induktion betrage

$$\mathfrak{B}_{mitt} = 10\,000 \text{ Maxwell/cm}^2,$$

die zugehörige komplexe Permeabilität

$$\bar{\mu} = 4000\, e^{-j\, 5^0 40'} \text{ Maxwell} \cdot \text{cm/Amp},$$

also

$$\mu = 4000 \text{ Maxwell} \cdot \text{cm/Amp}; \qquad \psi_a = 5^0 40'; \qquad \sin\psi_a = 0{,}09874.$$

Hieraus ergeben sich nach Bild 2 die Hysteresekoeffizienten

$$a_1 = \cos 2^0 50' - \sin 2^0 50' = 0{,}9493,$$
$$a_2 = \cos 2^0 50' + \sin 2^0 50' = 1{,}0483.$$

Die Blechbreite möge zu

$$h = 0{,}035 \text{ cm}$$

vorausgesetzt werden.



Wir erhalten somit die Verlustziffern nach den Formeln (36a), (48), (50)

$$V = \frac{\pi}{4000} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{1{,}0483\,\mathfrak{Sin}\,1{,}0483\,\xi - 0{,}9493\,\sin 0{,}9493\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,1{,}0483\,\xi - \cos 0{,}9493\,\xi} \cdot 10^{-8},$$

$$V_{wirb} = \frac{\pi}{4000} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{1{,}0483}\,\mathfrak{Sin}\,1{,}0483\,\xi - \frac{1}{0{,}9493}\,\sin 0{,}9493\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,1{,}0483\,\xi - \cos 0{,}9493\,\xi} \cdot 10^{-8},$$

$$V_{hyst} = \frac{\pi}{4000} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{1{,}0483}\,\mathfrak{Sin}\,1{,}0483\,\xi + \frac{1}{0{,}9493}\,\sin 0{,}9493\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,1{,}0483\,\xi - \cos 0{,}9493\,\xi} \cdot 0{,}09874 \cdot 10^{-8},$$

während sich die reduzierte Blechbreite nach (19) zu

$$\xi = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 10^4 \cdot 4000 \cdot 10^{-8}}{2}} \cdot 0{,}035 = \sqrt{\omega} \cdot 0{,}035$$

berechnet.

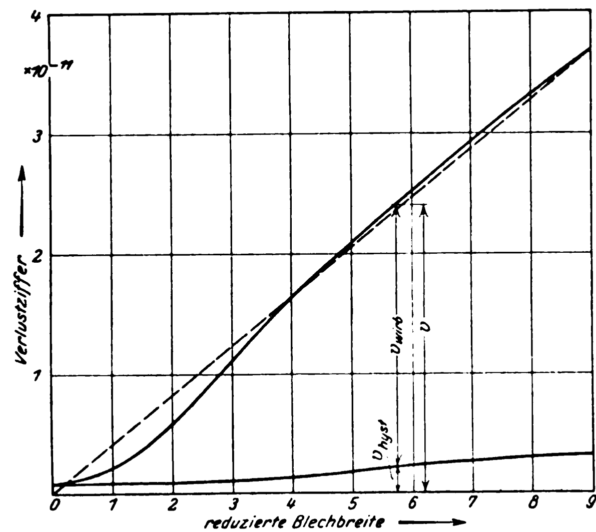


Bild 7. Abhängigkeit der Verlustziffer von der reduzierten Blechbreite.

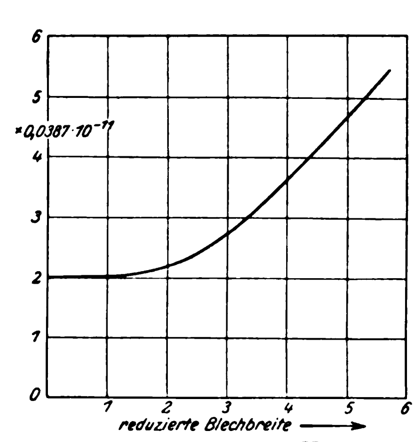


Bild 8. Abhängigkeit der Hystereseverlustziffer von der reduzierten Blechbreite.

Das Ergebnis der Rechnung ist in Abhängigkeit von der reduzierten Blechbreite in Bild 7 dargestellt.

Die Gesamtverlustziffer steigt von dem endlichen Anfangswert, welche den Hystereseverlusten bei statischer Ummagnetisierung gleichkommt, stetig an. Die Kurve oszilliert für hohe reduzierte Blechstärken um die Asymptote

$$V = \frac{\pi}{4000} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot 1{,}0483 \cdot 10^{-8}.$$

In dieser Kurveneigentümlichkeit spiegelt sich der Einfluß der trigonometrischen Funktionen wieder, da die Hyperbelfunktionen monoton ansteigen. Ihre Extremalwerte sind allein abhängig von dem Produkte $a_1 \xi$ mittels

$$a_1 \xi = k \frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Um die Bedeutung dieser Beziehung zu erkennen, ersetzen wir ξ durch (19) und a_1 nach (21a) durch die Wellenlänge λ und erhalten

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot h = k \frac{\pi}{2}$$

oder

$$h = k \cdot \frac{\lambda}{4}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{57}$$

Das Auftreten der Oszillationen in der Verlustkurve ist hiernach als Resonanzerscheinung zu deuten, indem die Blechbreite ein ganzzahliges Vielfaches der Viertelwellenlänge wird.

Neben der Zunahme der Gesamtverluste interessiert vornehmlich die Abhängigkeit der Hystereseverluste von der reduzierten Blechbreite. Bild 8, welches in größerem Maßstabe gezeichnet ist, gibt über die Abhängigkeit der Hystereseverlustziffer bei kleinen und mäßigen Blechbreiten Auskunft. Bemerkenswert ist der scharfe Anstieg der Kurve für reduzierte Blechbreiten $\xi > 2$, während in dem Bereich $0 \leq \xi \leq 2$ die Verlustziffer fast konstant ist.

Die Übertragung dieser Ergebnisse auf die Frequenzabhängigkeit der Verlustziffern erfordert die zusätzliche Annahme, daß der Winkel ψ_a unabhängig von der Frequenz ist. Inwieweit diese Annahme mit den wirklich durchlaufenen Hystereseschleifen vereinbar ist, kann nur an Hand experimentellen Materials entschieden werden. In Bild 9 ist die Abhängigkeit der Verlustziffern von der Frequenz für

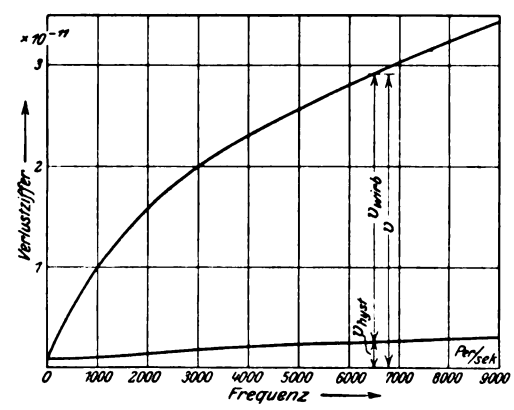


Bild 9. Abhängigkeit der Verlustziffer von der Frequenz.

konstantes ψ_a dargestellt; unsere Formeln bieten indessen die Möglichkeit, eine etwaige Änderung des Hysteresewinkels mit der Frequenz gesetzmäßig zu erfassen. Die mitgeteilten Kurven bedürfen keiner Diskussion, sie stimmen mit den wohlbekannten Verlustkurven für Eisenbleche überein.

8. Vergleich mit bisherigen Berechnungen des Eisenverlustes.

Die bisherigen Methoden der Verlustberechnung bestimmen Wirbelstromanteil und Hystereseanteil unabhängig voneinander.

Die Hystereseverluste werden als konstant im ganzen Frequenzbereich betrachtet. In unserer Bezeichnungsweise wird demnach die Hystereseverlustziffer durch Gleichung (52) bestimmt.

$$\bar{V}_{hyst} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \sin \psi_a. \tag{58}$$

Die Wirbelstromverluste unter Vernachlässigung der Hysterese finden sich aus Gleichung (48), indem $a_1 = a_2 = 1$ gesetzt wird, zu

$$V_{wirb} = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, \xi - \sin \xi}{\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \xi}. \tag{59}$$

Quantitativ rechnet also die bisherige Theorie die Hystereseverluste zu niedrig, die Wirbelstromverluste zu hoch. Es ist zu erwarten, daß im Gesamtverlust die Fehler einander teilweise aufheben. Für $\xi = 0$ ist dies naturgemäß exakt

richtig. Aber auch für mäßige reduzierte Blechbreiten ($\xi < 2$) ist die quantitative Übereinstimmung zwischen alter und neuer Rechenweise sehr weitgehend.

Dagegen ergeben sich für große reduzierte Blechbreiten quantitativ merkliche Unterschiede. Wir ersetzen die Größe dieser Unterschiede zweckmäßig an den asymptotischen Ausdrücken der Verlustziffer. Hier liefern (58) und (59)

$$\lim_{\xi \to \infty} \bar{V} = \frac{\pi}{\mu} \left[\sin \psi_a + \frac{\xi}{2} \right], \tag{60}$$

während die strenge Formel (38) den Wert

$$\lim_{\xi \to \infty} V = \frac{\pi}{\mu} \left[(a_2 - 1) \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} \right] \tag{61}$$

ergibt.

Gleichheit beider Werte tritt für

$$(a_2 - 1) \frac{\xi}{2} = \sin \psi_a$$

oder

$$\xi = 2 \frac{\sin \psi_a}{a_2 - 1} = \sim 2 \cdot 2 = 4$$

ein, da $a_2 - 1 = \sim \sin \frac{\psi_a}{2} = \sim \frac{1}{2} \sin \psi_a$ für kleine Winkel ψ_a gilt. Oberhalb dieses Grenzwertes liefert also die bisherige Rechenweise zu niedrige Verlustziffern. Insbesondere ist bei Hochfrequenz die neue Formel vorzuziehen.

9. Zusammenfassung.

Die Wirbelströmung in hysteresebehaftetem Eisen wird durch die Hystereseerscheinung beeinflußt, was eine simultane Berechnung des Wirbelstromfeldes und des Hysteresevorganges erfordert. Als Ersatz einer quasistationären Hystereseschleife wird der Rechnung eine Ellipse zugrunde gelegt. Sie findet ihren exakten Ausdruck in dem Begriff der komplexen Permeabilität; diese vermittelt nicht nur die quasistationäre Beziehung zwischen Feldstärke und Induktion, sondern leistet darüber hinaus die Darstellung von Schaltvorgängen, bei welchen die Ellipse in eine elliptische Spirale deformiert wird.

Die Feldgleichungen des hysteresebehafteten Eisens führen auf eine partielle Differentialgleichung vom Typ der Wärmeleitungsgleichung, deren Integration für das eindimensionale Problem (Eisenblech) leicht gelingt. Das Feld entsteht durch zwei vom Rande eindringende magnetische Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit und räumliche Dämpfung gegenüber hysteresefreiem Material sonst gleicher Konstitution vergrößert sind. Der Energiestrom, welcher von den eindringenden Wellen zusammen mit dem rings das Blech umgebenden elektrischen Felde getrieben wird, trägt das Äquivalent der Feldenergieänderungen und der sekundlichen Wärmeentwickelung in das Blech hinein. Der Mittelwert des Energiestromes im quasistationären Zustand ist ein Maß des Leistungsverlustes, für dessen Größe eine einfache Formel angegeben wird.

Die Berechnung der Stromwärme mittels des Jouleschen Gesetzes gestattet die Aufspaltung der von außen herangeführten Leistung in Wirbelstromleistung und Hystereseleistung, welche je für sich ebenfalls einfachen Gesetzmäßigkeiten gehorchen. Verlustberechnung und Trennung der Verluste werden für ein Zahlenbeispiel durchgeführt. Gewisse Eigentümlichkeiten des Kurvenverlaufes finden ihre Erklärung in einem schwach ausgeprägten Resonanzphänomen.

Die quantitativen Ergebnisse der neuen Theorie führen erst bei großen, reduzierten Blechbreiten zu Unterschieden gegenüber der bisherigen getrennten Rechenweise von Hysterese- und Wirbelstromverlusten. Bei Hochfrequenz insbesondere ergibt die entwickelte Theorie der simultanen Verlustbestimmung merklich höhere Werte.



Anwendung der Sätze von Hooke, Maxwell, Castigliano und Clapeyron auf Systeme elektrischer Leiter, elektrische Systeme.

Von

Dr.-Ing. **M. Kaufmann**, Zug (Schweiz).

Die folgenden Ausführungen bilden einen Auszug aus der gleichnamigen Schrift, welche als Dissertation bei der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, eingereicht wurde. In diesem Auszuge ist von mathematischen Ableitungen so weit als möglich abgesehen, und nur das für die Anwendung der Theorie Wichtige wiedergegeben, in der Meinung, daß im vorliegenden Falle weniger die theoretischen Untersuchungen, als die praktischen Anwendungen von allgemeinem Interesse sind. Die Anregung zu den Untersuchungen über die Analogien der elektrischen und der elastischen Systeme ergab sich aus der Schrift von Dr. Fr. Natalis: Die Berechnung von Gleich- und Wechselstromsystemen. In dieser Schrift sind auch die Grundlagen der im folgenden verwerteten Rechnungsverfahren gegeben.

Einleitung.

Die bekannten linearen Gesetze des Spannungsabfalls in Funktion des Stromes in Leitern und die Gültigkeit des Superpositionsprinzipes bei elektrischen Systemen weisen auf die Möglichkeit hin, daß eine Funktion zweiten Grades der Spannungen und der Ströme gefunden werden könne, welche für die Berechnung der elektrischen Netze eine ähnliche Rolle spiele wie die Deformationsarbeit bei der Berechnung elastischer Systeme.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf stationäre Sinuswechsel-Spannungen bzw. Sinuswechsel-Ströme und deren Grenzfall die Gleichspannung bzw. den Gleichstrom. Für derartige Untersuchungen verwendet man mit Vorteil die allgemein bekannte Vektorrechnung und die von Dr. Fr. Natalis eingeführte Rechnungsmethode mit Vektorverhältnissen und Vektorprodukten. Da die beiden letzterwähnten Begriffe und die Rechnung mit ihnen nicht allgemein angewendet werden, sollen hier die für sie geltenden wichtigsten Grundsätze und Rechenregeln, soweit solche für diese Ausführungen in Frage kommen, angeführt werden.

Vektorverhältnisse.

Vektorverhältnisse sind Quotienten, deren Zähler und Nenner Vektoren sind, sie werden geometrisch dargestellt durch zwei Vektoren — Zählervektor und Nennervektor —, welche miteinander einen gewissen Winkel einschließen. (Vergleiche Bild 1.) $\left(\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}.\right)$

Bild 1.

Bild 2. $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ aus Bild 1.

Vektorverhältnisse sind als gleich zu bezeichnen, wenn Zähler- und Nennervektor jeweils denselben Winkel miteinander einschließen und die aus den Absolutwerten der Zähler- und Nennervektoren gebildeten Quotienten einander gleich sind.

Vektorverhältnisse werden addiert resp. subtrahiert, indem man sie nach geometrischen (graphischen) Verfahren auf den gleichen Nenner bringt, hierauf die Zähler geometrisch addiert resp. subtrahiert und das Resultat dieser Operation durch den vorerwähnten gleichen Nenner dividiert.



Multiplikation eines Vektors $\mathfrak{E}$ mit einem Vektorverhältnis $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ bedeutet: Multiplikation von $\mathfrak{E}$ mit $|\mathfrak{a}| = \frac{|\mathfrak{A}|}{\mathfrak{B}}$ und Drehung des so erhaltenen Vektors $\{|\mathfrak{a}|\mathfrak{E}\}$ um den Winkel $(\mathfrak{B} \div \mathfrak{A})$ des Vektorverhältnisses (vgl. Bild 2).

Dr. Fr. Natalis verwendet die Vektorverhältnisse zur Darstellung von Impedanzen und Admittanzen. Im folgenden werden sie jedoch als Quotienten beliebiger Vektoren verwendet, insbesondere können als Zähler und als Nenner Spannungen und Ströme beliebiger verschiedener Leiter auftreten.

Vektorprodukte.

Vektorprodukte sind Produkte zweier Vektoren und werden gebildet durch die Summe eines Skalar- und eines Vektorteiles, der Größe nach entsprechend dem skalaren resp. dem vektoriellen Produkte der beiden Vektoren, berechnet nach den bekannten Methoden der allgemeinen Vektorrechnung.

$$\underset{\text{symb. Form.}}{y = \{\mathfrak{E}\mathfrak{J}\}}\text{[1]} = \underbrace{\overset{\text{Skalar}}{|\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{J}| \cdot \cos \cdot (\mathfrak{E}\mathfrak{J})} + \overset{\text{Vektor}}{|\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{J}| \cdot \sin (\mathfrak{E}\mathfrak{J})}}_{\text{entwickelte Form.}} = (\mathfrak{E}\mathfrak{J}) + [\mathfrak{E}\mathfrak{J}].$$

Zu beachten ist die Reihenfolge von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{J}$ im Vektorprodukte, denn das Vorzeichen des vektoriellen Teiles hängt davon ab.

Operationen mit entwickelten Vektorprodukten entsprechen Operationen mit komplexen Zahlen, daraus folgt sofort:

Eine Gleichung zwischen Vektorprodukten enthält zwei Aussagen, eine erste über die Gleichheit der skalaren Teile, eine zweite über die Gleichheit der Vektorteile der beiden entwickelten Vektorprodukte. Hieraus:

Summen und Differenzen von Vektorprodukten sind wieder Vektorprodukte.

Weitere für Vektorverhältnisse und Vektorprodukte geltende Gesetze, z. B. solche über Differentiation und Integration sollen hier nicht angeführt werden. In den folgenden Untersuchungen und den daraus sich ergebenden Anwendungen werden Differentiationen und Integrationen stets so vorgenommen, wie wenn es sich um Funktionen gewöhnlicher algebraischer Größen handelte. Für die Resultate ergibt sich, soweit sie aus diesem Aufsatze erhalten und gemäß ihm angewendet sind, dadurch kein Unterschied gegenüber einer exakten Behandlung. Immerhin sei hier auf die infolge des geometrischen Charakters der verwendeten Funktionen auftretenden Schwierigkeiten hingewiesen.

Der Aufbau der elektrischen Systeme.

Der Vergleich des elektrischen Systems mit dem Fachwerke führt zu folgendem:

Den Stäben des Fachwerkes entsprechen beim elektrischen System diejenigen Leiter, für welche weder Strom noch Spannung fest vorgeschrieben ist, sondern welche durch ihre Impedanz (Widerstand) oder ihre Admittanz (Leitfähigkeit), dargestellt als Vektorverhältnis, gegeben sind. Diese Leiter nennen wir Stäbe.

Ihnen gegenüber stehen die Leiter mit vorgeschriebener Spannung und die mit vorgeschriebenem Strom. Dieselben heißen Erzeuger, und zwar ganz unabhängig davon, ob der betreffende Leiter ein Erzeuger elektrischer Energie im üblichen Sinne oder ob er ein Verbraucher solcher sei.

Die den Erzeugern vorgeschriebenen Spannungen und Ströme werden als unabhängige Größen[2], kurz Unabhängige bezeichnet, denn sie sind vom Aufbau des

[1]) { } meistens weggelassen, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind.

[2]) „Größe" bedeutet im folgenden: Spannung oder Strom. Stabgröße = Stabspannung oder Stabstrom, Erzeugergröße = Erzeugerspannung oder Erzeugerstrom.

Systems nicht abhängig. Die übrigen Spannungen und Ströme, also insbesondere alle Stabspannungen und Ströme sind abhängige Größen, Abhängige.

Unabhängige Spannungen sind mit $\mathfrak{V}$, unabhängige Ströme mit $\mathfrak{K}$, abhängige Spannungen mit $\mathfrak{E}$ und abhängige Ströme mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet.

Die als Vektorverhältnisse aufgefaßten Impedanzen der Stäbe sind mit $\mathfrak{b}_{\lambda\lambda}$, deren reziproke Werte die Admittanzen mit $\mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ bezeichnet. Man erhält somit für irgendeinen Stab λ die Beziehungen: $\mathfrak{E}_\lambda = \mathfrak{b}_{\lambda\lambda}\mathfrak{J}_\lambda$ und $\mathfrak{J}_\lambda = \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}\mathfrak{E}_\lambda$.

Für jedes elektrische System gelten die beiden Kirchhoffschen Sätze, welche genau den Gleichgewichtsbedingungen und den Deformationsbedingungen der elastischen Systeme entsprechen. Genau wie für die als Unabhängige zu wählenden Lasten des elastischen Systems gilt auch für die unabhängigen Größen, d. h. unabhängigen Spannungen und Ströme des elektrischen Systems, daß durch dieselben allein die Gleichgewichtsbedingungen im allgemeinen nicht erfüllt werden, d. h. man kann als Unabhängige nicht Größen wählen, welche durch Gleichgewichtsbedingungen miteinander eindeutig verknüpft sind; z. B. es können nicht die Ströme aller in einem Netzknoten zusammenstoßenden Leiter als Unabhängige gewählt werden. Es ist mindestens einer dieser Ströme als Abhängige zu betrachten, damit dem ersten Kirchhoffschen Satze stets Genüge geleistet werden kann.

Man kann zeigen, daß der stationäre Zustand eines elektrischen Systems durch ebenso viele Werte eindeutig bestimmt ist, wie das System Leiter aufweist. Man kann also einem System so viele Werte, Spannungen, Ströme und Leitwerte vorschreiben, daß die Summe der Anzahlen der vorgeschriebenen Werte irgendwelcher Art gleich der Leiterzahl ist. Auf den Beweis dieser aus den Kirchhoffschen Sätzen folgenden Behauptung soll hier nicht eingegangen werden, insbesondere deshalb, weil sich die folgenden Untersuchungen doch nur auf eine spezielle Art der Netze beziehen. Wir schreiben nämlich im folgenden jedem Leiter des Systems nur einen Wert unabhängig vom Systemaufbau vor, unser System enthält damit weder Leiter mit zwei vorgeschriebenen Werten noch Leiter ohne solche.

Für die Stäbe folgt aus obigem nichts Neues, für die Erzeuger ergibt sich jedoch, daß nur solche vorkommen, welchen entweder Spannung oder Strom als Unabhängige vorgeschrieben ist, die eine dieser Größen, Strom bzw. Spannung, bleibt eine mit dem Systemzustand veränderliche.

Das Ziel der Netzberechnung ist nun nichts weiter als die Ermittlung der abhängigen Systemgrößen in Funktion der gegebenen Werte, was zu den nun zu behandelnden Verknüpfungsgleichungen führt.

Die Verknüpfungsgleichungen.

Aus den linearen Gesetzen über die Abhängigkeit der Spannungen und der Ströme in Systemen mit konstanten Widerständen und auf Grund des Superpositionsprinzipes lassen sich leicht die folgenden Beziehungen ableiten, welche ähnlichen auf Grund des Hookeschen Gesetzes abgeleiteten Beziehungen aus der Mechanik entsprechen:

Strom $\mathfrak{J}_\lambda$ eines beliebigen Leiters λ.

$$\mathfrak{J}_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{e} \mathfrak{J}_{\varkappa\lambda} + \sum_{\varrho=1}^{i} \mathfrak{J}_{\varrho\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{e} \mathfrak{a}_{\varkappa\lambda}\mathfrak{V}_\varkappa + \sum_{\varrho=1}^{i} \mathfrak{b}_{\varrho\lambda}\mathfrak{K}_\varrho.$$

Spannung $\mathfrak{E}_\lambda$ eines beliebigen Leiters λ.

$$\mathfrak{E}_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{i} \mathfrak{E}_{\varrho\lambda} + \sum_{\varkappa=1}^{e} \mathfrak{E}_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varrho=1}^{i} \mathfrak{b}_{\varrho\lambda}\mathfrak{K}_\varrho + \sum_{\varkappa=1}^{e} \mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}\mathfrak{V}_\varkappa.$$



Hier und im folgenden bedeuten (vgl. Bild 3):
e Anzahl der Leiter mit unabhängiger Spannung,
i Anzahl der Leiter mit unabhängigem Strom,
n Anzahl der Stäbe,
Indizes $\varkappa$, μ beliebige Leiter mit unabhängiger Spannung,
Indizes ϱ, τ beliebige Leiter mit unabhängigem Strom,
Indizes λ beliebige Leiter, d. h. Stäbe oder Erzeuger.

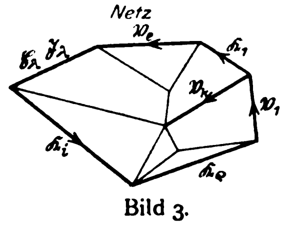


Bild 3.

Die vor allen Unabhängigen jeweils stehenden Faktoren geben die Proportionalitätsbeziehung der zu berechnenden Größe mit der betr. Unabhängigen. Diese Faktoren sind, wie man durch einfache Überlegung leicht erkennt, Vektorverhältnisse. Speziell ist:

$\mathfrak{a}_{\varkappa\lambda}$ der Leitfähigkeits-Koeffizient, das Vektorverhältnis des im Leiter λ auftretenden Stromes $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$ infolge der Spannung $\mathfrak{B}_\varkappa$ des Leiters $\varkappa$ zu dieser Spannung $\mathfrak{B}_\varkappa$;

$\mathfrak{b}_{\varrho\lambda}$ der Widerstands-Koeffizient, das Vektorverhältnis der im Leiter λ auftretenden Spannung $\mathfrak{E}_{\varrho\lambda}$ infolge des Stromes $\mathfrak{K}_\varrho$ des Leiters ϱ zu diesem Strom $\mathfrak{K}_\varrho$;

$\mathfrak{c}_{\varkappa\lambda}$ die Spannungs-Einflußgröße, das Vektorverhältnis der im Leiter λ auftretenden Spannung $\mathfrak{E}_{\varkappa\lambda}$ infolge der Spannung $\mathfrak{B}_\varkappa$ des Leiters $\varkappa$ zu dieser Spannung $\mathfrak{B}_\varkappa$;

$\mathfrak{d}_{\varrho\lambda}$ die Strom-Einflußgröße, das Vektorverhältnis des im Leiter λ auftretenden Stromes $\mathfrak{J}_{\varrho\lambda}$ infolge des Stromes $\mathfrak{K}_\varrho$ des Leiters ϱ zu diesem Strom $\mathfrak{K}_\varrho$.

Aus den Definitionen der Koeffizienten und Einflußgrößen folgen für gewisse Spezialfälle die Werte derselben ohne weiteres. Es gibt der Leitfähigkeits-Koeffizient eines Stabes λ, bezogen auf die zwischen den Enden des Stabes herrschende Spannung, die Leitfähigkeit des Stabes an, der entsprechende Widerstands-Koeffizient gibt den Widerstand. Weiter werden alle Einflußgrößen eines Leiters auf sich selbst, so weit sie überhaupt einen Sinn haben, zu eins.

Die in den Verknüpfungs-Gleichungen vorkommenden Faktoren stehn in Analogie zu den Faktoren, welche in den Gleichungen der Statik die Beziehungen der Stabkräfte und freien Deformationen zu den Lasten und vorgeschriebenen Deformationen wiedergeben. Meist behandelt man nur die Beziehungen der Stabkräfte zu den Lasten und leitet auf Grund der für die Deformationsarbeit geltenden Gesetze den Maxwellschen Satz ab. Genau genommen können aber in der Mechanik, genau wie dies hier in der Theorie der elektrischen Systeme geschieht, drei Maxwellsche Sätze mit entsprechendem Inhalt aufgestellt werden.

Der Nachweis der Maxwellschen Sätze, gültig für elektrische Systeme, erfolgt ohne Zuhilfenahme der Integrabilitätsbedingung einer Funktion zweiten Grades durch einfache Rechnung. Es soll dies hier aber nicht näher ausgeführt werden, sondern die Maxwellschen Sätze seien nur zitiert.

Die Maxwellschen Sätze der elektrischen Systeme.

1. Satz von Maxwell. $\mathfrak{a}_{\mu\varkappa} = \mathfrak{a}_{\varkappa\mu}$.

Der in einem Leiter $\varkappa$ infolge der unabhängigen Spannung $\mathfrak{B}_\mu = 1$ oder $\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{B}_\mu$ des Leiters μ fließende Strom $\mathfrak{J}_{\mu\varkappa}$ ist gleich dem im Leiter μ infolge $\mathfrak{B}_\varkappa = 1$, resp. $\mathfrak{B}_\varkappa = \mathfrak{B}_\mu$ (im ersten Falle) fließenden Strome $\mathfrak{J}_{\varkappa\mu}$.

2. Satz von Maxwell. $\mathfrak{b}_{\varrho\tau} = \mathfrak{b}_{\tau\varrho}$.

Die in einem Leiter τ infolge des unabhängigen Stromes $\mathfrak{K}_\varrho = 1$ oder $\mathfrak{K}_\varrho = \mathfrak{K}_\varrho$ des Leiters ϱ auftretende Spannung $\mathfrak{E}_{\varrho\tau}$ ist gleich der im Leiter ϱ infolge $\mathfrak{K}_\tau = 1$, resp. $\mathfrak{K}_\tau = \mathfrak{K}_\varrho$ (im ersten Falle) auftretenden Spannung $\mathfrak{E}_{\tau\varrho}$.



3. Satz von Maxwell. $\mathfrak{c}_{\varkappa\varrho} = -\mathfrak{d}_{\varrho\varkappa}$.

Eine Spannung $\mathfrak{V}_\varkappa = \mathfrak{V}_\varkappa$ resp. $\mathfrak{V}_\varkappa = 1$ verursacht in einem Erzeuger ϱ mit festem Strom $\mathfrak{K}_\varrho$ eine Spannung $\mathfrak{E}_{\varkappa\varrho}$, welche zu ihr in entgegengesetzt gleichem Vektorverhältnis steht, wie der durch einen Strom $\mathfrak{K}_\varrho = \mathfrak{K}_\varrho$ resp. $\mathfrak{K}_\varrho = 1$ des Erzeugers ϱ im Erzeuger $\varkappa$ mit fester Spannung verursachte Strom $\mathfrak{J}_{\varrho\varkappa}$ zum Strome $\mathfrak{K}_\varrho$.

Beispiele für die Ermittlung der Verknüpfungsgleichungen und für die Gültigkeit der Maxwellschen Sätze.

Die folgenden Beispiele sind ohne weiteres an Hand der Netzfiguren verständlich. Hingewiesen sei nur auf die möglichst vorteilhafte Wahl der Vorzeichen für die Spannungs- und Strom-Vektoren.

Bei den Stäben wählt man die positiven Richtungen für Spannung und Strom im Plane des Netzes gleichsinnig, man rechnet mit Spannungs-Abfällen.

Bei den Erzeugern dagegen wählt man vorteilhaft die positive Stromrichtung geometrisch in entgegengesetztem Sinne zur positiven Spannungsrichtung, man rechnet mit der elektromotorischen Kraft, nicht mit dem Spannungsabfall.

Die Stäbe seien in den Beispielen dieses Abschnittes durch ihre Impedanzen $\mathfrak{d}_{\lambda\lambda} = \mathfrak{Z}_\lambda$ gegeben. Weiter sind als Indizes der Erzeuger a, b, c. . . , als Indizes der Stäbe 1, 2, 3 . . ., gewählt.

Netz 1. Gegeben: $\mathfrak{V}_a$, $\mathfrak{V}_b$, $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$.

(Vgl. Bild 4.) Gesucht: $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_a$, $\mathfrak{J}_b$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$-\mathfrak{V}_a + \mathfrak{E}_3 - \mathfrak{V}_b + \mathfrak{E}_1 = 0 \qquad \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_a = 0.$$
$$-\mathfrak{V}_a + \mathfrak{E}_2 = 0 \qquad \mathfrak{J}_3 - \mathfrak{J}_b = 0.$$

daraus $\mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2, \quad \mathfrak{J}_b = \mathfrak{J}_3.$

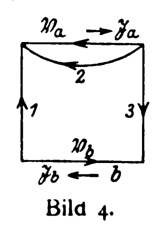


Bild 4.

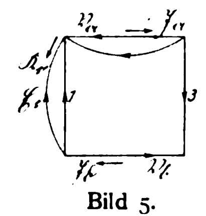


Bild 5.

Weiter gelten:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{Z}_1, \quad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{J}_2 \mathfrak{Z}_2, \quad \mathfrak{E}_3 = \mathfrak{J}_3 \mathfrak{Z}_3,$$

womit zu erhalten ist:

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_3 = \mathfrak{V}_a \left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{V}_b \left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) = \mathfrak{J}_b = \mathfrak{V}_a \mathfrak{a}_{ab} + \mathfrak{V}_b \mathfrak{a}_{bb}.$$

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{V}_a \frac{1}{\mathfrak{Z}_2} = \mathfrak{V}_a \mathfrak{a}_{a2}.$$

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{V}_a \left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_2}\right) + \mathfrak{V}_b \left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) = \mathfrak{V}_a \mathfrak{a}_{aa} + \mathfrak{V}_b \mathfrak{a}_{ba}$$

$\mathfrak{a}_{ab} = \mathfrak{a}_{ba}$ 1. Satz von Maxwell.

Die Berechnung von $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ bietet nichts Besonderes.

Netz 2. Gegeben: $\mathfrak{V}_a$, $\mathfrak{V}_b$, $\mathfrak{K}_c$, $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$

(Vgl. Bild 5.) Gesucht: $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_a$, $\mathfrak{J}_b$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$-\mathfrak{V}_a + \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{V}_b + \mathfrak{E}_3 = 0 \qquad \mathfrak{J}_3 + \mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_a = 0$$
$$-\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_c = 0 \qquad \mathfrak{K}_c + \mathfrak{J}_b - \mathfrak{J}_1 = 0$$
$$\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{V}_a = 0 \qquad \mathfrak{J}_3 - \mathfrak{J}_b = 0$$

daraus: $\mathfrak{J}_3 = \mathfrak{J}_b = \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{K}_c, \quad \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3.$

Weiter gelten:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{Z}_1 \qquad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{J}_2 \mathfrak{Z}_2 \qquad \mathfrak{E}_3 = \mathfrak{J}_3 \mathfrak{Z}_3,$$

womit erhalten wird:

$$\mathfrak{J}_3 = \mathfrak{J}_b = \mathfrak{B}_a\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{B}_b\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) - \mathfrak{K}_c\left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right)$$

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{B}_a\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{B}_b\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{K}_c\left(\frac{\mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right)$$

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{B}_a\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_2}\right)$$

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{B}_a\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_2}\right) + \mathfrak{B}_b\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) - \mathfrak{K}_c\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right)$$

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_c = \mathfrak{B}_a\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{B}_b\left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{K}_c\left(\frac{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right).$$

Auch hier erkennt man $\mathfrak{a}_{ab} = \mathfrak{a}_{ba}$, 1. Satz von Maxwell.

Weiter $\mathfrak{b}_{cb} = -\mathfrak{c}_{bc}$; $\mathfrak{b}_{ca} = -\mathfrak{c}_{ac}$, 3. Satz von Maxwell,

indem $\mathfrak{b}_{cb} = -\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}$ und $\mathfrak{c}_{bc} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}$.

Die Gleichung von Clapeyron und die Sätze von Castigliano.

Die Mechanik, insbesondere die Baustatik, verwendet bei der Berechnung der elastischen Systeme, speziell der Fachwerke, die für die Deformationsarbeit geltende Beziehung, welche unter dem Namen des Satzes von Castigliano bekannt ist. Nach dem Verfahren von Clapeyron wird die Deformationsarbeit als Funktion von Stabkräften im Verein mit gewissen Konstanten des Systems dargestellt. Dabei ergibt sich eine Funktion zweiten Grades von Kräften. wobei noch gewisse Systemkonstante als Faktoren in erster Potenz vorkommen. Diese Funktion, die Deformationsarbeit, ist weiter darstellbar als Hälfte der Summe von Produkten aus Lasten und Verschiebungen (der Angriffspunkte der Lasten). Alle hier vorkommenden Kräfte und Verschiebungen lassen sich dem Superpositionsprinzip unterordnen. Es liegt nun nahe, für elektrische Systeme eine der Deformationsarbeit analoge Funktion zu suchen, nachdem die Spannungen und Ströme als dem Superpositionsprinzipe unterworfen befunden wurden, und im elektrischen System sowohl entsprechende Gleichgewichtsbedingungen gleichartiger Größen untereinander als auch entsprechende lineare Beziehungen ungleichartiger Größen zueinander wie beim elastischen gelten.

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß als Funktion, welche der Deformationsarbeit des elastischen Systems entspricht, beim elektrischen System eine der Form nach als die Hälfte der Scheinleistung erscheinende Funktion, der sogenannte S-Wert zu betrachten ist. [S-Wert heißt diese Funktion, in Abkürzung des Ausdruckes — Summen-Wert —, welcher in den genauern Analogieentwicklungen begründet ist.]

Dieser S-Wert ist nun entsprechend dem Vorgehen der Theorie der elastischen Systeme, in Anlehnung an den Satz von Clapeyron der Mechanik einerseits als Funktion der Stabgrößen, anderseits als Funktion der Erzeugergrößen darzustellen, was der Bildung des Deformationsarbeitsausdruckes als Funktion der Stabspannungen oder Stabdeformationen einerseits und der Lasten mit deren Angriffspunktverschiebungen anderseits entspricht.

Betrachten wir die Gesamtheit aller Stäbe des elektrischen Systems als das System im engeren Sinne, Stabsystem, oft auch kurz nur System genannt, und die Gesamtheit aller Erzeuger im Sinne dieser Arbeit als das Erzeugersystem, dann können wir wie folgt bezeichnen.



S. — als Funktion der Stabgrößen = S-Wert des Stabsystems [n-Stabzahl]

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \mathfrak{E}_{\lambda}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{b}_{\lambda\lambda} \mathfrak{J}_{\lambda}^2$$

und

S. — als Funktion der Erzeugergrößen = S-Wert des Erzeugersystems

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\mu=1}^{e} \sum_{\varkappa=1}^{e} \mathfrak{B}_{\mu} (\mathfrak{a}_{\varkappa\mu} \mathfrak{B}_{\varkappa}) + \sum_{\mu=1}^{e} \sum_{\varrho=1}^{i} \mathfrak{B}_{\mu} (\mathfrak{d}_{\varrho n} \mathfrak{K}_{\varrho}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau=1}^{i} \sum_{\varrho=1}^{i} (\mathfrak{b}_{\varrho\tau} \mathfrak{K}_{\varrho}) \mathfrak{K}_{\tau} + \sum_{\tau=1}^{i} \sum_{\varkappa=1}^{e} (\mathfrak{c}_{\varkappa\tau} \mathfrak{B}_{\varkappa}) \mathfrak{K}_{\tau} \right\}.$$

Die letzte Gleichung heißt, entsprechend der in der Mechanik vorkommenden der verwandten Form, Gleichung von Clapeyron. Kommt nur eine Art unabhängiger Größen, also nur unabhängige Spannungen oder nur unabhängige Ströme im Erzeugersystem vor, dann geht die angegebene Gleichung von Clapeyron, gültig für das elektrische System, in die analoge Form zu der in der Mechanik fast ausschließlich verwendeten Gleichung für die Deformationsarbeit über.

Es seien nun, entsprechend dem Vorgehen der Mechanik bei der Differentiation der Deformationsarbeit, die Ableitungen des S-Wertes nach Stabgrößen und Erzeugergrößen vorgenommen. Dabei sei jedoch beachtet, daß wir diese Differentiationen des S-Wertes gemäß Einleitung so ausführen, wie wenn keine vektoriellen Größen, sondern nur rein algebraische Größen in der S-Funktion vorkämen. Alsdann wird erhalten:

1. Differentialquotient des S-Wertes nach einer Stabgröße (λ).

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_{\lambda}} = 0 \qquad \frac{dS}{d\mathfrak{J}_{\lambda}} = 0.$$

1. Spezieller Satz von Castigliano.

Die Ableitung des S-Wertes nach einer Stabgröße ist stets gleich Null. Man hat aber vor der Differentiation den S-Wert auf Grund aller für Größen derselben Art, wie der Nenner des Differentialquotienten, geltenden Gleichgewichtsbedingungen, soweit als möglich durch Erzeugergrößen dieser Art darzustellen, wie dies bei der entsprechenden Differentiation der Deformationsarbeit geschieht.

2. Differentialquotient des S-Wertes nach einer Erzeugergröße.

a) Differentiation nach einer Unabhängigen.

$$\frac{dS}{d\mathfrak{B}_{\mu}} = \sum_{\varkappa=1}^{e} \mathfrak{a}_{\varkappa\mu} \mathfrak{B}_{\varkappa} = \mathfrak{J}_{\mu(\mathfrak{B})}.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{J}_{\mu(\mathfrak{B})}$ den allein infolge aller unabhängigen Spannungen im Leiter μ fließenden Strom.

$$\frac{dS}{d\mathfrak{K}_{\tau}} = \sum_{\varrho=1}^{i} \mathfrak{b}_{\varrho\tau} \mathfrak{K}_{\varrho} = \mathfrak{E}_{\tau(\mathfrak{K})}.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{E}_{\tau(\mathfrak{K})}$ die allein infolge aller unabhängigen Sttöme im Leiter τ auftretende Spannung.

Kommen nun im System nur Erzeuger mit aufgedrückten Spannungen oder nur Erzeuger mit aufgedrückten Strömen vor, dann gehen die oben angegebenen Werte $\mathfrak{J}_{\mu(\mathfrak{B})}$ und $\mathfrak{E}_{\tau(\mathfrak{K})}$ in tatsächlich im Leiter μ bez. τ auftretenden Strom $\mathfrak{J}_\mu$ bez. in tatsächlich auftretende Spannung $\mathfrak{E}_\tau$ über. Also:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{B}_\mu} = \mathfrak{J}_\mu \quad \text{und} \quad \frac{dS}{d\mathfrak{K}_\tau} = \mathfrak{E}_\tau.$$

Allgemeiner Satz von Castigliano.

Die Ableitung des S-Wertes nach der Unabhängigen eines Leiters (Erzeugers) gibt die infolge dieser Art von Unabhängigen in dem betrachteten Leiter auftretende Abhängige.

b) Differentiation nach einer abhängigen Erzeugergröße.

Man berechne den S-Wert als Funktion der Unabhängigen und als Unabhängige fingierter Größen derselben Art wie der Nenner des Differentialquotienten, welche auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen nicht eliminiert werden können. Es kommen also im S-Wert vor der Differentiation nur Größen einer Art neben den die Stäbe charakterisierenden Vektorverhältnissen vor. Eine Überlegung sagt, daß dann:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{J}_\mu} = \mathfrak{B}_\mu \quad \text{und} \quad \frac{dS}{d\mathfrak{E}_\tau} = \mathfrak{K}_\tau.$$
$$\text{für } S = \Phi(\mathfrak{K}, \mathfrak{J}) \qquad \text{für } S = \Phi(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}).$$

2. Spezieller Satz von Castigliano.

Die Ableitung des S-Wertes nach einer abhängigen Erzeugergröße gibt die Unabhängige des betreffenden Erzeugers, wenn vor der Differentiation S als Funktion von echten und fingierten Unabhängigen der Art des Nenners des Differentialquotienten allein, und zwar unter Verwendung aller gültigen Gleichgewichtsbedingungen zur Elimination von Stabgrößen, dargestellt wurde.

Der in der Mechanik allgemein verwendete Satz von Castigliano entspricht dem hier als erster spezieller Satz bezeichneten Ergebnisse. Es ließen sich aber in der Mechanik alle Analogien zu den vorgenannten Sätzen ableiten, wenn mit unabhängigen Kräften und mit von Null verschiedenen unabhängigen Verschiebungen gerechnet würde.

Die Sätze von Castigliano geben Beziehungen für die Größen eines elektrischen Systemes, welche zur Systemuntersuchung herangezogen werden können, wenn die Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen oder diejenigen der Ströme allein zur Berechnung aller Spannungen bzw. aller Ströme nicht ausreichen. Dies geschieht hier in ganz ähnlicher Weise wie die Verwertung des entsprechenden Satzes der Statik bei Berechnung sogenannter unbestimmter Systeme.

Wegen des besseren Verständnisses der folgenden Entwicklungen sei hier die Gültigkeit und die Anwendbarkeit der Sätze von Castigliano bei der Untersuchung eines Netzbeispieles gezeigt. Später wird dann das allgemein gültige Verfahren erläutert, welches die Anwendung der hier dargelegten Prinzipien der Netzberechnung für beliebige Fälle ermöglicht.

Damit dieses zu entwickelnde Rechnungsverfahren nicht von vorneherein wegen des Fehlens der Verknüpfungsgleichungen, die auf den ersten Blick als für die Ermittlung des S-Wertes nötig erscheinen, zu Schwierigkeiten führt, sei eine einfache stets brauchbare Methode zur Darstellung des S-Wertes in Funktion der gewünschten Größen erläutert.



Der Form nach ist der S-Wert als Funktion zweiten Grades der Stabwerte bekannt, nämlich $S = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}\mathfrak{E}_\lambda^2$ oder $S = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{b}_{\lambda\lambda}\mathfrak{J}_\lambda^2$. Man ersetzt nun in einem dieser Ausdrücke die Stabgrößen so weit als möglich durch die echten Unabhängigen der in Frage kommenden Größenart und fingiert durch die Gleichgewichtsbedingungen ihrer Art nicht eliminierbare abhängige Erzeugergrößen und Stabgrößen, unter Berücksichtigung der später zu bildenden Differentialquotienten, als Unabhängige. Dabei ist zu beachten, daß die fingierten Unabhängigen ebensowenig wie die echten durch Gleichgewichtsbedingungen voneinander oder von andern Größen abhängig sein dürfen, mit andern Worten: Erst nachdem mit Hilfe aller Gleichgewichtsbedingungen möglichst viele Abhängige der in Frage kommenden Art eliminiert wurden, kann man die für die Differentiationen geeigneten Ausdrücke, die Funktionen der echten und fingierten Unabhängigen erhalten.

Beispiel für die Ableitung des S-Wertes und für die Verwertung der Sätze von Castigliano bei der Netzberechnung.

Dem folgenden Beispiele ist das früher schon benützte Netzbild 1 (Bild 4) zugrunde gelegt.

Netz 1 (siehe Bild 4).

1. Ableitung von S nach einer Stabgröße.

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_1} = \frac{d}{d\mathfrak{E}_1}\,\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\mathfrak{E}_1^2}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{\mathfrak{E}_2^2}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{\mathfrak{E}_3^2}{\mathfrak{Z}_3}\right\}.$$

Setzt man hier auf Grund der früher gegebenen Gleichgewichtsbedingungen: $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{B}_a$, $\mathfrak{E}_3 = \mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1$ und fingiert $\mathfrak{E}_1$ als Unabhängige, dann ist

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_1} = \frac{d}{d\mathfrak{E}_1}\,\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\mathfrak{E}_1^2}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{\mathfrak{B}_a^2}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{(\mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1)^2}{\mathfrak{Z}_3}\right\},$$

$$= \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{Z}_1} + 0 - \frac{(\mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1)^3}{\mathfrak{Z}_3} = \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_3 = 0.$$

2a. Ableitung von S nach einer Unabhängigen.

$$\frac{dS}{d\mathfrak{B}_a} = \frac{d}{d\mathfrak{B}_a}\,\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\mathfrak{E}_1^2}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{\mathfrak{E}_2^2}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{\mathfrak{E}_3^2}{\mathfrak{E}_3}\right\}.$$

Setzt man hier die früher für $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, bzw. $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ erhaltenen Ausdrücke, Verknüpfungsgleichungen ein, dann ergibt sich:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{B}_a} = \frac{d}{d\mathfrak{B}_a}\,\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_b}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2}\right)^2 \mathfrak{Z}_1 + \frac{\mathfrak{B}_a^2}{\mathfrak{Z}_2} + \left(\frac{\mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_b}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right)^2 \mathfrak{Z}_3\right\}.$$

$$\frac{dS}{d\mathfrak{B}_a} = \mathfrak{B}_a\left\{\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_2}\right) + \mathfrak{B}_b\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) = \mathfrak{J}_a\right.$$

und weiter

$$\frac{dS}{d\mathfrak{B}_b} = \mathfrak{B}_a\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{B}_b\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) = \mathfrak{J}_b.$$

Da nur unabhängige Spannungen vorkommen, wurden $\mathfrak{J}_{a(\mathfrak{B})} = \mathfrak{J}_a$; $\mathfrak{J}_{b(\mathfrak{B})} = \mathfrak{J}_b$.

2b. Ableitung von S nach einer abhängigen Erzeugergröße.

Bei Verwertung der Gleichgewichtsbedingungen $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_3 = \mathfrak{J}_b$; $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_a - \mathfrak{J}_b$ erhält man

$$\frac{dS}{d\mathfrak{J}_a} = \frac{d}{d\mathfrak{J}_a}\,{}^1\!/_2\,\{\mathfrak{J}_1^2\,\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{J}_2^2\,\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{J}_3^2\,\mathfrak{Z}_3\},$$

$$= \frac{d}{d\mathfrak{J}_a}\,{}^1\!/_2\,\{\mathfrak{J}_b^2\,\mathfrak{Z}_1 + (\mathfrak{J}_a - \mathfrak{J}_b)^2\,\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{J}_b^2\,\mathfrak{Z}_3\},$$

$$= 0 + (\mathfrak{J}_a - \mathfrak{J}_b)\,\mathfrak{Z}_2 + 0 = \mathfrak{J}_2\,\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{B}_a.$$

Berechnung des Netzes I mit Hilfe des ersten speziellen Satzes von Castigliano.

Gleichgewichtsbedingungen: $-\mathfrak{B}_a + \mathfrak{E}_3 - \mathfrak{B}_b + \mathfrak{E}_1 = 0.$

$-\mathfrak{B}_a + \mathfrak{E}_2 = 0.$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen erhält man

$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{B}_a,$

$\mathfrak{E}_3 = \mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1$ nicht direkt berechenbar.

Wir verwenden den ersten speziellen Satz von Castigliano, wobei

$\mathfrak{E}_1$ = fingierte Unabhängige

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_1} = \frac{d}{d\mathfrak{E}_1}\,{}^1\!/_2\left\{\frac{\mathfrak{E}_1^2}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{\mathfrak{E}_2^2}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{\mathfrak{E}_3^2}{\mathfrak{Z}_3}\right\} = 0,$$

$$= \frac{d}{d\mathfrak{E}_1}\,{}^1\!/_2\left\{\frac{\mathfrak{E}_1^2}{\mathfrak{Z}_1} + \frac{\mathfrak{B}_2^2}{\mathfrak{Z}_2} + \frac{(\mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1)}{\mathfrak{Z}_3}\right\} = 0,$$

$$= \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{Z}_1} + 0 - \frac{\mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1}{\mathfrak{Z}_3} = 0,$$

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{B}_a\left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{B}_b\left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right)$$

und

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{B}_a\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right) + \mathfrak{B}_b\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}\right),$$

welcher Wert schon früher auf andere Weise erhalten wurde.

Die Berechnung der übrigen Größen des Netzes I bietet nichts Interessantes mehr.

Die Berechnung elektrischer Systeme.

Berechnung der Spannungen in einem gegebenen System.

Es sollen hier die sämtlichen Stabspannungen und die nicht als Unabhängige gegebenen Erzeugerspannungen berechnet werden, bevor man mit der Ermittlung der Ströme beginnt. Sind diese Spannungen bestimmt, dann können die Stabströme mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes und die eventuellen unbekannten Erzeugerströme mit Hilfe des ersten Kirchhoffschen Satzes leicht ermittelt werden.

Man stellt zuerst alle Gleichgewichtsbedingungen des Systems auf und sucht die darin vorkommenden Unbekannten, die freien Spannungen zu berechnen. Dies wird in einigen Fällen auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen allein gelingen. Das dann vorliegende System heißt, entsprechend der Bezeichnungsweise der Statik, bestimmtes System in bezug auf die Spannungen.

Bleiben jedoch beim Versuch der Berechnung der Spannungen mit Hilfe ihrer Gleichgewichtsbedingungen, des zweiten Kirchhoffschen Satzes allein, beim Eliminationsverfahren bei Ausnützung aller dieser Gleichgewichtsbedingungen noch Spannungen unbekannt, liegen also mehr unbekannte Spannungen als Gleichgewichtsbedingungen solcher vorhanden sind, vor, dann ist das Netz ein sogenanntes unbestimmtes

System in bezug auf die Spannungen. Die Anzahl der nicht auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen berechenbaren Spannungen nennt man den Unbestimmtheitsgrad des Systems in bezug auf die Spannungen. Bisher gewann man weitere für die Systemsberechnung brauchbare Gleichungen in diesem Falle durch Anwendung des ersten Kirchhoffschen Satzes, betreffend das Gleichgewicht der Ströme, nachdem man mittels des Ohmschen Gesetzes Beziehungen zwischen Spannungen und Strömen des Systems aufgestellt hatte. Dieses Verfahren entspricht der Verwertung der Bedingungen, betreffend den Zusammenhalt und die Lagerung des statisch unbestimmten Fachwerkes bzw. der Bedingungen für dessen Deformationen. Dabei ergaben sich oft unnötig umständliche Rechnungen. Die in der Statik und in der vorliegenden Arbeit behandelten Sätze von Castigliano erlauben nun nach einem ganz eindeutigen Verfahren, weitere für die Systemsberechnung geeignete Gleichungen, die Zusatzgleichungen, aufzustellen, wenn mit den Gleichgewichtsbedingungen einer Größenart, der Spannungen allein, nicht auszukommen ist.

Nach den Sätzen von Castigliano sind die Differentialquotienten, welche bei Ableitung des nach der früher geschilderten Methode entwickelten S-Wertes auftreten, dem Werte nach stets zum voraus bekannt. Wir haben also, um außer den Gleichgewichtsbedingungen weitere Gleichungen zur Berechnung des Systems zu erhalten, nur die Ableitungen des S-Wertes nach richtig zu wählenden Unbekannten zu bilden.

Die in Frage kommenden fingierten Unabhängigen sind, wie eine genauere Überlegung zeigt, in erster Linie die nicht auf Grund des zweiten Kirchhoffschen Satzes berechenbaren Spannungen von Erzeugern mit festem Strom, in zweiter Linie die ebenfalls nicht in der angegebenen Weise zu ermittelnden Spannungen von Stäben. Die Ableitungen des S-Wertes nach den ersteren werden gleich den betreffenden unabhängigen Strömen, die Ableitungen des S-Wertes nach den letztern werden zu Null. Die betreffenden Spannungen sind als fingierte Unabhängige einzuführen, was ja, nachdem festgestellt wurde, daß die Gleichgewichtsbedingungen zu ihrer Berechnung nicht ausreichen, daß also diese Größen durch die Gleichgewichtsbedingungen nicht gebunden sind, ohne weiteres zulässig ist. Man gewinnt auf diese Weise ebenso viele Zusatzgleichungen, wie zu wenig Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind.

Praktisch wird man wie folgt vorgehn. Man stellt sämtliche Gleichgewichtsbedingungen, welche zur Berechnung der Spannungen als voneinander unabhängige Gleichungen möglich sind, auf. Hierauf eliminiert man aus dem erhaltenen System so viele Stabspannungen als möglich und erhält diese Stabspannungen als Funktionen der unabhängigen Spannungen, der Spannungen von Erzeugern fester Ströme und der weitern, nicht mehr mittels der Gleichgewichtsbedingungen eliminierbaren Stabspannungen. Nun ermittelt man, wie schon gezeigt, den S-Wert zuerst einfach als $S = \frac{1}{2} \sum_{\lambda = 1}^{n} \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \mathfrak{E}_\lambda^2$ und führt die aus den Gleichgewichtsbedingungen gewonnenen Funktionen der eliminierten Unbekannten in diesen S-Wert-Ausdruck ein. Die so erhaltene Funktion leitet man partiell nach allen noch vorkommenden abhängigen Spannungen, welche als Unabhängige fingiert werden, ab und erhält gemäß den Sätzen von Castigliano das folgende Gleichungssystem, das System der Zusatzgleichungen:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_a} = \mathfrak{K}_a \qquad \frac{dS}{d\mathfrak{E}_1} = 0$$

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_b} = \mathfrak{K}_b \qquad \frac{dS}{d\mathfrak{E}_2} = 0$$

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_c} = \mathfrak{K}_c \text{ usw.} \qquad \frac{dS}{d\mathfrak{E}_3} = 0 \text{ usw.}$$

Genau wie in der Statik hat man darauf zu achten, daß nicht etwa voneinander abhängige Spannungen als fingierte Unabhängige gewählt werden, d. h. Spannungen, von denen eine jeweils durch eine Gleichgewichtsbedingung eindeutig gegeben ist, wenn die anderen als Unabhängige gewisse Werte annehmen. Dieser Fehler wird aber dann sicher vermieden, wenn man sämtliche Gleichgewichtsbedingungen anschreibt, und aus ihnen so viele abhängige Spannungen als möglich eliminiert. Weiter hat man, wie sich aus Untersuchungen ergibt, darauf zu achten, daß zuerst so viele Stabspannungen als möglich eliminiert werden, bevor man mit der Elimination der Spannungen von Erzeugern festen Stromes beginnt. Es darf also niemals eine Erzeugerspannung durch eine Stabspannung ersetzt werden, so daß der Differentialquotient des S-Wertes nach der betreffenden Erzeugerspannung dahinfällt und an seiner Stelle der Differentialquotient nach einer Stabspannung auftritt. Sobald man sich vor Augen hält, daß bei einer derartigen unrichtigen Elimination der Einfluß eines unabhängigen, eines Erzeugerstromes rechnerisch nicht mehr zur Wirkung kommt, da die Anwendung des zweiten Satzes von Castigliano zugunsten der Anwendung des ersten dahinfällt, erscheint diese Regel ohne weiteren Beweis als begründet. (Auf einen Beweis soll der Kürze halber hier nicht eingetreten werden.)

Es wird nun, da, wie man bei Durchrechnung der Beispiele leicht erkennt, die Rechnung um so umständlicher ist, je höher der Unbestimmtheitsgrad des Systems liegt, von Vorteil sein, den Unbestimmtheitsgrad vor Beginn der eigentlichen Netzberechnung zu ermitteln. Je nach Ausfall dieser Untersuchung wird man nicht, wie bisher erläutert wurde, die Spannungen vor den Strömen ermitteln, sondern man beginnt mit der Berechnung der Ströme des Systems. Aus geometrischen Überlegungen folgt:

Der Unbestimmtheitsgrad eines Systems in bezug auf die Spannungen ist gleich der Zahl der Systemknoten vermindert um eins und die Anzahl der vorgeschriebenen unabhängigen Spannungen.

Will man mit der Berechnung der Ströme bei der Netzuntersuchung beginnen, dann ist das im folgenden wiedergegebene Verfahren anzuwenden.

Berechnung der Ströme in einem gegebenen System.

Auf Grund des vorhergehenden kann man leicht das Verfahren zur Berechnung der Ströme entwickeln, ohne dabei das Problem so weitgehend zu behandeln, wie dies bei der Entwicklung des Verfahrens zur Berechnung der Spannungen geschah.

Bleiben beim Versuche der Berechnung der Ströme des Systems mit Hilfe ihrer Gleichgewichtsbedingungen, des ersten Kirchhoffschen Satzes, allein, beim Eliminationsverfahren nach Ausnützung aller dieser Gleichgewichtsbedingungen noch Ströme unbekannt, liegen also mehr unbekannte Ströme, als Gleichgewichtsbedingungen solcher vorhanden sind, vor, dann ist das Netz ein unbestimmtes System in bezug auf die Ströme. Die Anzahl der nicht auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen allein berechenbaren Ströme nennt man den Unbestimmtheitsgrad des Systems in bezug auf die Ströme. Ihm entspricht die Zahl der auf Grund der speziellen Sätze von Castigliano aufzustellenden Zusatzgleichungen, welche genau die gleiche Form wie die früher gefundenen haben:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{J}_a} = \mathfrak{V}_a \qquad \frac{dS}{d\mathfrak{J}_1} = 0$$

$$\frac{dS}{d\mathfrak{J}_b} = \mathfrak{V}_b \qquad \frac{dS}{d\mathfrak{J}_2} = 0$$

$$\frac{dS}{d\mathfrak{J}_c} = \mathfrak{V}_c \text{ usw.} \qquad \frac{dS}{d\mathfrak{J}_3} = 0 \text{ usw.}$$

Bezüglich der Wahl der fingierten Unabhängigen gilt hier das Analoge wie bei der Wahl der fingierten Unabhängigen zur Berechnung der Spannungen. Es sind

also nach vollständiger Ausnützung der Gleichgewichtsbedingungen der Ströme in den in der Form $S = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{b}_{\lambda\lambda} \mathfrak{J}_\lambda^2$ dargestellten S-Wert vor allem die Ströme der Leiter mit festen Spannungen als fingierte Unabhängige einzusetzen und erst nachher noch übrigbleibende Stabströme als Unabhängige zu fingieren.

Auch hier zeigt sich, daß die Ermittlung der Unbekannten um so umständlicher wird, je höher der Unbestimmtheitsgrad des Systems ist, deshalb wird man auch Interesse an der Ermittlung des Unbestimmtheitsgrades vor Beginn der eigentlichen Systemberechnung haben. Geometrische Untersuchungen zeigen:

Der Unbestimmtheitsgrad eines Systems in bezug auf die Ströme ist gleich der Zahl der sogenannten praktischen Maschen, vermindert um die Anzahl der vorgeschriebenen Ströme. (Praktische Maschen sind die Flächenstücke, welche man wie die Projektionen der Flächen eines Polyeders beim Verfolgen aller Leiter eines Systems umfährt.)

Berechnung eines Systems mit Spannungen und Strömen als Unabhängige.

Dieses Problem ist schon vorher allgemein behandelt, es sind hier nur die für Rechnungen in Frage kommenden praktischen Schlüsse zu ziehn. Da die Ermittlung einer Art der Unbekannten um so umständlicher wird, je höher der Unbestimmtheitsgrad des Systems bezüglich dieser Größenart ist, berechnet man in den allermeisten Fällen mit Vorteil zuerst diejenigen Größen, deren Art den kleineren Unbestimmtheitsgrad ergibt.

Das auf beliebige Systeme hiermit anzuwendende Verfahren ist demnach zusammengefaßt das folgende:

1. Ermittlung des kleineren Unbestimmtheitsgrades.
2. Aufstellung aller ihm entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen.
3. Berechnung des S-Wertes als Funktion der echten und der richtiggewählten fingierten Unabhängigen.
4. Aufstellen der Zusatzgleichungen nach den partiellen Differentiationen des S-Wertes.
5. Auflösung dieses Gleichungssystems nach den fingierten Unabhängigen.
6. Ausrechnung der weiter noch interessierenden Größen.

Dieses Rechnungsverfahren sei nun an einigen Beispielen angewendet.

Beispiele für Systemberechnungen.

Unbestimmte Systeme ersten Grades.

1. Drehstromnetz mit einem freien Knoten (Bild 6).

Aufgedrückte Spannungen: $\mathfrak{V}_b$, $\mathfrak{V}_c$,
Knotenzahl: 4,
Unabhängige: 2,
Unbestimmtheitsgrad: $4 - 2 - 1 = 1$.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$1.\quad \mathfrak{V}_c - \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_1 = 0,$$
$$2.\quad \mathfrak{V}_b - \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_3 = 0,$$
$$3.\quad \mathfrak{V}_b + \mathfrak{V}_c + \mathfrak{E}_a = 0.$$

Fingierte Unabhängige: $\mathfrak{E}_1$.

Zusatzgleichung:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_1} = \frac{d}{d\mathfrak{E}_1} \tfrac{1}{2} \{ \mathfrak{E}_1^2 \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{E}_2^2 \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{E}_3^2 \mathfrak{a}_3 \} = 0$$

$\mathfrak{a}$ = Admittanz



$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_1} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{V})\,\mathfrak{a}_2 + (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{V}_b)\,\mathfrak{a}_3 = 0$$

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{V}_b \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{V}_c \mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3} = \mathfrak{V}_b \frac{\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{a}} - \mathfrak{V}_c \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}}.$$

2. Ringleitung mit einem freien Abzweig (Bild 7).

Die in einfacher Serieschaltung liegenden Leiter 2′ und 2″ sind als ein Leiter 2 aufzufassen.

Aufgedrückte Ströme: $\mathfrak{K}_b$, $\mathfrak{K}_c$,
Maschenzahl: 3,
Unabhängige: 2,
Unbestimmtheitsgrad: $3 - 2 = 1$.

Gleichgewichtsbedingungen:

1. $\mathfrak{K}_c - \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_1 = 0,$
2. $\mathfrak{K}_b - \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_3 = 0,$
3. $\mathfrak{K}_b + \mathfrak{K}_c + \mathfrak{J}_a + 0.$

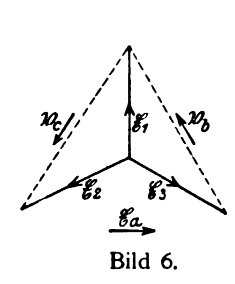


Bild 6.

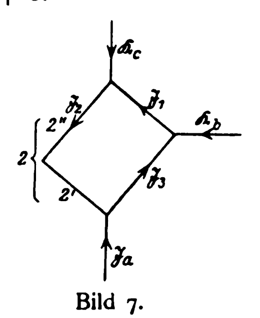


Bild 7.

Fingierte Unabhängige: $\mathfrak{J}_1$.
Zusatzgleichung:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{J}_1} = \frac{d}{d\mathfrak{J}_1}\, \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{J}_1^2 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{J}_2^2 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{J}_3^2 \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{J}_a^2 \mathfrak{b}_a\} = 0$$

$$\mathfrak{b} = \text{Impedanz}$$

$$\frac{dS}{d\mathfrak{J}_1} = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{b}_1 + (\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{K}_c)\,\mathfrak{b}_2 + (\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{K}_c)\,\mathfrak{b}_3 + 0 = 0.$$

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{K}_b \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{K}_c \mathfrak{b}_2}{\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3} = \mathfrak{K}_b \frac{\mathfrak{b}_3}{\mathfrak{b}} - \mathfrak{K}_c \frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{b}}.$$

3. Allgemeine Lösung des einfach unbestimmten Problems.

a) Einfache Unbestimmtheit bezüglich der Spannungen.

Die im folgenden wiedergegebene Methode schließt sich aufs engste dem Verfahren der Mechanik bei der Lösung des entsprechenden Problems an. Ein einfach unbestimmtes System werde durch Einführung von $\mathfrak{E}_{\eta}$ als fingierte Unabhängige zu einem bestimmten.

1. Es sei vorerst $\mathfrak{E}_{\eta} = 0$, dann haben alle $\mathfrak{E}_{\lambda}$-Werte den Betrag $\mathfrak{E}_{\lambda 0}$ (η beliebiger Index wie λ).
2. Infolge $\mathfrak{E}_{\eta} = \mathfrak{E}_{\eta}$ allein werden die $\mathfrak{E}_{\lambda}$-Werte gemäß Verknüpfungsgleichung $\mathfrak{E}_{\lambda 1} = \mathfrak{c}_{\eta\lambda}\, \mathfrak{E}_{\eta}$.

Die Superposition von 1. und 2. ergibt:

$$\mathfrak{E}_{\lambda} = \mathfrak{E}_{\lambda 0} + \mathfrak{c}_{\eta\lambda}\, \mathfrak{E}_{\eta}.$$

Nun ist

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{h} \mathfrak{S}_\lambda^2\, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} (\mathfrak{S}_{\lambda o} + c_{\eta\lambda}\, \mathfrak{S}_\eta)^2\, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}.$$

Nach dem 2. speziellen Satze von Castigliano:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{S}_\eta} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\eta\lambda}\,(\mathfrak{S}_{\lambda o} + c_{\eta\lambda}\,\mathfrak{S}_\eta)\, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} = \mathfrak{K}_\eta.$$

$$\mathfrak{S}_\eta = \frac{\mathfrak{K}_\eta - \sum_{\lambda=1}^{n} (c_{\eta\lambda}\,\mathfrak{S}_{\lambda o}\,\mathfrak{a}_{\lambda\lambda})}{\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\eta\lambda}^2\, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}}.$$

Für $\mathfrak{K}_\eta = 0$ geht diese Gleichung in die aus der Fachwerkslehre bekannte Form über.

$$\mathfrak{S}_\lambda = -\frac{\sum_{\lambda=1}^{n} (c_{\eta\lambda}\,\mathfrak{S}_{\lambda o}\,\mathfrak{a}_{\lambda\lambda})}{\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\eta\lambda}^2\, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}}.$$

b) Einfache Unbestimmtheit bezüglich der Ströme.

Der Analogieschluß ergibt

$$\mathfrak{S}_\eta = \frac{\mathfrak{B}_\eta - \sum_{\lambda=1}^{n} (\mathfrak{d}_{\eta\lambda}\,\mathfrak{J}_{\lambda o}\,\mathfrak{b}_{\lambda\lambda})}{\sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{d}_{\eta\lambda}^2\, \mathfrak{b}_{\lambda\lambda}}$$

und

$$\mathfrak{J}_\eta = -\frac{\sum_{\lambda=1}^{n} (\mathfrak{d}_{\eta\lambda}\,\mathfrak{J}_{\lambda o}\,\mathfrak{b}_{\lambda\lambda})}{\sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{d}_{\eta\lambda}^2\, \mathfrak{b}_{\lambda\lambda}}.$$

Unbestimmte Systeme zweiten Grades.

1. Wheatstonesche Brücke mit vorgeschriebenem Brückenstrom (Bild 8).

Aufgedrückte Größen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{K}$.

Man sucht den kleineren Unbestimmtheitsgrad.

Knotenzahl: 4	Maschenzahl: 3
Unabhängige Spannungen: 1	Unabhängige Ströme: 1
Unbestimmtheitsgrad	
bez. Spannungen	bez. Ströme
4 — 1 — 1 = 2	3 — 1 = 2

Es ist demnach gleichgültig ob wir die Spannungen oder die Ströme zuerst berechnen. Wir berechnen die Spannungen:

Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen.

1. $\mathfrak{V} + \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = 0$
2. $\mathfrak{V} + \mathfrak{E}_3 + \mathfrak{E}_4 = 0$
3. $-\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_3 + \mathfrak{E}_5 = 0$ $\qquad$ $\mathfrak{E}_5$ in Brücke mit Strom $\mathfrak{K}$

Fingierte Unabhängige $\mathfrak{E}_5$ und $\mathfrak{E}_1$.

$$S = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_1^2 \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{V} + \mathfrak{E}_1)^2 \mathfrak{a}_2 + (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_5)^2 \mathfrak{a}_3 + (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_5 - \mathfrak{V})^2 \mathfrak{a}_4\}$$

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_1} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{V} + \mathfrak{E}_1)\mathfrak{a}_2 + (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_5)^2 \mathfrak{a}_3 + (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_5 - \mathfrak{V})\mathfrak{a}_4 = 0,$$

$$\frac{dS}{d\mathfrak{E}_5} = 0 + 0 - (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_5)\mathfrak{a}_3 - (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_5 - \mathfrak{V})\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{K}.$$

Hieraus:

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{K} - \mathfrak{V}\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2}$$

weiter:

$$\mathfrak{E}_5 = \frac{\mathfrak{K} - \mathfrak{V}\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2} + \frac{\mathfrak{K} + \mathfrak{V}\mathfrak{a}_4}{\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4}$$

$$\mathfrak{E}_3 = -\frac{\mathfrak{K} + \mathfrak{V}\mathfrak{a}_4}{\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4}.$$

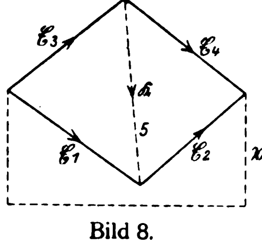


Bild 8.

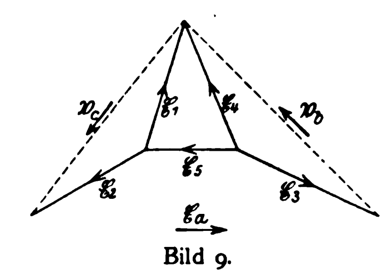


Bild 9.

Hieraus lassen sich leicht die bekannten Beziehungen der Wheatstoneschen Brücke ableiten.

Für $\mathfrak{K} = 0$ wird

$$\mathfrak{E}_5 = \frac{\mathfrak{V}\mathfrak{a}_4}{\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4} - \frac{\mathfrak{V}\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2}.$$

Wird nun Leiter 5 als Leiter ohne eingeprägte EMK angenommen, ist also für $\mathfrak{K} = 0$ auch $\mathfrak{E}_5 = 0$, dann gilt:

$$\frac{\mathfrak{a}_4}{\mathfrak{a}_3} = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1},$$

die bekannte Beziehung der abgeglichenen Brüche.

2. Drehstromnetz mit zwei freien Knoten (Bild 9).

Aufgedrückte Spannungen: $\mathfrak{V}_b$, $\mathfrak{V}_c$,

Knotenzahl: 5,

Unabhängige: 2,

Unbestimmtheitsgrad: $5 - 2 - 1 = 2$.

Gleichgewichtsbedingungen:

1. $\mathfrak{V}_c - \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_1 = 0,$
2. $\mathfrak{V}_b - \mathfrak{E}_4 + \mathfrak{E}_3 = 0,$
3. $\mathfrak{V}_b + \mathfrak{V}_c - \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_5 + \mathfrak{E}_3 = 0.$

Fingierte Unabhängige: $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_3$.

$$S = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{E}_1^2 \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{B}_c + \mathfrak{E}_1)^2 \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{E}_3^2 \mathfrak{a}_3 + (\mathfrak{B}_b + \mathfrak{E}_3)^2 \mathfrak{a}_4 + (\mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_3)\, \mathfrak{a}_5\}.$$

Zusatzgleichungen:

$$1.\quad \frac{dS}{d\mathfrak{E}_1} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{B}_c + \mathfrak{E}_1)\, \mathfrak{a}_2 - (\mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_3)\, \mathfrak{a}_5 = 0,$$

$$2.\quad \frac{dS}{d\mathfrak{E}_2} = \mathfrak{E}_3 \mathfrak{a}_3 + (\mathfrak{B}_b + \mathfrak{E}_3)\, \mathfrak{a}_4 + (\mathfrak{B}_b - \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_3)\, \mathfrak{a}_5 = 0,$$

daraus

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{B}_b \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_5 - \mathfrak{B}_c \mathfrak{a}_2 (\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4 + \mathfrak{a}_5)}{(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_3) + \mathfrak{a}_5 (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4)};$$

mit Hilfe $\mathfrak{E}_1$ kann man nun leicht alle anderen interessierenden Größen berechnen.

Spezialfälle:

a) $\mathfrak{a}_5$ unendlich groß, d. h. Stab 5 hat keinen Widerstand. Entspricht Netz mit nur 1 freien Knoten, die Formel für $\mathfrak{E}_1$ geht über in die früher erhaltene Formel für $\mathfrak{E}_1$ bei Drehstromnetz mit nur einem freien Knoten. Stäbe 1 und 4 sind dann parallel geschaltet.

b) $\mathfrak{a}_5 = 0$ Unterbrechung bei 5. Einfache Serieschaltung von Stab 1 und Stab 2 bzw. 3 und 4.

Die hier dargestellte Methode der Systemberechnung ist, soweit Sinuswechselströme und deren Grenzfall, der Gleichstrom, in Frage kommen, von größter Allgemeingültigkeit. Sie gibt einen stets gangbaren Weg zur Berechnung der Netze an, wobei natürlich bei komplizierten Netzen entsprechend dem hohen Unbestimmtheitsgrad auch ein recht kompliziertes System der Zusatzgleichungen auftreten wird. Der Vorteil der in Frage stehenden Methode liegt hauptsächlich darin, daß sie einen stets gangbaren Weg angibt, nach welchem man die Umständlichkeiten bei der Ermittlung vieler, in linearer Beziehung zueinander stehender Variablen so weit als möglich reduziert. Das auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen anzuwendende Eliminationsverfahren ist stets sehr einfach, so daß bei der Berechnung nur die Auswertung der nach den Castiglianoschen Sätzen erhaltenen Zusatzgleichungen als zeitraubende Arbeit übrig bleibt; woraus, wie schon früher angegeben wurde, folgt, daß die Schwierigkeit der Rechnung direkt vom Unbestimmtheitsgrade abhängt. Vereinfacht man das System schon vor dem Ansatze der Gleichgewichtsbedingungen in der Weise, daß man Serie-, Parallel- und Serie-Parallel-Schaltungen von Leitern auf möglichst einfache Leiter reduziert, dann kann man auf Grund der Methode relativ komplizierte Netze mit wenig Mühe untersuchen.

Zum Schluß sei noch auf die durch den ersten Satz von Castigliano gegebene Minimumsbedingung für den S-Wert, welche, weil $S \cong \tfrac{1}{2} VA = \tfrac{1}{2} \cdot$ Scheinleistung — des in Frage stehenden Systemteiles — ist, zu dem bekannten Minimumssatz des elektrischen Systems führt, wobei aber hier noch besonders nachgewiesen wird, daß in einem elektrischen System das Minimum der Wirkleistung und das Minimum der Blindleistung bei gleichem Systemzustand auftreten. Weitere Untersuchungen mit Hilfe des S-Wertes werden voraussichtlich noch zu neuen allgemeinen Resultaten führen.



Die Theorie der kompensierten Asynchronmaschine.

Von

Heinrich Kaden, Berlin N.

I. Einleitung.

Die kompensierte Asynchronmaschine ist eine asynchrone Maschine ohne Blindleistungsverbrauch; bei ihr ist der wattlose Strom, den die gewöhnliche Asynchronmaschine aus dem Netz entnimmt, bei gewissen Belastungen kompensiert. Das Prinzip dieser Maschine, eine kompensierte Asynchronmaschine ohne Zusatzmaschine (Phasenschieber, Kompensator), ist nichts Neues, es wurde bereits im Jahre 1901 von Heyland angegeben. Damals erlangte dieser Motor jedoch keine Bedeutung, denn der Käufer hatte kein Interesse, eine Maschine zu kaufen, die wegen ihres komplizierteren Aufbaues teuerer war als ein gewöhnlicher Asynchronmotor und die aber in bezug auf Ersparnis an Stromkosten keine Vorteile bot. Erst neuerdings, wo die Elektrizitätswerke mehr oder weniger dazu übergegangen sind, sich durch entsprechende Stromtarifgestaltung auch die entnommene Blindleistung bezahlen zu lassen, fand der kompensierte Asychronmotor sein Anwendungsgebiet.

Es soll nun die Aufgabe dieser Arbeit sein, diese Maschine analytisch und graphisch mit Hilfe des Kreisdiagramms zu untersuchen und sie in bezug auf ihre Betriebseigenschaften der gewöhnlichen Asynchronmaschine gegenüberzustellen.

II. Das Prinzip der Kompensierung

möge an Hand des gewöhnlichen Transformatordiagramms erläutert werden. Die Gegen-EMK E des Transformators, welche der aufgedrückten Netzspannung P_1 das Gleichgewicht hält, bringt der Transformator durch die zeitliche Änderung seines

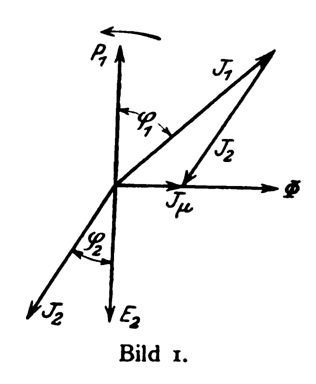


Bild 1.

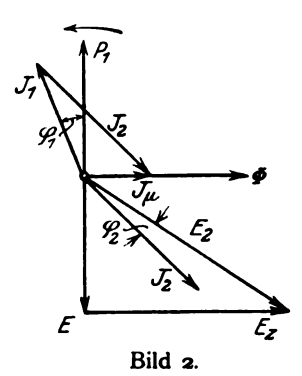


Bild 2.

magnetischen Kraftflusses Φ hervor, welcher von den magnetisierenden Amperewindungen I_μ erregt wird. In Bild 1 ist dieser Vorgang ohne Berücksichtigung der Spannungsabfälle dargestellt. Die magnetisierenden Amperewindungen I_μ sind, wie aus Bild 1 hervorgeht, gleich der geometrischen Summe der primären Amperewindungen I_1 und der sekundären Amperewindungen I_2.

I_μ ist zeitlich in Phase mit dem Fluß Φ und eilt der Netzspannung um $\frac{1}{4}$ Periode nach. Der primäre Phasenverschiebungswinkel φ_1 ist daher abhängig von der Größe des sekundären Stromes I_2 und seinem Phasenverschiebungswinkel φ_2 gegenüber der Spannung E.

Eilt nun I_2 der Spannung E voraus, wie in Bild 2, so kann φ_1 zu 0 bzw. voreilend werden. Hierin besteht das Prinzip der Kompensierung; der Magnetisierungsstrom wird nicht mehr aus dem Primarnetz entnommen, sondern er wird dem

Sekundärkreis zugeführt. Praktisch kann dieses dadurch geschehen, daß in den Sekundärkreis eine der Spannung E vorauseilende Spannung E_z eingeführt wird, welche zusammen mit E die gesamte im Sekundärkreis wirksame Spannung E_s ergibt.

Im Falle des Asynchronmotors muß nun beachtet werden, daß bei diesem im Sekundärkreis die jeweilige Schlupffrequenz vorhanden ist, welche sich nach der Belastung richtet. Diese Schlupffrequenz muß auch die Spannung E_z besitzen. Da nun zweckmäßigerweise diese Spannung E_z durch eine höhere Frequenz (Netzfrequenz) erzeugt wird, ist es nötig, einen Kollektor (Frequenzwandler) einzuschalten, welcher bekanntlich nur die Frequenz, nicht aber die Größe der Spannung umformt.

Durch diese Überlegungen kommt man auf den sogenannten Osnosmotor, dessen Schaltung in Bild 3 wiedergegeben ist. Andere Bauarten und Schaltungen sind in der Arbeit von Kade „Theorie und Wirkungsweise der kompensierten Asynchronmotoren", ETZ 1924, S. 456, zu finden. An dieser Stelle soll der Osnosmotor behandelt werden, welcher wohl der am häufigsten vorkommende ist. Alle anderen Arten, auch die Asynchronmotoren mit Kompensatoren (Phasenschiebern), können in ähnlicher Weise behandelt werden; die Grundeigenschaften bleiben immer dieselben.

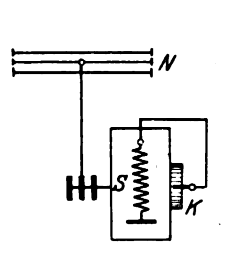


Bild 3.

Bei dem Osnosmotor liegt die Primärwicklung P im Läufer und ist über Schleifringe mit dem Netz (N) verbunden (siehe Bild 3). Auf dem Läufer befindet sich außerdem noch eine Gleichstromwicklung, deren Kupfergewicht nur einige Prozente von dem Gewicht der Primär- bzw. Sekundärwicklung beträgt und welche mit dem Kollektor K verbunden ist. Die Kollektorbürsten sind mit der Sekundärwicklung S im Ständer verbunden. Die Zusatzspannung E_z wird in der Kollektorwicklung induziert, deren Leiter durch das Drehfeld mit einer der Netzfrequenz entsprechenden Geschwindigkeit geschnitten werden. Die hohe Frequenz von E_z wird durch den Kollektor auf die jeweilig im Ständer herrschende Schlupffrequenz herabgesetzt. Die Phase von E_z kann beliebig durch Verdrehen der Bürsten eingestellt werden. Die Maschine kann nun sowohl als Motor als auch als Generator arbeiten; ihr Verhalten bei diesen Betriebszuständen kann am übersichtlichsten an Hand des Kreisdiagramms übersehen werden, dessen Ableitung die Aufgabe des nächsten Kapitels sein wird.

III. Die Ableitung des Kreisdiagramms.

Im folgenden sind die Vektoren mit großen deutschen Buchstaben, die Beträge der Vektoren mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Es bedeutet:

$\mathfrak{P}_1$ bzw. P_1 = Netzspannung pro Phase,
$\mathfrak{J}_1$ bzw. I_1 = der primäre Strom pro Phase,
r_1 = primärer Widerstand pro Phase,
S_1 = primäre Streuinduktivität pro Phase,

$\omega = 2\pi f_1$, worin f_1 die Frequenz des Netzes ist,

L = gesamte primäre Selbstinduktivität,

$\mathfrak{J}_\mu$ bzw. $I_\mu = \frac{P_1}{\omega L_1}$ = Magnetisierungsstrom,

M = gegenseitiger Induktionskoeffizient
(alle sekundäre Größen sind hier als auf die primäre Windungszahl reduziert eingeführt),

r_2 = Widerstand des sekundären Stromkreises pro Phase,

S_2 = Streuinduktivität pro Phase der Ständerwicklung,

$\mathfrak{J}_2$ bzw. I_2 = sekundäre Strom pro Phase,

s = Schlüpfung,

α = Winkel, um den das Kollektorstromsystem im Sinne der Rotordrehrichtung gegen das Ständerstromsystem verschoben ist
(Feld und Läufer haben beim läufergespeisten Motor entgegengesetzte Umlaufrichtung; siehe Bild 4),

$\varkappa$ = Verhältnis der wirksamen Windungszahlen der Kollektorwicklung zur Ständerwicklung,

$\mathfrak{E}$ bzw. E = die vom gemeinsamen Felde in der Primärwicklung induzierte EMK
(dieselbe EMK wird auch bei 100% Schlüpfung in der Ständerwicklung induziert),

L_2 = Selbstinduktionskoeffizient der Sekundärwicklung. $L_2 = M + S_2$.

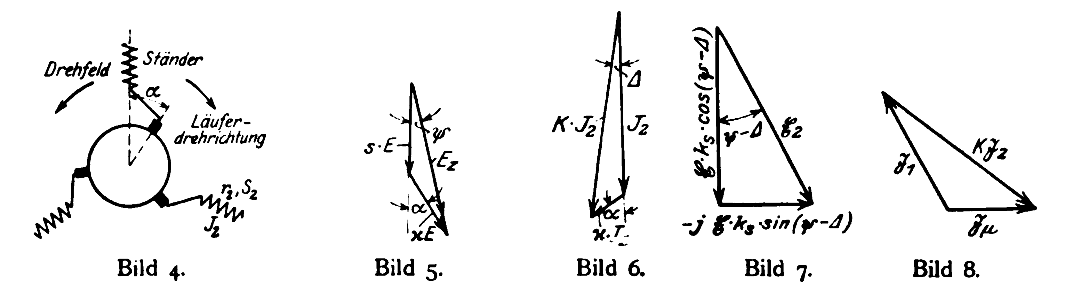


Bild 4. Bild 5. Bild 6. Bild 7. Bild 8.

Der im Sekundärkreis fließende Strom I_2 wird erzeugt von der gesamten im Sekundärkreis (Ständerwicklung + Kollektorwicklung) wirksamen Spannung

$$E_2 = E\sqrt{s^2 + \varkappa^2 + 2\varkappa s \cos\alpha}, \tag{1}$$

welche sich nach dem Kosinussatz ohne weiteres aus Bild 5 ergibt. Diese Spannung E_2 eilt der vom gemeinsamen Felde im Ständer induzierten Spannung $s \cdot E$ um den Winkel ψ voraus. Für die Rückwirkung des sekundären Stromes auf die Primärwicklung kommt aber nicht der Winkel ψ, sondern der Winkel $\psi - \Delta$ in Frage (Bild 6), denn der sekundäre Strom fließt sowohl in der Ständer- als auch in der Kollektorwicklung, wodurch das resultierende sekundäre Stromsystem um den Winkel Δ nacheilend gegenüber dem Ständerstromsystem verschoben wird (siehe Bild 6).

Aus Bild 5 erhält man:

$$\sin\psi = \frac{\varkappa \cdot \sin\alpha}{\sqrt{s^2 + \varkappa^2 + 2\varkappa s \cos\alpha}} = \frac{\varkappa \sin\alpha}{k_s}$$

$$\cos\psi = \frac{s + \varkappa\cos\alpha}{\sqrt{s^2 + \varkappa^2 + 2\varkappa s \cos\alpha}} = \frac{s + \varkappa\cos\alpha}{k_s}$$

hierin ist für $\sqrt{s^2 + \varkappa^2 + 2\varkappa s \cos\alpha} = k_s$ gesetzt.

Außerdem ist nach Bild 6

$$\sin\Delta = \frac{\varkappa\sin\alpha}{\sqrt{1+\varkappa^2+2\varkappa\cos\alpha}} = \frac{\varkappa\sin\alpha}{k}$$

$$\cos\Delta = \frac{1+\varkappa\cos\alpha}{\sqrt{1+\varkappa^2+2\varkappa\cos\alpha}} = \frac{1+\varkappa\cos\alpha}{k},$$

wenn für $\sqrt{1+\varkappa^2+2\varkappa\cos\alpha} = k$ gesetzt ist. Somit wird:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\psi-\Delta) &= \sin\psi\cos\Delta - \cos\psi\sin\Delta = \frac{\varkappa(1-s)\sin\alpha}{k_s\cdot k} \\ \cos(\psi-\Delta) &= \cos\psi\cos\Delta + \sin\psi\sin\Delta = \frac{\varkappa\cos\alpha(1+s)+\varkappa^2+s}{k_s\cdot k}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Für den Vektor der sekundären EMK ist also jetzt der Ausdruck zu setzen:

$$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}\cdot k_s[\cos(\psi-\Delta) - j\sin(\psi-\Delta)] \quad \text{(siehe Bild 7).}$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{E} = j\,\omega\,M\,\mathfrak{J}_\mu = j\,\omega\,M(\mathfrak{J}_1 + k\cdot\mathfrak{J}_2), \quad (3)$$

weil das magnetisierende Stromsystem $\mathfrak{J}_\mu$ gleich dem resultierenden primären und sekundären Stromsystem $\mathfrak{J}_1 + k\,\mathfrak{J}_2$ ist.

$$\mathfrak{J}_\mu = \mathfrak{J}_1 + k\,\mathfrak{J}_2 \quad \text{(siehe Bild 8).}$$

Es wird somit:

$$\mathfrak{E}_2 = j\,\omega\,M(\mathfrak{J}_1 + k\,\mathfrak{J}_2)\cdot k_s[\cos(\psi-\Delta) - j\sin(\psi-\Delta)]. \quad (4)$$

Die sekundäre EMK $\mathfrak{E}_2$ wird in der sekundären Impedanz $r_2 - j\,\omega\cdot s\cdot S_2$ verbraucht. Es besteht also die Beziehung

$$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{J}_2(r_2 - j\,\omega\cdot s\cdot S_2)$$

oder

$$\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{J}_2\cdot r_2 + \mathfrak{J}_2\cdot j\cdot\omega\cdot s\cdot S_2 = 0$$

und mit Einführung der Gleichung (4)

$$j\,\omega\,M(\mathfrak{J}_1 + k\,\mathfrak{J}_2)\,k_s[\cos(\psi-\Delta) - j\sin(\psi-\Delta)] - \mathfrak{J}_2\cdot r_2 + j\,\omega\,s\,S_2\,\mathfrak{J}_2 = 0. \quad (4a)$$

Setzt man nun für $\cos(\psi-\Delta)$ und $\sin(\psi-\Delta)$ die Ausdrücke aus Gleichung (2) ein, so erhält man

$$j\,\omega\,M(\mathfrak{J}_1 + k\,\mathfrak{J}_2)\cdot\frac{1}{k}[\varkappa\cos\alpha(1+s)+\varkappa^2+s - j\,\varkappa(1-s)\sin\alpha] - \mathfrak{J}_2 r_2 + j\,\omega\cdot s\cdot S_2\,\mathfrak{J}_2 = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\omega M}{k}\mathfrak{J}_1[j(\varkappa\cos\alpha(1+s)+\varkappa^2+s)+\varkappa(1-s)\sin\alpha] + \\ &+\mathfrak{J}_2\left[j\,\omega\,s\,L_2 + j\,\omega\,M[\varkappa(1+s)\cos\alpha+\varkappa^2] + \omega\,M\,k(1-s)\sin\alpha - r_2\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die primäre Spannungsgleichung lautet nach Bild 9:

$$\mathfrak{P}_1 + j\,\omega\,S_1\,\mathfrak{J}_1 - r_1\,\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{E} = 0$$

oder

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{J}_1(r_1 - j\,\omega\,S_1) - \mathfrak{E}$$

und mit Berücksichtigung von Gleichung (3)

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{J}_1(r_1 - j\,\omega\,S_1) - j\,\omega\,M(\mathfrak{J}_1 + k\,\mathfrak{J}_2).$$

Hieraus bekommt man

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{J}_1(r_1 - j\,\omega\,L_1) - j\,\omega\,M\,k\,\mathfrak{J}_2. \quad (6)$$

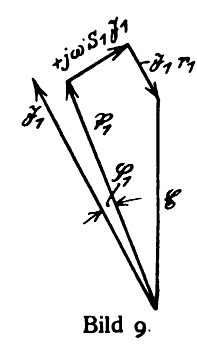
Aus dieser letzten Gleichung läßt sich $\mathfrak{J}_2$ eliminieren:

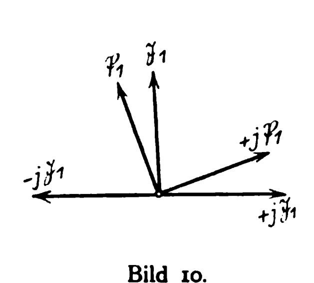
$$\left.\begin{aligned} j\,\omega\,M\,\mathfrak{J}_2 &= \frac{r_1}{k}\mathfrak{J}_1 - j\,\mathfrak{J}_1\frac{\omega L_1}{k} - \frac{\mathfrak{P}_1}{k} \\ \omega\,M\,\mathfrak{J}_2 &= -j\,\mathfrak{J}_1\frac{r_1}{k} - \mathfrak{J}_1\frac{\omega L_1}{k} + j\frac{\mathfrak{P}}{k} \\ \mathfrak{J}_2 &= -j\frac{\mathfrak{J}_1 r_1}{\omega M k} - \mathfrak{J}_1\frac{v_1}{k} + j\frac{\mathfrak{P}_1}{\omega\cdot M\cdot k} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ν_1 ist der **Hopkinsonsche** Streukoeffizient $\nu_1 = \frac{L_1}{M}$ und analog $\nu_2 = \frac{L_2}{M}$.

Setzt man die Werte der Gleichung (7) in Gleichung (5) ein, so kommt man auf einen Ausdruck, der einige Glieder mit dem Faktor $\varkappa\left(\frac{1}{\nu_1} - 1\right)$ enthält. Wir setzen diesen Faktor = 0, wodurch in unsere Gleichungen die Voraussetzung eingeführt wird, daß Primär- und Kollektorwicklung streuungslos miteinander verkettet sind. Da nun Primär- und Kollektorwicklung in denselben Nuten liegen, ist die Voraussetzung der streuungslosen Verkettung beider Wicklungen berechtigt. Wir erhalten jetzt nach einiger Umformung folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{J}_1 [r_1 (\nu_2 \cdot s + \varkappa \cos\alpha (1 + s) + \varkappa^2) + \nu_1 r_2] +$$
$$+ j\, \mathfrak{J}_1 \left[\omega L_1 s \left(\frac{1}{\nu_1} - \nu_2\right) + r_1 \left(\varkappa \sin\alpha (s - 1) + \frac{r_2 \cdot \nu_1}{\omega L_1}\right)\right] =$$
$$= \mathfrak{P}_1 (\nu_2 s + \varkappa \cos\alpha + s \varkappa \cos\alpha + \varkappa^2) + j\, \mathfrak{P}_1 \left[\frac{\nu_1 r_2}{\omega L_1} + s \varkappa \sin\alpha - \varkappa \sin\alpha\right].$$


Bild 9.


Bild 10.

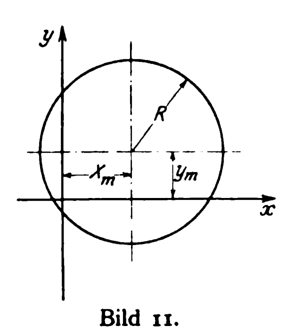


Bild 11.

Um auf reelle Werte überzugehen, multiplizieren wir die letzte Gleichung einmal skalar mit $\mathfrak{J}_1$ und dann skalar mit $j\,\mathfrak{J}_1$; die Wattkomponente von $\mathfrak{J}_1$ sei mit y, die wattlose Komponente mit x bezeichnet. Man erhält also mit Hilfe von Bild 10 folgende 2 Gleichungen:

$$I_1^2 [r_1 \nu_2 \cdot s + r_1 \varkappa \cos\alpha \cdot s + r_1 (\varkappa \cos\alpha + \varkappa^2) + \nu_1 r_2] =$$
$$= P_1 \cdot y [s (\nu_2 + \varkappa \cos\alpha) + \varkappa^2 + \varkappa \cos\alpha] + P_1 \cdot x \left[s \varkappa \sin\alpha + \frac{\nu_1 r_2}{\omega L_1} - \varkappa \sin\alpha\right],$$

$$I_1^2 \left[-\omega L_1 \sigma s \nu_2 + r_1 \varkappa \sin\alpha \cdot s + r_1 \left(-\varkappa \sin\alpha + \frac{r_2 \nu_1}{\omega L_1}\right)\right] =$$
$$= -P_1 \cdot x [s (\nu_2 + \varkappa \cos\alpha) + \varkappa^2 + \varkappa \cos\alpha] + P_1 y \left[s \varkappa \sin\alpha + \frac{\nu_1 r_2}{\omega L_1} - \varkappa \sin\alpha\right].$$

Hierin ist $\sigma = 1 - \frac{1}{\nu_1 \nu_2}$ = Gesamtstreuungskoeffizient. Mit Hilfe der letzten beiden Gleichungen kann nun die Schlüpfung s eliminiert werden. Unter Einführung folgender Konstanten:

$$1 + \frac{\varkappa \cos\alpha}{\nu_2} = A; \qquad 1 - \frac{\omega L_1}{\nu_1 r_2} \varkappa \sin\alpha = B;$$

$$\frac{\omega L_1}{\nu_1 r_2} (\varkappa^2 + \varkappa \cos\alpha) = C; \qquad \frac{\varkappa \sin\alpha}{\nu_2} = D;$$

erhält man jetzt die eine Gleichung:

$$\frac{C \cdot P_1 \cdot y + B \cdot P_1 \cdot x - C \cdot I_1^2 r_1 - I_1^2 \omega L_1}{A \cdot I_1^2 \cdot r_1 - A \cdot P_1 y - D \cdot P_1 \cdot x} = \frac{B P_1 y - C \cdot P_1 x - B \cdot I_1^2 r_1}{A \cdot P_1 x - I_1^2 (\omega L_1 \sigma - D r_1) - D P_1 y}.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit Zähler und Nenner, so heben sich alle Glieder mit $x \cdot y$ fort und man kann durch I_1^2 dividieren. Setzt man endlich für $I_1^2 = x^2 + y^2$ ein, so kommt man auf eine Gleichung von der Form:

$$x^2 - \frac{A + \sigma B}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}(AB - CD) + \frac{r_1}{\omega L_1}(\sigma C - D) + \sigma} \cdot \frac{P_1}{\omega L_1} x +$$

$$+ y^2 - \frac{\frac{2 r_1}{\omega L_1}(AB - CD) + \sigma C - D}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}(AB - CD) + \frac{r_1}{\omega L_1}(\sigma C - D) + \sigma} \cdot \frac{P_1}{\omega L_1} \cdot y =$$

$$= \frac{-AB + CD}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}(AB - CD) + \frac{r_1}{\omega L_1}(\sigma C - D) + \sigma} \cdot \frac{P_1^2}{(\omega L_1)^2}.$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Brüche sind bei gegebener Maschine für einen bestimmten Winkel α konstante Werte. Es seien also zunächst nur rein mathematisch die Konstanten x_m, y_m und R in die letzte Gleichung eingeführt:

$$x^2 - 2 x_m x + y^2 - 2 y y_m = R^2 - x_m^2 - y_m^2. \tag{8a}$$

Addiert man jetzt auf beiden Seiten der Gleichung $x_m^2 + y_m^2$, so entsteht die Gleichung

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = R^2, \tag{8b}$$

welche sofort als die allgemeine Gleichung des Kreises in kartesischen Koordinaten mit dem Radius R und den Mittelpunktskoordinaten x_m, y_m zu erkennen ist (Bild 11). Der geometrische Ort der Endpunkte aller Vektoren des Primärstromes $\mathfrak{J}_1$ ist also ein Kreis.

Es ergibt sich weiterhin, daß es für ein und dieselbe Maschine unendlich viel Kreise gibt, weil die Konstanten x_m, y_m und R vom Winkel α abhängig sind. Die Formeln für die Mittelpunktskoordinaten x_m und y_m lauten:

$$x_m = \frac{A + B\sigma}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}(AB - CD) + \frac{r_1}{\omega L_1}(\sigma C - D) + \sigma} \cdot \frac{P_1}{2 \omega L_1}, \tag{9a}$$

$$y_m = \frac{\frac{2 r_1}{\omega L_1}(AB - CD) + \sigma C - D}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}(AB - CD) + \frac{r_1}{\omega L_1}(\sigma C - D) + \sigma} \cdot \frac{P_1}{2 \omega L_1}. \tag{9b}$$

Für den Radius R erhält man

$$R^2 = x_m^2 + y_m^2 + \frac{CD - AB}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}(AB - CD) + \frac{r_1}{\omega L_1}(\sigma C - D) + \sigma} \cdot \frac{P_1^2}{(\omega L_1)^2}.$$

Nach Einsetzen der Werte für x_m und y_m wird nach einigen Umformungen

$$R = \frac{\sqrt{(A - B\sigma)^2 + (\sigma C + D)^2}}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}(AB - CD) + \frac{r_1}{\omega L_1}(\sigma C - D) + \sigma} \cdot \frac{P_1}{2 \omega L_1}. \tag{9c}$$

Wird für $\varkappa = 0$ gesetzt, so entstehen die bekannten Formeln für den Kreis des gewöhnlichen Asynchronmotors. Für $\varkappa = 0$ wird somit:

$$A = 1; \qquad B = 1; \qquad C = 0; \qquad D = 0$$

und



$$x_{m0} = \frac{1+\sigma}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}+\sigma} \cdot \frac{P_1}{2\,\omega L_1}; \qquad y_{m0} = \frac{\frac{2\,r_1}{\omega L_1}}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}+\sigma} \cdot \frac{P_1}{2\,\omega L_1};$$

$$R_0 = \frac{1-\sigma}{\frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}+\sigma} \cdot \frac{P_1}{2\,\omega L_1}.$$

Bei Vernachlässigung des primären Widerstandes ($r_1 = 0$) werden die Formeln für die Kreise der kompensierten Asynchronmaschine bedeutend einfacher:

$$x_{m\,r_1=0} = \frac{A + B\sigma}{\sigma} \cdot \frac{P_1}{2\,\omega L_1}; \qquad y_{m\,r_1=0} = \frac{\sigma C - D}{\sigma} \cdot \frac{P_1}{2\,\omega L_1}$$

und

$$R_{r_1=0}' = \frac{\sqrt{(A - B\sigma)^2 + (C\sigma + D)^2}}{\sigma} \cdot \frac{P_1}{2\,\omega L_1}.$$

Aus der Tatsache, daß die Konstanten B und C den sekundären Widerstand r_2 enthalten, geht hervor, daß die Kreise der kompensierten Asynchronmaschine im Gegensatz zur gewöhnlichen Asynchronmaschine nicht mehr vom sekundären Widerstand r_2 unabhängig sind. Dieses geht auch daraus hervor, daß z. B. im Synchronismus der sekundäre Strom sich berechnet nach

$$I_{2s} = \frac{E \cdot \varkappa}{r_2}, \tag{10}$$

weil die Frequenz im Ständer gleich Null ist, also Gleichstrom fließt.

Nachdem das Stromdiagramm festgelegt ist, bleibt noch übrig, die bei einer beliebigen Belastung auftretenden Betriebsgrößen (Verluste, abgegebene Leistung, Drehmoment usw.) aus dem Kreisdiagramm herzuleiten.

a) Der primäre Kupferverlust V_1

ergibt sich aus der bekannten Beziehung

$$V_1 = I_1^2 \cdot r_1.$$

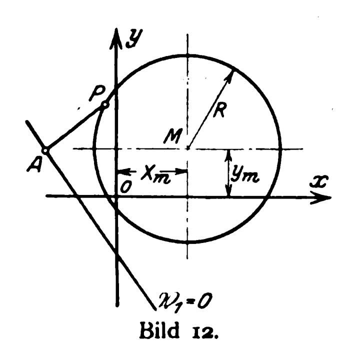


Bild 12.

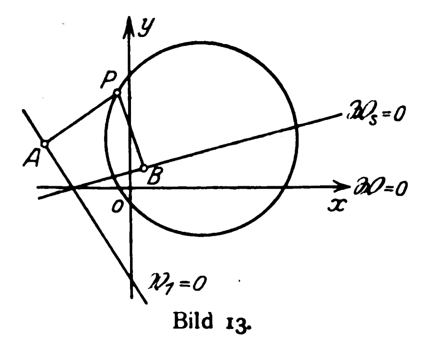


Bild 13.

Nun ist $I_1^2 = x^2 + y^2$ oder nach Gleichung (8a)

$$I_1^2 = x^2 + y^2 = R^2 - x_m^2 - y_m^2 + 2\,x_m\,x + 2\,y_m\,y = 2\left(x_m\,x + y_m\,y - \frac{\varrho^2}{2}\right),$$

worin

$$\frac{\varrho^2}{2} = R^2 - x_m^2 - y^2$$

gesetzt ist. Man kann also für V_1 schreiben

$$V_1 = 2\,r_1\left(x_m \cdot x + y_m\,y - \frac{\varrho^2}{2}\right) = 2\,r_1\,\mathfrak{W}_1 \tag{11}$$

$\mathfrak{B}_1 = 0$ ist nun die Gleichung einer geraden Linie, welche den in Bild 12 gezeichneten Verlauf hat. Für alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen, ist I_1^2 und damit $V_1 = I_1^2 \cdot r_1 = 0$. Für alle Punkte der Ebene, welche außerhalb der Geraden liegen, also auch Punkte P des Kreises, nimmt V_1 einen Wert an, welcher gleich ist dem Abstand dieses Punktes von der Geraden multipliziert mit dem Abstand des Kreismittelpunktes M vom Nullpunkt des Koordinatensystems.

$$V_1 = 2 r_1 \mathfrak{B}_1 = 2 r_1 \cdot \overline{PA} \cdot \overline{OM} = 2 r_1 \overline{PA} \sqrt{x_m^2 + y_m^2}. \tag{12}$$

Der Beweis dieses Satzes ist in der Wechselstromtechnik von Arnold, Bd. 1, Seite 79, zu finden.

Der so ermittelte Wattverlust gilt, wie alle aus dem Diagramm entnommenen Leistungen, nur für eine Phase. Der Gesamtkupferverlust aller 3 Phasen ist wegen der Symmetrie der Maschine 3 mal so groß.

b) Die auf die Sekundärseite übertragene Leitung W_S

ist gleich der Gesamtleistung W verringert um den Verlust V_1 in der Primarwicklung. Da die Leistungen skalare Größen sind, kann man sie algebraisch subtrahieren:

$$W_S = W - V_1 = P_1 y - V_1 = P_1 y - I_1^2 r_1,$$

denn die Netzleistung ist gleich der Wattkomponente y des Primärstromes, multipliziert mit der Netzspannung. Setzt man den Wert für V_1 aus Formel (11) ein, bekommt man:

$$W_S = 2 r_1 \left(\frac{P_1 y}{2 r_1} - \mathfrak{B}_1\right) = 2 r_1 (\mathfrak{W} - \mathfrak{B}_1). \tag{13}$$

$\mathfrak{W} = 0$ ist die Gleichung der Abszissenachse, und für alle Punkte außerhalb der Abszissenachse wird die Gesamtleistung

$$W = P_1 y. \tag{13a}$$

Für W_S ergibt sich also unter Berücksichtigung der Gleichung (11)

$$W_S = 2 r_1 (\mathfrak{W} - \mathfrak{B}_1) = 2 r_1 \left(- x_m x - \left(y_m - \frac{P_1}{2 r_1}\right) y + \frac{\varrho^2}{2}\right) = 2 r_1 \mathfrak{W}_S. \tag{14}$$

Die Gleichung $\mathfrak{W}_S = 0$ ist die Gleichung einer Geraden, welche den in Bild 13 gezeichneten Verlauf hat. Aus den Formeln (11) und (14) geht hervor, daß die Geraden $\mathfrak{W}_S = 0$ und $\mathfrak{B}_1 = 0$ in demselben Punkte die Abszissenachse schneiden. Für einen Punkt P außerhalb der Geraden $\mathfrak{W}_S = 0$ nimmt $\mathfrak{W}_S$ einen Wert an, welcher gleich ist dem Abstande $\overline{PB}$ dieses Punktes von der Geraden $\mathfrak{W}_S = 0$, multipliziert mit den Konstanten

$$\sqrt{x_m^2 + \left(y_m - \frac{P_1}{2 r_1}\right)^2}.$$

$$W_S = 2 r_1 \cdot \overline{PB} \sqrt{x_m^2 + \left(y_m - \frac{P_1}{2 r_1}\right)^2}\,[1]. \tag{15}$$

c) Der Gesamtkupferverlust V

ist die Summe der primären und sekundären Verluste.

$$V = V_1 + V_2 = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2.$$

Um I_2 aus dem Diagramm bestimmen zu können, erinnern wir uns der Gleichung (7), welche lautet:

$$\mathfrak{J}_2 = - j \mathfrak{J}_1 \frac{r_1}{\omega M k} - \mathfrak{J}_1 \frac{v_1}{k} + j \frac{P_1}{\omega M k}$$

oder

[1]) Siehe Arnold, Wechselstromtechnik, Bd. I, S. 81.

$$\frac{k}{v_1} \cdot \mathfrak{J}_2 = -\left(\frac{\mathfrak{P}_1}{r_1 - j\,\omega L_1} - \mathfrak{J}_1\right)\left(1 + j\frac{r_1}{\omega L_1}\right). \tag{16}$$

$\frac{\mathfrak{P}_1}{r_1 - j\,\omega L_1}$ ist der Leerlaufstrom $\mathfrak{J}_0$, den die Maschine bei Schaltung als gewöhnlicher Asynchronmotor aufnimmt. Es ergibt sich also die in Bild 14 wiedergegebene Darstellung:

$$\mathfrak{J}_2' = \mathfrak{J}_0 - \mathfrak{J}_1.$$

$\mathfrak{J}_2$ selbst erhält man aus $\mathfrak{J}_2'$ nach der Beziehung:

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{v_1}{k}\mathfrak{J}_2' \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{\omega L_1}\right)^2}, \tag{17}$$

was aus Formel (16) hervorgeht. Außerdem ergibt sich aus Formel (16), daß das Koordinatensystem des I_2-Diagramms um den Winkel

$$\varepsilon = \operatorname{arc\,tg}\frac{r_1}{\omega L_1}$$

gegen das ursprüngliche System verdreht ist (siehe Bild 14). Der Faktor $\sqrt{1 + \frac{r_1^2}{(\omega L_1)^2}}$

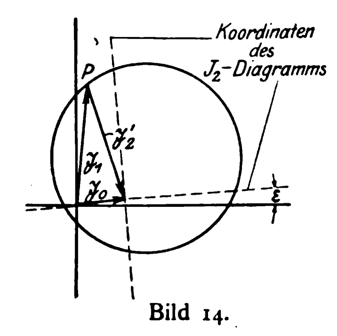


Bild 14.

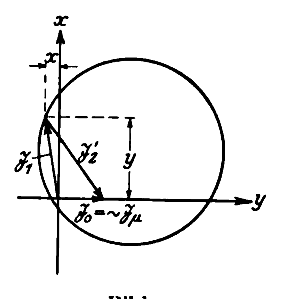


Bild 15.

in Formel (17) hat praktisch fast genau den Wert 1. Es ist daher ohne weiteres zulässig, zu schreiben:

$$\mathfrak{J}_2 \sim \frac{v_1}{k}\mathfrak{J}_2'.$$

Der Winkel ε hat bei ausgeführten Maschinen die Größenordnung von $\frac{1}{2} \div 1^0$, so daß der Winkel ε für praktische Zwecke vollkommen zu vernachlässigen ist. Es genügt also die in Bild 15 wiedergegebene Darstellung für $\mathfrak{J}_2$.

Weiterhin ist noch zu beachten, daß wir durch die Fortlassung des auf Seite 469 erwähnten Faktor $\varkappa\left(\frac{1}{v_1} - 1\right)$ die Voraussetzung in unsere Gleichungen eingeführt haben, daß die Kollektorwicklung streuungslos mit der Primärwicklung verkettet ist. Wir müssen aber jetzt für k den Wert

$$k' = \sqrt{1 + (v_1\varkappa)^2 + 2\,v_1\varkappa\cos\alpha}$$

setzen. Wir erhalten also für $\mathfrak{J}_2$ endgültig

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{v_1}{k'}\mathfrak{J}_2'. \tag{18}$$

Für den sekundären Wattverlust ergibt sich jetzt

$$V_2 = I_2^2\, r_2 = \left(I_2'\frac{v_1}{k'}\right)^2 \cdot r_2.$$

Nach Bild 15 ist

$$I_2'^2 = (x - I_\mu)^2 + y^2 = x^2 - 2\,I_\mu\, x + I_\mu^2 + y^2.$$

Wird aus Gleichung (14) der Wert für $x^2 + y^2$ eingesetzt, so wird

$$I_2'^2 = 2\left[(x_m - I_\mu)\,x + y_m\,y - \frac{\varrho^2 - I_\mu^2}{2}\right]$$

und

$$V_2 = I_2^2\,r_2 = 2\left(\frac{v_1}{k'}\right)^2 r_2\left[(x_m - I_\mu)\,x + y_m\,y - \frac{\varrho^2 - I_\mu^2}{2}\right] = 2\left(\frac{v_1}{k'}\right)^2 r_2\,\mathfrak{W}_2. \quad (19)$$

Die Gleichung $\mathfrak{W}_2 = 0$ stellt wieder eine Gerade dar wie in Bild 16. Für Punkte, die auf dem Kreise liegen, ist dann

$$V_2 = 2\,r_2\frac{v_1^2}{k'^2}\,\overline{PC}\sqrt{(x_m - I_\mu)^2 + y_m^2}. \quad (20)$$

Beim gewöhnlichen Asynchronmotor geht die Linie $\mathfrak{W}_2 = 0$ durch den Leerlaufpunkt (Bild 17). Es folgt daraus, daß der sekundäre Kupferverlust V_2 bei Leerlauf Null ist; das ist auch ohne weiteres einzusehen, denn der Sekundärstrom I_2 des gewöhnlichen Asynchronmotors ist bei Leerlauf Null. Dagegen verschwindet der Sekundärstrom der kompensierten Maschine bei Leerlauf nicht; es folgt daraus, daß z. B. bei überkompensierten Motoren der Wirkungsgrad infolge der größeren Stromwärmeverluste geringer wird.

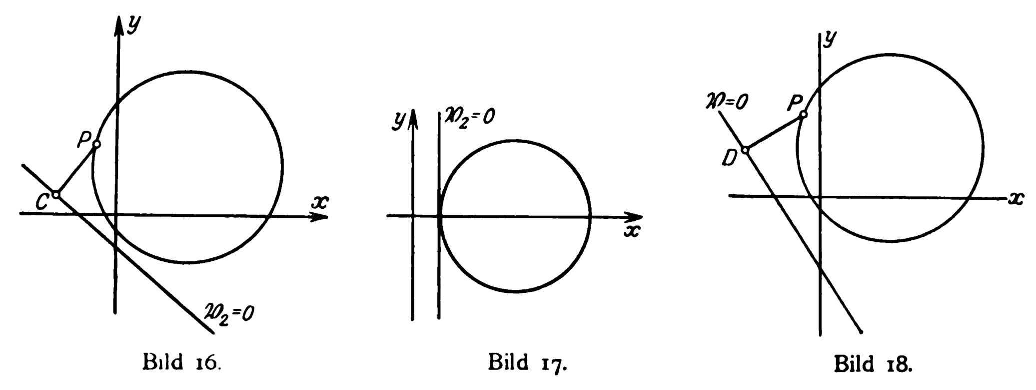


Bild 16. Bild 17. Bild 18.

Für den gesamten Kupferverlust der Maschine haben wir jetzt [Gleichung (11) und (19)]:

$$V = V_1 + V_2 = 2\,r_1\left(x_m\,x + y_m\,y - \frac{\varrho^2}{2}\right) + 2\,r_2\frac{v_1^2}{k'^2}\left[(x_m - I_\mu)\,x + y_m\,y - \frac{\varrho^2 - I_\mu^2}{2}\right]$$

oder

$$V = 2\,r_1\left[\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{v_1}{k'^2}\left(1 - \frac{I_\mu}{x_m}\right)\right)x_m\,x + \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\frac{v_1^2}{k'^2}\right)y_m\cdot y - \frac{1 + \frac{r_2}{r_1}\frac{v_1^2}{k'^2}\left(1 - \frac{I_\mu}{\varrho^2}\right)}{2}\varrho^2\right]. \quad (21)$$

Hierfür wird $V = 2\,r_1\,\mathfrak{W}$ gesetzt. Für $\mathfrak{W}$ schreiben wir der Einfachheit halber

$$\mathfrak{W} = Q\,x_m\,x + S\,y_m\,y - T\frac{\varrho^2}{2}. \quad (22)$$

Für Punkte P des Kreises erhalten wir dann:

$$V = 2\,r_1\,PD\sqrt{(Q\,x_m)^2 + (S\,y_m)^2} \quad (23)$$

(siehe Bild 18).

d) Die nutzbar abgegebene Leistung

ist die Differenz von zugeführter Leistung W und Gesamtverlust V.

$$W_m = W - V.$$

Setzt man für W bzw. V die Werte aus Gleichung (13a) bzw. (22) ein, so erhält man

$$W_m = 2\,r_1\left(\frac{P_1\,y}{2\,r_1} - \mathfrak{W}\right) = 2\,r_1\left[-Q\,x_m\,x - \left(S\,y_m - \frac{P_1}{2\,r_1}\right)y + T\,\frac{\rho^2}{2}\right] = 2\,r_1\,\mathfrak{W}_m. \quad (24)$$

Die Gleichung $\mathfrak{W}_m = 0$ ist eine Gerade, deren Verlauf in Bild 19 dargestellt ist. Für alle Punkte, die auf der Geraden liegen, ist die Nutzleistung $= 0$. Die Gerade schneidet den Kreis also im Leerlauf- L und im Kurzschlußpunkt KS; in diesen beiden Punkten wird die ganze zugeführte Leistung im primären und sekundären Widerstand verbraucht, weshalb die Nutzleistung $= 0$ wird. Für alle Punkte des Kreises, die zwischen diesen beiden ausgezeichneten Punkten liegen, ist die Nutzleistung:

$$W_m = 2\,r_1\,\mathfrak{W}_m = 2\,r_1\sqrt{(Q\,x_m)^2 + \left(S\,y_m - \frac{P_1}{2\,r_1}\right)^2}. \quad (25)$$

e) Das Drehmoment D,

welches der Motor erzeugt, greift nach dem Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung am Läufer sowohl als auch am Ständer in derselben Größe an. Da am Umfange des Läufers das Drehfeld mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \frac{2\,\pi\,f_1}{p}$ rotiert, ist die vom Läufer auf dem Ständer übertragene Leistung

$$3\,W_L = 9{,}81\,\omega_1\,D_{m\,kg}. \quad (26)$$

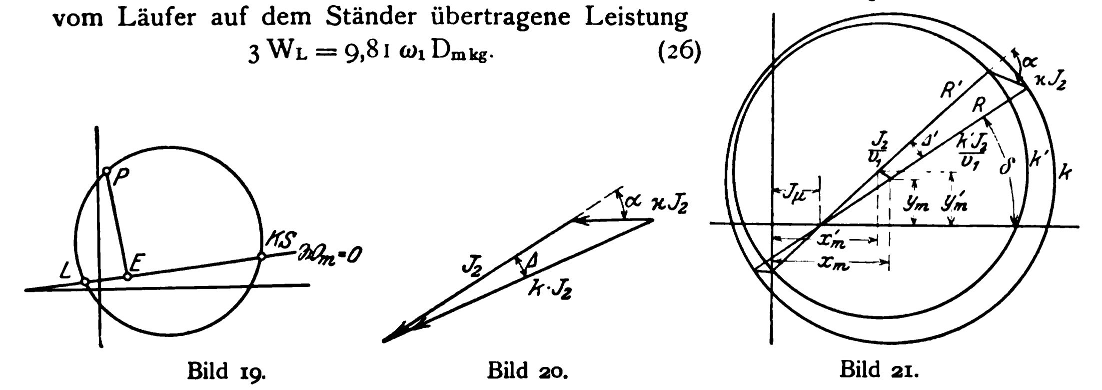


Bild 19. Bild 20. Bild 21.

Man kann also das Drehmoment in einfacher Weise aus der vom Läufer auf den Ständer übertragenen Leistung bestimmen, denn ω_1 ist konstant bei konstanter Netzfrequenz.

Es bleibt uns also noch die Aufgabe, W_L aus dem Diagramm zu ermitteln; denn W_L ist nicht gleich der auf die Sekundärseite übertragenen Leitung W_S, sondern W_L ist je nach Bürstenwinkel kleiner oder größer als W_S, weil sich außer der Primärwicklung noch ein Teil der Sekundärwicklung, die Kollektorwicklung, auf dem Läufer befindet. Es wirkt also Primär- und Kollektorwicklung bzw. die Ständerwicklung drehmomentbildend am Umfange des Läufers bzw. Ständers. Vergegenwärtigen wir uns noch einmal Bild 6, aus dem hervorgeht, daß das Gesamtsekundärstromsystem $k \cdot I_2$ sich aus der Komponente I_2 des Ständerstromsystems und der Komponente $\varkappa \cdot I_2$ des Kollektorstromsystems zusammensetzt (s. Bild 20), so ist wohl einzusehen, daß der geometrische Ort der Endpunkte derjenigen Vektoren, die das für die Bildung des Drehmoments am Läuferumfange in Frage kommende Stromsystem darstellen, der Kreis für den Vektor $\mathfrak{J}_2$ ist.

Die Mittelpunktskoordinaten x_m' und y_m' und der Radius R' dieses neuen Kreises ergeben sich nun wie folgt (s. Bild 21).

Das Ständerstromsystem I_2 ist direkt proportional dem Gesamtsekundärstromsystem $k \cdot I_2$. Es folgt daher, daß, wenn $k \cdot I_2$ seinen Maximalwert erreicht, auch I_2 seinen größten Wert annimmt (Bild 21). Geht demnach $k \cdot I_2$ durch den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises K, so geht auch der Vektor für I_2 durch den Mittelpunkt des

zugehörigen Kreises K'. Es folgen daher mit den Bezeichnungen von Bild 21 folgende Beziehungen:

$$\frac{1}{k'}\left(R + \sqrt{(x_m - I_\mu)^2 + y^2}\right) = R' + \sqrt{(x_m' - I_\mu)^2 + y_m'^2}$$

und

$$\frac{1}{k'}\left(R - \sqrt{(x_m - I_\mu)^2 + y_m^2}\right) = R' - \sqrt{(x_m' - I_\mu)^2 + y_m'^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$R' = \frac{1}{k'} R. \tag{27}$$

Setzt man jetzt für $\frac{y_m}{x_m - I_\mu} = \operatorname{tg} \delta$, so gilt die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_m}{\sin \delta} = k' \cdot \frac{y_m'}{\sin(\delta + \Delta')} \quad \text{und daraus} \quad y_m' = \frac{\sin(\delta + \Delta')}{k' \sin \delta} \cdot y_m \\ &\text{Da} \quad \frac{y_m}{\sin \delta} = \frac{x_m - I_\mu}{\cos \delta} \quad \text{ist, so gilt auch} \quad y_m' = \frac{\sin(\delta + \Delta')}{k' \cos \delta}(x_m - I_\mu) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Aus den bei Ableitung der Formel (18) angeführten Gründen ist jetzt für Δ

$$\Delta' = \arcsin \frac{v_1 \varkappa \cdot \sin \alpha}{\sqrt{1 + \varkappa^2 + 2 \varkappa \cos \alpha}}$$

einzusetzen.

Bedenkt man, daß $\frac{y_m'}{x_m' - I_\mu} = \operatorname{tg}(\delta + \Delta')$ ist, so ergibt sich für

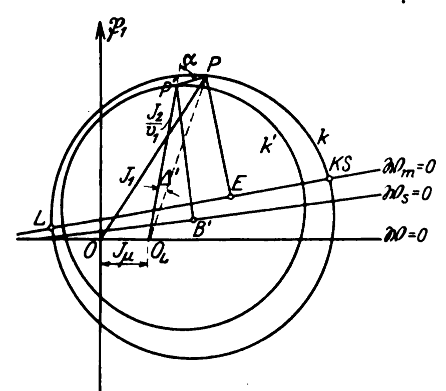


Bild 22.

$$\left.\begin{aligned} &x_m' - I_\mu = \frac{\cos(\delta + \Delta')}{k' \cos \delta}(x_m - I_\mu) \\ &\text{oder} \\ &x_m' = \frac{\cos(\delta + \Delta')}{k' \cos \delta}(x_m - I_\mu) + I_\mu \\ &\text{oder, wenn man für} \\ &\frac{x_m - I_\mu}{\cos \delta} = \frac{y_m}{\sin \delta} \\ &\text{setzt:} \\ &x_m' = \frac{\cos(\delta + \Delta')}{k' \sin \delta} y_m + I_\mu \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Für die Leistung W_L, aus der das Drehmoment zu errechnen ist, wäre jetzt zu schreiben:

$$W_L = 2 r_1 \left(- x_m \frac{x}{x'} x' - \left(y_m \frac{y}{y'} - \frac{P_1}{2 r_1}\right) y' + \frac{\varrho^2}{2}\right),$$

weil der Punkt P' die Koordinaten x' und y' hat. Strenggenommen ist nun die Gleichung

$$\mathfrak{W}_L = - x_m \frac{x}{x'} x' - \left(y_m \frac{y}{y'} - \frac{P_1}{2 r_1}\right) y' + \frac{\varrho^2}{2} = 0$$

keine gerade Linie mehr, weil die Quotienten $\frac{x}{x'}$ und $\frac{y}{y'}$ keine Konstanten sind. Rechnet man nun für verschiedene Punkte W_L nach, so findet man, daß man praktisch genau setzen kann (s. Bild 22):

$$W_L = 2 r_1 \mathfrak{W}_L \sim 2 r_1 \overline{P'B'} \sqrt{x_m^2 + \left(y_m - \frac{P_1}{2 r_1}\right)^2}. \tag{30}$$

Der Fehler ist dabei kleiner als 1 %. $\mathfrak{W}_L = 0$ fällt also mit der Gleichung $\mathfrak{W}_S = 0$ zusammen. Für alle Punkte P_1, die auf dem Kreise K' liegen, wird demnach

$$\mathfrak{W}_L = \overline{P'B'} \sqrt{x_m^2 + \left(y_m - \frac{P_1}{2 r_1}\right)^2}.$$

Für das Drehmoment D_{mkg} in mkg erhält man nun

$$D_{mkg} = \frac{3 \cdot W_L}{9{,}81 \cdot \omega_1} = \frac{6 r_1 \overline{P'B'} \sqrt{x_m^2 + \left(y_m - \frac{P_1}{2 r_1}\right)^2}}{9{,}81 \cdot \frac{2 \pi f_1}{p}}$$

oder, da $\frac{f_1}{p} = \frac{n_s}{60}$ (n_s = synchrone Tourenzahl) ist,

$$D_{mkg} = 5{,}85 \cdot r_1 \overline{P'B'} \sqrt{x_m^2 + \left(y_m - \frac{P_1}{2 r_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{n_s}. \tag{31}$$

Die Aufgabe, wie sie in der Praxis meistens vorliegt, ist so, daß man für ein gegebenes Drehmoment die Betriebsgrößen des Motors aus dem vorliegenden Diagramm zu ermitteln hat. Zu diesem Zwecke hat man folgendermaßen vorzugehen:

Aus Formel (31) bestimmt man zunächst die Strecke $\overline{P'B'}$, wodurch man den Punkt P' auf dem Kreise K' hat. Die Verbindungslinie vom Punkte P' nach dem Endpunkte O_L des Vektors für den Magnetisierungsstrom I_μ gibt den sekundären Strom I_2 dividiert durch v_1.

$$I_2 = \overline{P' O_L} \cdot v_1 \text{ (siehe Bild 22).}$$

Um den entsprechenden Punkt P des Kreises K zu finden, tragen wir an $\frac{I_2}{v_1} = \overline{P' O_L}$ im Punkte P' den Winkel α an. Der Schnittpunkt des einen Schenkels vom Winkel α mit dem Kreise K gibt den gesuchten Punkt P, dessen Verbindungsgerade $\overline{PO}$ mit dem Nullpunkt O des Koordinatensystems direkt den primären Strom I_1 ergibt. Durch den Abstand $\overline{PE}$ des Punktes P von der Geraden $W_m = 0$ erhält man dann nach Gleichung (25) die abgegebene Leistung W_m, woraus man dann die Tourenzahl der Maschine nach der Beziehung:

$$3 W_m = 9{,}81 \cdot D_{mkg} \cdot \omega_2;$$

$$n = \frac{3 \cdot 60 \cdot W_m}{2 \pi D_{mkg} \cdot 9{,}81} = 2{,}91 \frac{W_m}{D_{mkg}} \text{ in U/Min.} \tag{32}$$

errechnen kann.

IV. Die Schlüpfung

läßt sich aus dem Diagramm nicht, wie bei dem gewöhnlichen Asynchronmotor, durch eine einfache Konstruktion ermitteln, weil die Leerlaufsdrehzahl nicht von vornherein bekannt ist. Man erkennt dieses, wenn man sich für die primäre Leistung W in Abhängkeit von der Schlüpfung einen analytischen Ausdruck ableitet. Zu diesem Zwecke gehen wir zu den Gleichungen (4a) und (6) zurück; letztere multiplizieren wir skalar mit $+\mathfrak{J}_1$ und erhalten:

$$P_1 = I_1^2 r_1 + I_1 \cdot I_2 \sin \beta \, k \cdot \omega M \text{ (siehe Bild 23).}$$

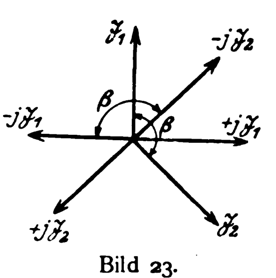


Bild 23.

Gleichung (6) skalar mit $-j\mathfrak{J}_1$ multipliziert, ergibt:

$$P_1 x = I_1^2 \omega L_1 + k \cdot I_1 I_2 \cos \beta \, \omega M.$$

Dieselben Multiplikationen, einmal mit $+\mathfrak{J}_2$ und dann mit $+j\mathfrak{J}_2$, nimmt man mit der Gleichung (4a) vor und erhält:

$$I_1 I_2 \omega M \sin \beta \cos (\psi - \Delta) k_s + I_1 I_2 \omega M \cos \beta \sin (\psi - \Delta) k_s + \\ + I_2^2 \omega M \sin (\psi - \Delta) k \cdot k_s = I_2^2 r_2;$$

$$I_1 I_2 \omega M \cos\beta \cos(\psi - \Delta) k_s - I_1 I_2 \omega M \sin\beta \sin(\psi - \Delta) k_s +$$
$$+ I_2^2 \omega M \left[\cos(\psi - \Delta) k \cdot k_s + s \frac{S_2}{M} \right] = o.$$

Aus diesen vier Gleichungen wird nun $\sin\beta$ und $\cos\beta$ eliminiert. Es entstehen somit zwei Gleichungen:

$$\frac{P_1 y - I_1^2 r_1}{k} \cos(\psi - \Delta) - \frac{P_1 x - I_1^2 \omega L_1}{k} \sin(\psi - \Delta) k_s + I_2^2 \omega M \sin(\psi - \Delta) k \cdot k_s = I_2^2 r_2;$$

$$\frac{P_1 x - I_1^2 \omega L_1}{k} k_s \cos(\psi - \Delta) -$$
$$- \frac{P_1 y - I_1^2 r_1}{k} \sin(\psi - \Delta) k_s + I_2^2 \omega M \left[\cos(\psi - \Delta) k \cdot k_s + s \frac{S_2}{M} \right] = o.$$

Durch Elimination des Ausdrucks $P_1 x - J_1^2 \omega L_1$ aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich für die primäre Leistung:

$$\mathbf{P_1 y = W = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2^2 \frac{k}{k_2} \cos(\psi - \Delta) + J_2^2 s \omega S_2 \frac{k}{k_2} \sin(\psi - \Delta).} \qquad \mathbf{(33)}$$

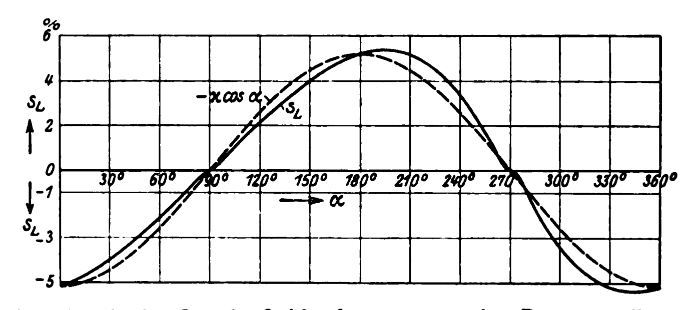


Bild 24. Abhängigkeit der Leerlaufschlüpfung s_L von der Bürstenstellung α bei einer kompensierten Asynchronmaschine.

$$s_L = - \frac{\varkappa \cdot \cos\alpha}{1 + \frac{\omega S_2}{r_2} \varkappa \cdot \sin\alpha} \qquad \begin{aligned} \varkappa &= 0{,}0515, \\ \omega S_2 &= 1{,}31\ \Omega, \\ r_2 &= 0{,}255\ \Omega. \end{aligned}$$

Für den gewöhnlichen Asynchronmotor ($k = o$) erhalten wir aus dieser Formel den bekannten Ausdruck:

$$P_1 y = W = I_1^2 r_1 + I_2^2 \frac{r_2}{s}. \qquad (34)$$

Während sich also die Schlüpfung beim gewöhnlichen Asynchronmotor als das Verhältnis von Läuferkupferverlust zu der auf den Rotor übertragenen Leistung ergibt:

$$s = \frac{I_2^2 r_2}{W - I_1^2 r_1} = \frac{V_2}{W_s},$$

erhalten wir bei der kompensierten Asynchronmaschine eine viel kompliziertere Beziehung für die Schlüpfung, so daß es unzweckmäßig ist, die Schlüpfung nach der bekannten graphischen Konstruktion aus dem Diagramm zu ermitteln, weil man erst die Leerlaufschlüpfung berechnen muß. Einfacher ist es, die Drehzahl nach Gleichung (32) zu bestimmen.

Die Leerlaufschlüpfung s_L ergibt sich aus der Formel (33), wenn man für die mechanische Leistung

$$W_m = W - I_1^2 r_1 - I_2^2 r_2 = o$$

setzt. Unter Einführung der Werte für $\cos(\psi - \Delta)$ und $\sin(\psi - \Delta)$ aus Gleichung (2) erhält man dann eine quadratische Gleichung für $s_{W_m = o}$, deren Auflösung



$$1. \quad s_1 W_{m=0} = 1 \tag{35}$$

und

$$2. \quad s_2 W_{m=0} = s_L = -\frac{\varkappa \cos \alpha}{1 + \frac{\omega S_2}{r_2} \varkappa \sin \alpha} \tag{36}$$

ergibt. Diese Lösungen besagen, daß die ganze vom Netz zugeführte Leistung einmal bei Stillstand ($s = 1$) und dann bei Leerlauf ($s = s_L$) in den primären und sekundären Widerständen verbraucht wird, wodurch die abgegebene Leistung verschwindet (siehe auch Bild 19).

Die Funktion $s_L = f(\alpha)$ ist in Bild 24 für einen bestimmten Motor dargestellt. Außerdem erhält das Bild zum Vergleich den Verlauf der Leerlaufschlüpfung bei Vernachlässigung der Sekundärstreuung S_2. Hierfür wird

$$s_{L_{S_2=0}} = -\varkappa \cos \alpha. \tag{37}$$

Die Maschine läuft also bei Bürstenwinkel

$0^0 < \alpha < 90^0$ (Bürstenstellungen bei Motorbetrieb),

im Leerlauf übersynchron, während ihre Leerlaufdrehzahl bei

$90^0 < \alpha < 180^0$ (Bürstenstellungen bei Generatorbetrieb)

im untersynchronen Bereich liegt.

Der Grund, warum die Leerlaufschlüpfung bei Berücksichtigung der Streuung von dem Betrag $-\varkappa \cos \alpha$ abweicht, ist folgender:

Hat die Maschine gerade die Schlüpfung $-\varkappa \cos \alpha$, so ist die Leistungskomponente der Kollektorspannung kompensiert, und es bleibt nur die wattlose Komponente $E \cdot \varkappa \sin \alpha$ im Sekundärkreis übrig. Es entsteht jetzt durch die der Schlüpfung $-\varkappa \cos \alpha$ entsprechenden Frequenz eine Phasenverschiebung zwischen der Spannung $E \cdot \varkappa \sin \alpha$ und dem sekundären Strom I_2, weil die Streuinduktivität S_2 vorhanden ist. Die Streuspannung erzeugt demnach in diesem Falle eine Leistungskomponente des Sekundärstromsystems, woraus folgt, daß bei $s = -\varkappa \cos \alpha$ eine mechanische Leistung vorhanden ist. Die mechanische Leistung wird bei $s = -\varkappa \cos \alpha$ aus Formel (33)

$$3\, W_{m_{s=-\varkappa \cos \alpha}} = -3\, I_2^2\, \omega\, S_2 \operatorname{cotg} \alpha\, (1 + \varkappa \cos \alpha). \tag{38}$$

Für $0^0 < \alpha < 90^0$ wird die mechanische Leistung negativ, d. h. die Maschine wirkt als Generator. Für $90^0 < \alpha < 180^0$ wird W_m positiv, die Maschine läuft als Motor.

V. Die Betriebseigenschaften der kompensierten Asynchronmaschine.

In den Bildern 26—30 sind die Diagramme unter Berücksichtigung des primären Widerstandes für verschiedene Bürstenstellungen ($\alpha = 0^0$; $\alpha = 12^0$; $\alpha = 90^0$; $\alpha = 180^0$; $\alpha = -90^0$) einer kompensierten Asynchronmaschine mit ziemlich reichlich bemessener Kollektorwicklung aufgezeichnet. Bild 25 zeigt das Diagramm derselben Maschine, aber als gewöhnlicher Asynchronmotor ($\varkappa = 0$) geschaltet.

Die Diagramme zeigen nun, daß die Maschine folgende Betriebsmöglichkeiten hat:

1. Sie gibt mechanische Leistung an der Welle ab (Motor; nach Bild 31a).
2. Sie liefert elektrische Leistung in das Netz (Generator; nach Bild 31b).
3. Sie liefert nacheilende Blindleistung in das Netz bzw. nimmt voreilende Blindleistung aus dem Netz auf (Blindleistungsgenerator; siehe Bild 31c Leerlaufpunkt L).
4. Sie arbeitet als Motor und Blindleistungsgenerator (Bild 31d).
5. Sie arbeitet als Wirk- und Blindleistungsgenerator (Bild 31e).

1. Motorbetrieb.

In Bild 27 ist das Diagramm einer bestimmten kompensierten Asynchronmaschine bei Bürstenstellung für den Motorbetrieb ($\alpha = 12^0$) aufgezeichnet. Das Diagramm läßt sofort erkennen, daß das Kippmoment um etwa $50 \div 60\%$ größer



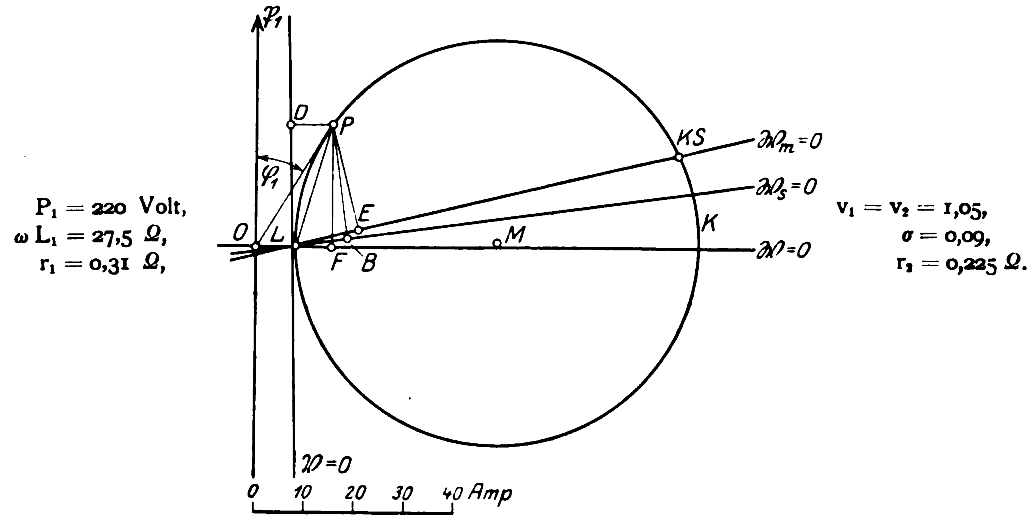


Bild 25. Das Kreisdiagramm der gewöhnlichen Asynchronmaschine.

Aus dem Diagramm ergibt sich:

1. Der primäre Strom $= \overline{OP}$ in Amp.,
2. der Leerlauf- bzw. Kurzschlußstrom $= \overline{OL}$ bzw. $\overline{OKS}$ in Amp.,
3. die primäre Leistung $= 0,66\ \overline{PF}$ in kW,
4. der sekundäre Strom $= v_1 \cdot \overline{LP}$ in Amp,
5. das Drehmoment $= 0,433\ \overline{PB}$ in mkg,
6. die mechanische Leistung $= 0,675\ \overline{PE}$ in kW und
7. der gesamte Kupferverlust $= 0,159\ \overline{PD}$ in kW.

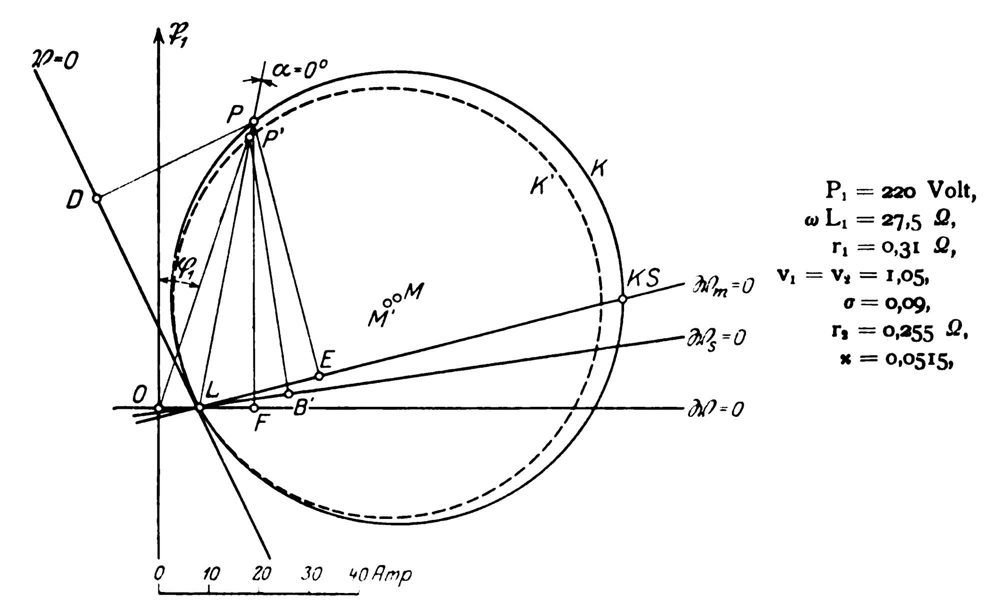


Bild 26. Das Kreisdiagramm der kompensierten Asynchronmaschine bei einem Bürstenwinkel $\alpha = 0°$.

Aus dem Diagramm ergibt sich:

1. Der primäre Strom $= \overline{OP}$ in Amp.,
2. der Leerlauf- bzw Kurzschlußstrom $= \overline{OL}$ bzw. $\overline{OKS}$ in Amp.,
3. die primäre Leistung $= 0,66\ \overline{PF}$ in kW,
4. der sekundäre Strom $= v_1 \cdot \overline{LP'}$ in Amp.,
5. das Drehmoment $= 0,42\ \overline{P'B'}$ in mkg,
6. die mechanische Leistung $= 0,608\ \overline{PE}$ in kW und
7. der gesamte Kupferverlust $= 0,167\ \overline{PD}$ in kW.

wird als bei dem gewöhnlichen Asynchronmotor. Der kompensierte Asynchronmotor hat daher den Vorteil, daß er bei Überlastungsstößen nicht so leicht aus dem Tritt fällt wie der gewöhnliche Asynchronmotor. Die Kupferverluste sind bei $\alpha = 12^0$, wie aus Bild 32 hervorgeht, bei Normallast und Überlast kleiner als die Verluste des gewöhnlichen Asynchronmotors ($\varkappa = 0$). Bei kleinen Belastungen werden die Kupferverluste in Abhängigkeit vom Drehmoment etwas größer. Wir haben aber in Kapitel IV gesehen, daß die Tourenzahl des kompensierten Asynchronmotors bei gleichem Drehmoment größer (um etwa $\varkappa \cos\alpha\,^0/_0$) ist als die des gewöhnlichen Asynchronmotors, infolgedessen wächst auch die abgegebene Leistung, und der

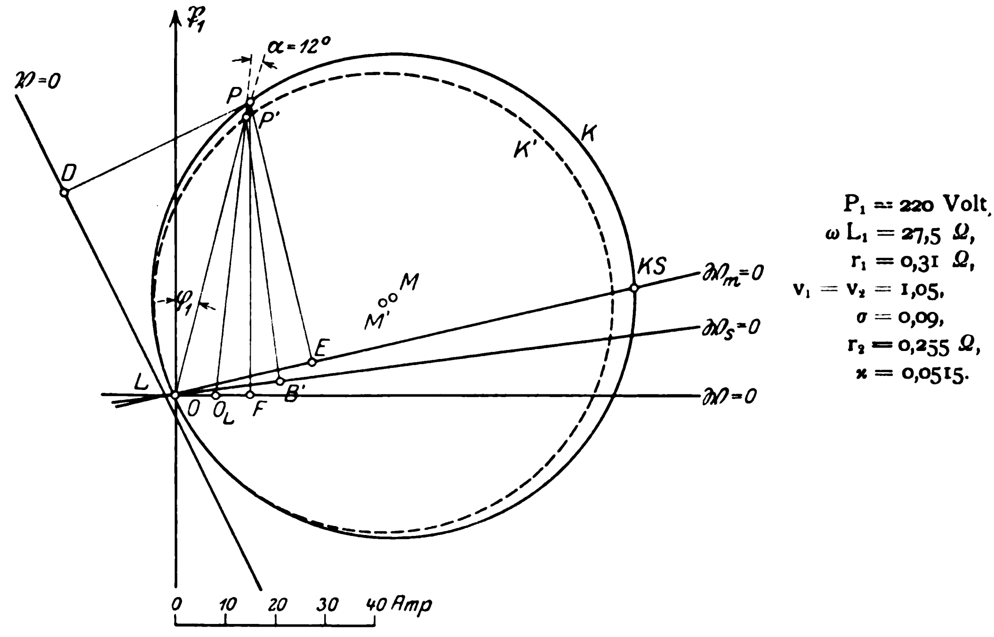


Bild 27. Das Kreisdiagramm der kompensierten Asynchronmaschine bei einem Bürstenwinkel $\alpha = 12^0$.

Aus dem Diagramm ergibt sich:

1. Der primäre Strom $= \overline{OP}$ in Amp,
2. der Leerlauf- bzw. Kurzschlußstrom $= \overline{OL}$ bzw. $\overline{OKS}$ in Amp.,
3. die primäre Leistung $= 0{,}66\,\overline{PF}$ in kW,
4. der sekundäre Strom $= v_1 \cdot \overline{O_L P'}$ in Amp.,
5. das Drehmoment $= 0{,}408\,\overline{P'B'}$ in mkg,
6. die mechanische Leistung $= 0{,}61\,\overline{PE}$ in kW und
7. der gesamte Kupferverlust $= 0{,}152\,\overline{PD}$ in kW.

Wirkungsgrad ist ziemlich derselbe wie der des gewöhnlichen Asynchronmotors. Im allgemeinen kann gesagt werden, daß der Wirkungsgrad des kompensierten Asynchronmotors bei Kompensierung auf $\cos\varphi = 1$ bei kleinen Belastungen derselbe und bei Normallast und Überlast besser als der des gewöhnlichen Asynchronmotors ist.

Der $\cos\varphi$ ist bei der Bürstenstellung $\alpha = 12^0$, wie aus Bild 33 hervorgeht, innerhalb eines Belastungsbereiches von $80 \div 200\,^0/_0$ der Normallast nahezu 1 und wird bei kleinen Belastungen und Leerlauf stark voreilend. (Die Kurven sind unter Vernachlässigung der Eisenverluste gezeichnet.) Auch bei der Bürstenstellung $\alpha = 0^0$, bei der keine Kompensationskomponente der Kollektorspannung vorhanden ist, tritt starke Leistungsfaktorverbesserung auf (siehe Bild 33, Kurve für $\alpha = 0^0$). Das kommt daher, daß der Motor von gewissen Belastungen ab übersynchron läuft; im Übersynchronismus kehrt nun die sekundäre Streuspannung ihre Richtung relativ

zum Läufer um, weil ja die Schlüpfung und damit die Frequenz negativ wird. Die Streuspannung wirkt daher als Kompensationsspannung und damit verbessernd auf den Leistungsfaktor. Bei Leerlauf, wo der sekundäre Strom bei $\alpha = 0^0$ verschwindet, ist auch die Streuspannung Null, und der cos φ nähert sieh daher bei kleinen Belastungen und Leerlauf dem cos φ des gewöhnlichen Asynchronmotors, er wird also stark nacheilend.

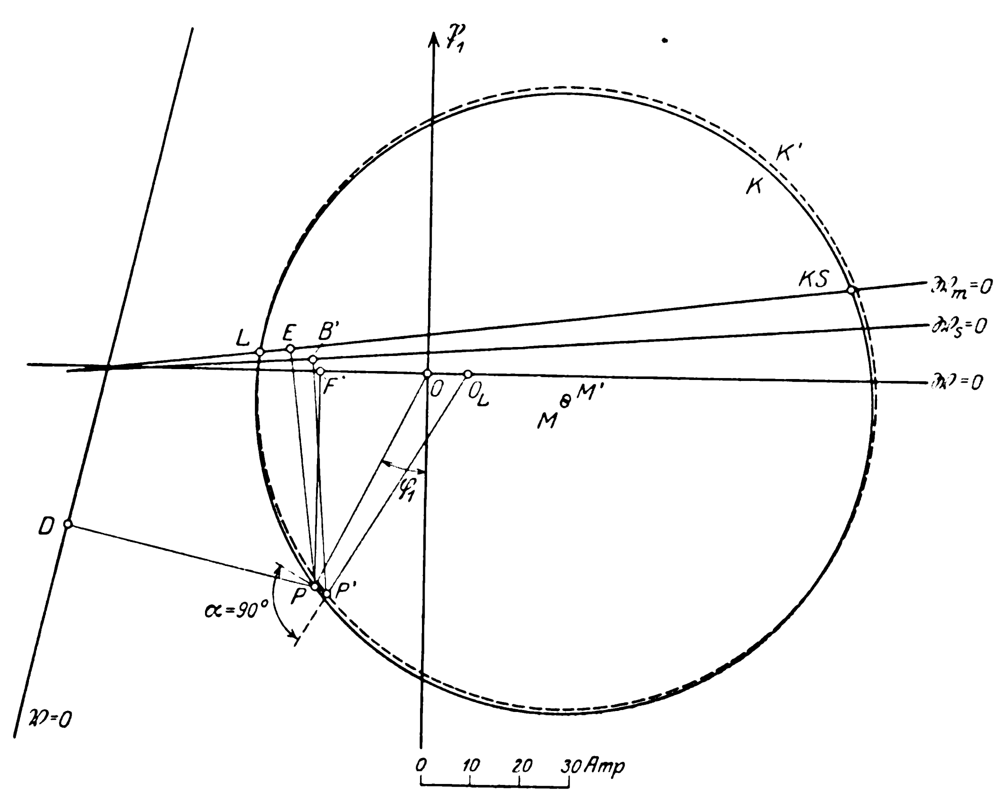


Bild 28. Das Kreisdiagramm der kompensierten Asynchronmaschine bei einem Bürstenwinkel von $\alpha = 90^0$.

$P_1 = 220$ Volt, $r_1 = 0{,}31\ \Omega$, $\sigma = 0{,}09$, $\varkappa = 0{,}0515$.
$\omega L_1 = 27{,}5\ \Omega$, $v_1 = v_2 = 1{,}05$, $r_2 = 0{,}255\ \Omega$,

Aus dem Diagramm ergibt sich:

1. Der primäre Strom $= \overline{OP}$ in Amp.,
2. der Leerlauf- bzw. Kurzschlußstrom $= \overline{OL}$ bzw. $\overline{OKS}$ in Amp.,
3. die primäre Leistung $= 0{,}66\, \overline{PF}$ in kW,
4. der sekundäre Strom $= v_1 \cdot \overline{O_L P'}$ in Amp.,
5. das Drehmoment $= 0{,}436\, \overline{P'B'}$ in mkg,
6. die mechanische Leistung $= 0{,}685\, \overline{PE}$ in kW,
7. der gesamte Kupferverlust $= 0{,}087\, \overline{PD}$ in kW.

Es ist zu beachten, daß man die Drehrichtung des kompensierten Asynchronmotors nicht ohne weiteres durch Vertauschen zweier Primäranschlüsse umkehren kann. Denn wenn z. B. der Winkel in einer Drehrichtung $= \alpha$ ist, so wird er bei derselben Bürstenstellung und entgegengesetzter Drehrichtung zu $-\alpha$ (siehe Bild 34). Die Wirkung ist am besten wiedergegeben durch die Unterschiede der beiden Diagramme von $\alpha = 90^0$ und $\alpha = -90^0$. Leistungsfaktor und Wirkungsgrad werden sehr schlecht und das Kippmoment wird sehr klein, so daß ein normaler Betriebszustand nicht möglich ist. Man muß daher, um den alten Betriebszustand in der neuen Drehrichtung wieder herzustellen, die Bürsten um den Winkel 2α in der neuen Läuferdrehrichtung über die Nullstellung verschieben.

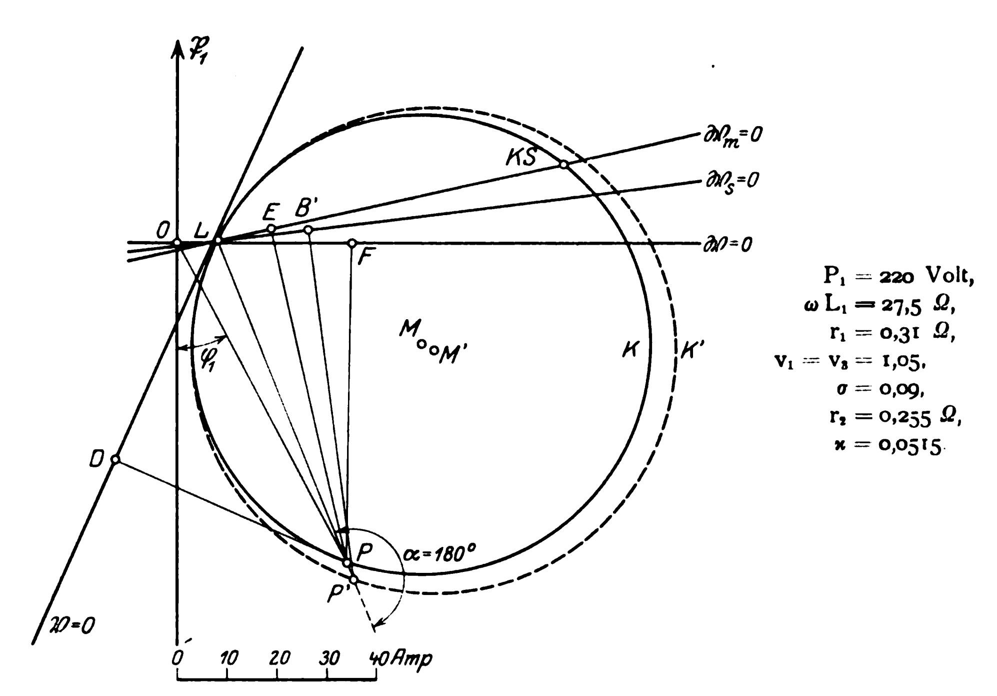


Bild 29. Das Kreisdiagramm der kompensierten Asynchronmaschine bei einem Bürstenwinkel $\alpha = 180^0$.

Aus dem Diagramm ergibt sich:

1. Der primäre Strom = $\overline{OP}$ in Amp.,
2. der Leerlauf- bzw. Kurzschlußstrom = $\overline{OL}$ bzw. $\overline{OKS}$,
3. die primäre Leistung = 0,66 $\overline{PF}$ in kW,
4. der sekundäre Strom = $v_1 \cdot \overline{LP'}$ in Amp.,
5. das Drehmoment = 0,457 $\overline{P'B'}$ in mkg,
6. die mechanische Leistung = 0,758 $\overline{PE}$ in kW und
7. der gesamte Kupferverlust = 0,184 $\overline{PD}$ in kW.

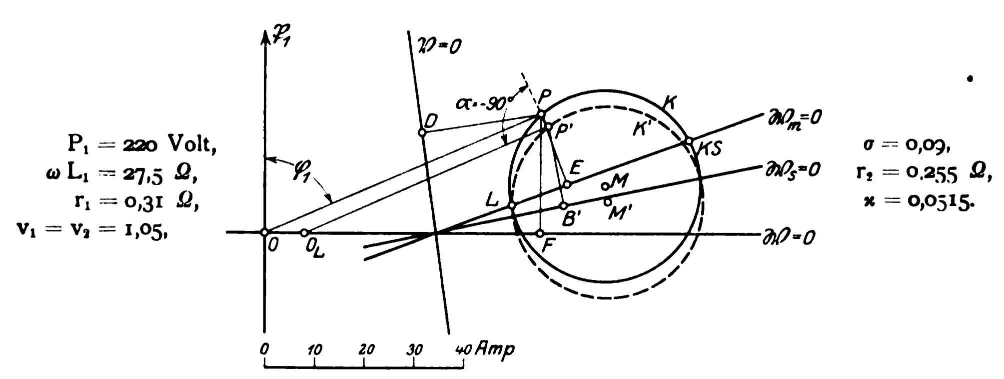


Bild 30. Das Kreisdiagramm der kompensierten Asynchronmaschine bei einem Bürstenwinkel $\alpha = -90^0$.

Aus dem Diagramm ergibt sich:

1. Der primäre Strom = $\overline{OP}$ in Amp.,
2. der primäre Leerlauf- bzw. Kurzschlußstrom = $\overline{OP}$ bzw. $\overline{OKS}$,
3. die primäre Leistung = 0,66 $\overline{PF}$ in kW,
4. der sekundäre Strom = $v_1 \cdot \overline{O_L \cdot P'}$ in Amp.,
5. das Drehmoment = 0,425 $\overline{P'B'}$ in mkg,
6. die mechanische Leistung = 0,668 $\cdot \overline{PE}$ in kW und
7. der gesamte Kupferverlust = 0,231 $\cdot \overline{PD}$ in kW.

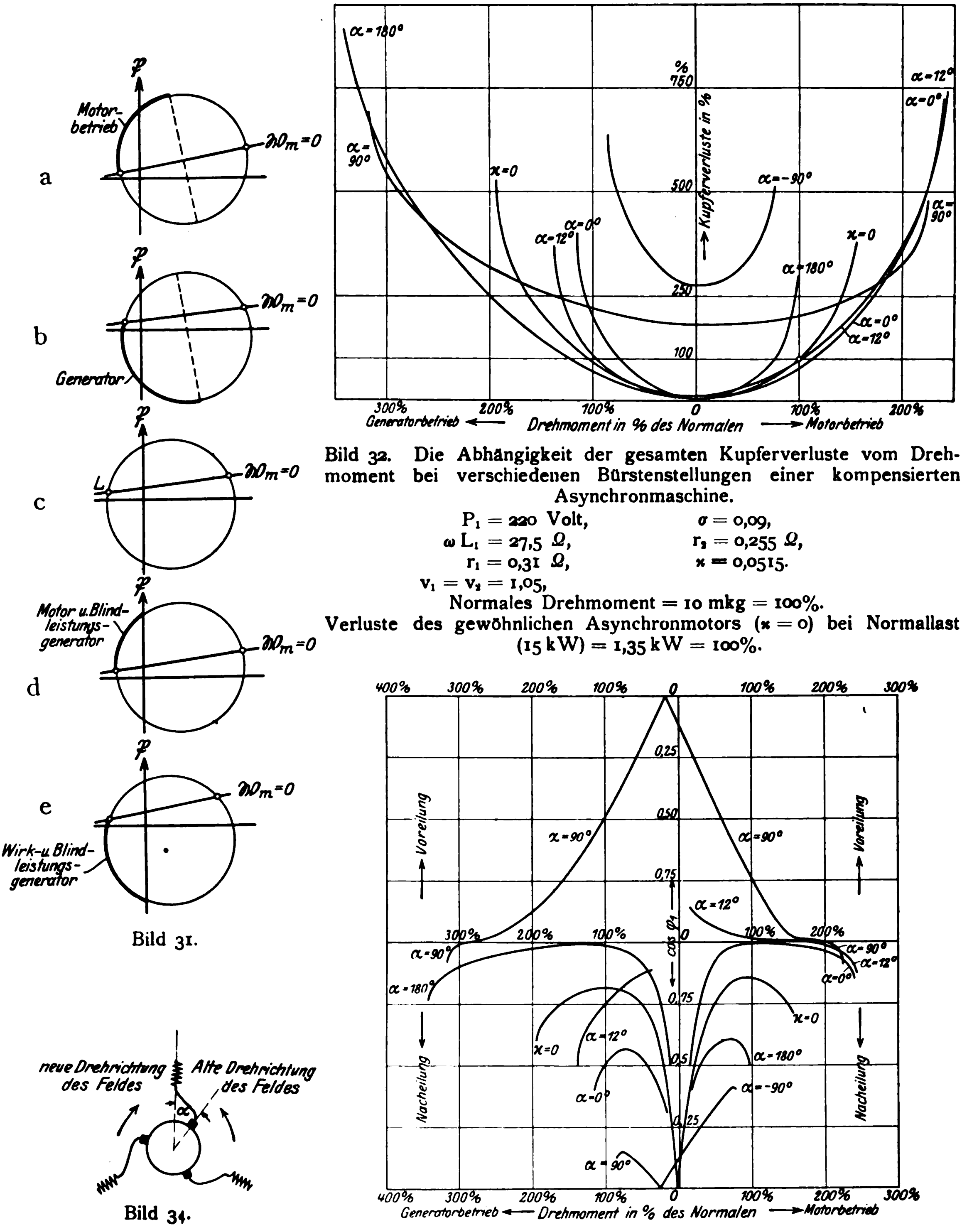


Bild 32. Die Abhängigkeit der gesamten Kupferverluste vom Drehmoment bei verschiedenen Bürstenstellungen einer kompensierten Asynchronmaschine.

$P_1 = 220$ Volt, $\sigma = 0{,}09$,
$\omega L_1 = 27{,}5\ \Omega$, $r_2 = 0{,}255\ \Omega$,
$r_1 = 0{,}31\ \Omega$, $\varkappa = 0{,}0515$.
$v_1 = v_2 = 1{,}05$,

Normales Drehmoment = 10 mkg = 100%.

Verluste des gewöhnlichen Asynchronmotors ($\varkappa = 0$) bei Normallast (15 kW) = 1,35 kW = 100%.

Bild 33. Die Abhängigkeit des primären Leistungsfaktors ($\cos \varphi_1$) vom Drehmoment bei verschiedenen Bürstenstellungen einer kompensierten Asynchronmaschine.

Drehmoment bei Normallast (15 kW) des gewöhnlichen Asynchronmotors ($\varkappa = 0$) = 10 mkg = 100%.

2. Generatorbetrieb.

Auch im Generatorbetrieb ist die Kippbelastung bedeutend höher als beim gewöhnlichen Asynchrongenerator. Der kompensierte Asynchrongenerator ist daher den vorkommenden Überlastungsstößen viel besser gewachsen als der gewöhnliche Asynchrongenerator.

Außerdem besitzt der kompensierte Asynchrongenerator den erheblichen Vorteil, daß er beim Wegbleiben der vom Synchrongenerator gelieferten Spannung die noch am Netz hängende Belastung selbständig übernehmen kann, denn er erzeugt seinen Magnetisierungsstrom selbst und gibt noch die vom Netz verlangte Blindleistung ab. Der kompensierte Asynchrongenerator hat nun die Eigenschaft, daß bei konstanter Netzspannung und Frequenz die von ihm abgegebene Wirk- und Blindleistung zueinander in einem bestimmten, von der Belastung abhängigen Verhältnis stehen. Der kompensierte Asynchron-Generator muß daher, um bei selbständiger Übernahme der Belastung sich auf das durch die Netzbelastung bedingte Verhältnis von Wirk- zu Blindleistung umzustellen, seine Spannung bzw. je nach Charakteristik des Reglers seiner Antriebsmaschine auch die Frequenz ändern. Andererseits kann aber auch, um dieses Verhältnis ohne Änderung der Spannung und Frequenz zu erreichen, der Bürstenwinkel entsprechend verändert werden.

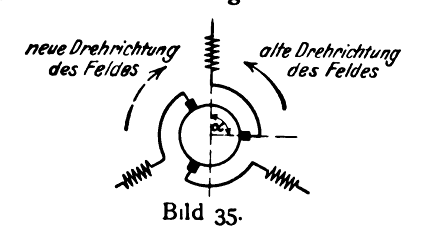


Bild 35.

Erst durch diese Eigenschaften, die den kompensierten Asynchrongenerator gegenüber dem gewöhnlichen Asynchrongenerator auszeichnen, wird es möglich sein, daß der Asynchrongenerator im größeren Umfange zur Anwendung kommt.

Die Bürstenstellungen bei Generatorbetrieb sind natürlich andere als bei Motorbetrieb; sie liegen zwischen 90^0 und 180^0. Man kann also eine vorher als Motor gelaufene Maschine erst nach Bürstenverschiebung vorteilhaft auf Generatorbetrieb umstellen. War der Winkel bei Motorbetrieb α, so muß er beim Generatorbetrieb etwa $180^0 - \alpha$ sein. Auch bei Drehrichtungswechsel des Generators ist eine Bürstenverschiebung vorzunehmen; war der Winkel in der einen Drehrichtung α, so muß die Bürstenbrücke bei Umkehrung um 2α über die Nullstellung in der neuen Läuferdrehrichtung verschoben werden (siehe Bild 35).

Auch bei $\alpha = 180^0$ ist, wie Bild 33 zeigt, starke Leistungsfaktorverbesserung vorhanden, trotzdem keine Kompensationskomponente der Kollektorspannung vorhanden ist. Der Grund ist der, daß der kompensierte Asynchrongenerator nicht wie der gewöhnliche Asynchrongenerator nur übersynchron, sondern, wie in Kapitel IV gezeigt ist, bei Leerlauf und kleinen Belastungen einige Prozente (um etwa $\varkappa \cos \alpha \%$) untersynchron arbeitet. Die Streuspannung wirkt genau, wie beim Motor im übersynchronen Betrieb, hier im Untersynchronismus als Kompensationsspannung, welche natürlich im Leerlauf, wo der sekundäre Strom Null ist, verschwindet.

3. Blindleistungsgenerator.

Die kompensierte Asynchronmaschine kann bei entsprechend reichlich bemessener Kollektorwicklung als Blindleistungsgenerator verwendet werden, sie hängt dabei leerlaufend am Netz. Sie kann daher den Blindstromverbrauch der am Netz hängenden Asynchronmotoren decken und somit die Zentrale bzw. den synchronen Generator von Blindleistung entlasten. Soll die Maschine z. B. I_B Amp. Blindstrom pro Phase abgeben, so ergibt sich unter Vernachlässigung der Streuung das erforderliche Übersetzungsverhältnis $\varkappa$ aus folgender Beziehung:

$$I_B \sim \frac{P_1 \varkappa \sin \alpha}{r_2} - I_\mu$$

und daraus



$$\varkappa \sim \frac{(I_B + I_\mu)\, r_2}{P_1 \cdot \sin\alpha}. \tag{39}$$

Die Maschine nimmt natürlich aus dem Netz den zur Deckung der Verluste erforderlichen Wattstrom auf (siehe Bild 28).

Die asynchrone Blindleistungsmaschine hat gegenüber dem synchronen Blindleistungsgenerator den Vorteil, daß sie viel einfacher angelassen werden kann, denn das Synchronisieren fällt fort; außerdem ist sie billiger, weil vor allem die Gleichstromerregermaschine fortfällt.

4. Motor- und Blindleistungsgenerator bzw. Wirk- und Blindleistungsgenerator.

Die kompensierte Asynchronmaschine kann, genau wie die Synchronmaschine, gleichzeitig mechanische Leistung an der Welle und Blindleistung in das Netz abgeben oder elektrische Wirk- und Blindleistung in das Netz liefern. Der Wirkungsgrad ist dann schlechter, weil die Kupferverluste infolge der größeren primären und sekundären Ströme wachsen (siehe Bild 32 bei $\alpha = 90^0$). Die Kollektorwicklung ist infolge der Überkompensierung reichlicher zu bemessen. Das Übersetzungsverhältnis $\varkappa$ ergibt sich in diesem Falle aus folgender Überlegung:

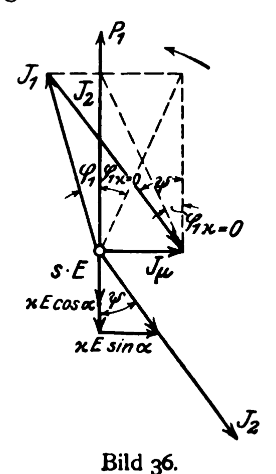


Bild 36.

Aus Bild 36, in welchem das Vektordiagramm ohne Berücksichtigung der Spannungsabfälle gezeichnet ist, ergibt sich die Beziehung

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_{1\,\varkappa=0}.$$

Hierin ist φ_1 der Winkel, um den der Primärstrom I_1 der Netzspannung P_1 voreilen soll entsprechend der abzugebenden Blindleistung

$$3 \cdot I_1 \cdot P_1 \cdot \sin\varphi_1.$$

$\varphi_{1\,\varkappa=0}$ ist der primäre Phasenverschiebungswinkel, den die Maschine, als gewöhnliche Asynchronmaschine ($\varkappa = 0$) geschaltet, bei derselben Belastung haben würde.

Da nach S. 467 $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\varkappa\sin\alpha}{s + \varkappa\cos\alpha}$ und nach Kapitel IV $s + \varkappa\cos\alpha \sim s_{\varkappa=0}$ ist, erhält man

$$\frac{\varkappa\sin\alpha}{s_{\varkappa=0}} \sim \operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_{1\,\varkappa=0}$$

und für

$$\varkappa \sim \frac{(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_{1\,\varkappa=0})\, s_{\varkappa=0}}{\sin\alpha}. \tag{40}$$

Soll die Maschine gerade auf $\cos\varphi_1 = 1$ kompensiert sein, so wird $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0$ und

$$\varkappa_{\varphi_1=0} \sim \frac{\operatorname{tg}\varphi_{1\,\varkappa=0} \cdot s_{\varkappa=0}}{\sin\alpha}. \tag{40a}$$

Zusammenfassung.

Es werden Formeln für die Mittelpunktskoordinaten und Radien der Kreise für den Osnosmotor abgeleitet und die Bestimmung von Kupferverlusten, abgegebene Leistung und Drehmoment aus den Diagrammen gezeigt. Sodann wird eine Formel zur genauen Bestimmung der Leerlaufsdrehzahl gegeben. Die Betriebseigenschaften des Osnosmotors werden in bezug auf Wirkungsgrad, Leistungsfaktor, Überlastungsfähigkeit usw. mit denen des gewöhnlichen Asynchronmotors sowohl im Motor- als auch im Generatorbetrieb verglichen. Es wird dann auf die Verwendung als Blindleistungsgenerator eingegangen, wobei Formeln für die Bemessung der Kollektorwicklung angeführt werden.

Brückenmessungen mit dem „Phasenschlitten“.

Von

C. Déguisne, Frankfurt a. M.

Der Umstand, daß bei einem eisenfreien und sekundär unbelasteten Transformator die sekundäre EMK gegen den primären Strom um $^1/_4$ Periode verschoben ist, läßt sich zu einer Reihe interessanter Schaltungen in der Wheatstoneschen Brücke ausnutzen. Auf eine solche, die oft gute Dienste leisten kann, sei im folgenden hingewiesen.

Als Tranformator dient dabei der „Phasenschlitten“, der schon in einem früheren Aufsatz in dieser Zeitschrift von mir beschrieben worden ist[1]). Seine primäre und sekundäre Spule bestehen aus je zwei etwa 20 cm langen Solenoiden, die dicht nebeneinander gelagert und so in Reihe geschaltet sind, daß die von äußeren Störfeldern etwa induzierten EMKe sich nahezu aufheben. Außerdem läßt sich die Wirkung solcher Störfelder, falls sie nicht schon durch die Astasierung beseitigt ist, fast stets durch richtiges Orientieren des Phasenschlittens im Raum vollends zum Verschwinden bringen. Die sekundäre Spule ist gegenüber der primären verschiebbar oder umgekehrt, so daß die Größe der sekundären EMK nach Bedarf eingestellt werden kann.

Die zu beschreibende Schaltung besteht darin, daß in einer mit Wechselstrom gespeisten Wheatstoneschen Brücke, die in einem ihrer Zweige eine Induktivität oder eine Kapazität hat, die Primärspule des Phasenschlittens in den von der Stromquelle kommenden Hauptstromkreis und die Sekundärspule in den Nullkreis geschaltet wird. Durch geeignete Einstellung der Widerstände und des Phasenschlittens läßt sich dabei immer eine Nullstellung des Nullinstruments erzielen.

Die hierbei auftretenden Beziehungen zwischen den einzelnen Größen, wie Verhältnis und Phasenverschiebung der Zweigströme, Widerstände und Induktivität, bzw. Kapazität, sind interessant und können zu bequemen Messungen ausgenutzt werden.

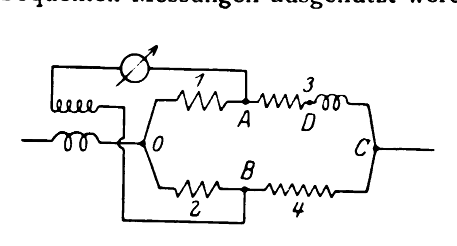


Bild 1.

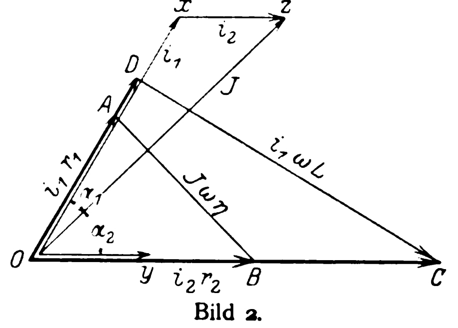


Bild 2.

In Bild 1 ist die Brückenschaltung skizziert. r_1 bis r_4 seien induktions- und kapazitätsfreie Widerstände. In Zweig 3 sitze eine Induktivität L oder eine Kapazität C. Der Eigenwiderstand der Spule bzw. der Wirkwiderstand des Kondensators soll in r_3 enthalten sein.

In Bild 2 ist das Vektorendiagramm der Spannungen und Ströme gezeichnet. Die Endpunkte der Spannungsvektoren tragen die gleichen Buchstaben wie die entsprechenden Punkte in Bild 1. OX und OY seien die Vektoren der Ströme in den Zweigen 1 und 2, OZ ihre Resultierende; sie heißen i_1, i_2 und J. α_1 und α_2 seien die Phasenverschiebungen von i_1 und i_2 gegen J. J fließt durch die Primärspule des Phasenschlittens, dessen sekundäre EMK zur Kompensierung der Spannung AB benutzt wird. Ist Nulleinstellung erzielt, so steht also AB senkrecht zu OZ.

[1]) Arch. f. Elektrot., Bd. V, S. 303, 1917.

Es seien zunächst die Strom- und Phasenverhältnisse besprochen, die am Verzweigungspunkt O auftreten.

Die gegenseitige Induktivität zwischen Primär- und Sekundärspule des Phasenschlittens sei η. Es ist daher im Vektorendiagramm $AB = J\omega\eta$, wenn ω die Kreisfrequenz des Wechselstroms ist. η ist veränderlich, je nach der Einstellung des Schlittens. Sein Wert wird an einer am Apparat sitzenden Skala abgelesen.

Aus Dreieck O A B ergibt sich:

$$i_1 r_1 \sin\alpha_1 + i_2 r_2 \sin\alpha_2 = J\omega\eta \qquad (1)$$

und

$$i_1 r_1 \cos\alpha_1 = i_2 r_2 \cos\alpha_2 \,. \qquad (2)$$

Aus Dreick O X Z:

$$i_1 \cos\alpha_1 + i_2 \cos\alpha_2 = J \qquad (3)$$

und

$$i_1 \sin\alpha_1 = i_2 \sin\alpha_2 \,. \qquad (4)$$

Gleichung (1) und (4) ergeben:

$$(r_1 + r_2)\, i_1 \cdot \sin\alpha_1 = J\omega\eta \,.$$

Gleichung (2) und (3) liefern:

$$\frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot i_1 \cdot \cos\alpha_1 = J \,.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{\omega\eta}{r_2} \\ \text{Ebenso wird} \quad \operatorname{tg}\alpha_2 &= \frac{\omega\eta}{r_1} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ist $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ die Phasenverschiebung zwischen i_1 und i_2, so können wir schreiben

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2} \,.$$

Mit den Gleichungen (5) erhalten wir

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega\eta\,(r_1 + r_2)}{r_1 r_2 - (\omega\eta)^2} \,. \qquad (5\,a)$$

Wenn

$$r_1 r_2 = (\omega\eta)^2 \qquad (5\,b)$$

ist, so wird $\alpha = 90^0$.

Zur Berechnung von $\frac{i_1}{J}$, $\frac{i_2}{J}$ und $\frac{i_1}{i_2}$ benutzen wir die oben aus (1) und (4) gefundene Gleichung

$$(r_1 + r_2) \cdot i_1 \sin\alpha_1 = J\omega\eta$$

oder

$$\frac{i_1}{J} = \frac{\omega\eta}{r_1 + r_2} \cdot \frac{1}{\sin\alpha_1} \,.$$

Da

$$\frac{1}{\sin^2\alpha_1} = 1 + \cot^2\alpha_1 = \frac{(\omega\eta)^2 + r_2^2}{(\omega\eta)^2}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{i_1^2}{J^2} &= \frac{(\omega\eta)^2 + r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \\ \text{Ebenso} \quad \frac{i_2^2}{J_2} &= \frac{(\omega\eta)^2 + r_1^2}{(r_1 + r_2)^2} \\ \text{und} \quad \frac{i_1^2}{i_2^2} &= \frac{(\omega\eta)^2 + r_2^2}{(\omega\eta)^2 + r_1^2} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Wenn $r_1 = r_2$ gemacht wird, so wird für jedes $\omega \eta$

$$i_1 = i_2 .$$

Für diesen Sonderfall, wo $r_1 = r_2 = r$ sei, wird aus Gleichung (5a)

$$\left.\begin{aligned} \cot \alpha &= \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\omega \eta} - \frac{\omega \eta}{r}\right) \\ \text{und} \qquad \cos \alpha &= \frac{\frac{r}{\omega \eta} - \frac{\omega \eta}{r}}{\frac{r}{\omega \eta} + \frac{\omega \eta}{r}} . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wenn $r = \omega \eta$ gemacht wird, ist $\alpha = 90^0$.

Die besprochene Schaltung bietet also die Möglichkeit, bei einer Stromverzweigung nach den Gleichungen (5) die Phasen der Zweigströme und nach den Gleichungen (6) das Verhältnis ihrer Stromstärken nach Wunsch einzustellen oder aus der vorhandenen Einstellung in einfacher Weise zu berechnen.

Sie ermöglicht auch die einfache Bestimmung einer Induktivität oder einer Kapazität, was im folgenden noch abgeleitet werden soll.

Messung einer Induktivität oder Kapazität.

Haben wir in der oben angenommenen Brückenschaltung $r_1 = r_2 = r$ gemacht, so läßt sich für die im Zweig 3 sitzende Induktivität L eine einfache Beziehung zu η, r und r_4 aufstellen.

Aus dem Dreieck ODC in Bild 2, in welchem $AD = i_3 \cdot r_3$, $BC = i_4 \cdot r_4$ und $DC = i_3 \cdot \omega L$ ist, folgt, da nach erreichter Nulleinstellung $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$ ist:

$$\frac{\omega L}{r + r_4} = \sin \alpha .$$

Aus den Gleichungen (7) entnehmen wir:

$$\sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{\frac{r}{\omega \eta} + \frac{\omega \eta}{r}} .$$

Ferner ist

$$1 + \cos \alpha = 2 \cdot \frac{r}{\omega \eta} \cdot \frac{1}{\frac{r}{\omega \eta} + \frac{\omega \eta}{r}}$$

und

$$1 - \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\omega \eta}{r} \cdot \frac{1}{\frac{r}{\omega \eta} + \frac{\omega \eta}{r}} .$$

Also

$$\sin \alpha = \frac{\omega \eta}{r} (1 + \cos \alpha)$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{r}{\omega \eta} (1 - \cos \alpha) .$$

Nun findet man aber aus Dreieck ODC in Bild 2 außerdem

$$\cos \alpha = \frac{r + r_3}{r + r_4} .$$

Also wird schließlich

$$\frac{\omega L}{r + r_4} = \frac{\omega \eta}{r}\left(1 + \frac{r + r_3}{r + r_4}\right)$$

oder

$$L = \frac{\eta}{r}(2r + r_3 + r_4).$$

Sitzt statt der Induktivität L eine Kapazität C im Zweig 3, so schreiben wir

$$\frac{1/\omega C}{r + r_4} = \sin \alpha = \frac{r}{\omega\eta}\left(1 - \frac{r + r_3}{r + r_4}\right)$$

oder

$$C = \frac{\eta}{r} \cdot \frac{1}{r_4 - r_3}.$$

Zur Bestimmung des Wertes von r_3, in dem der Wirkwiderstand der Spule oder des Kondensators enthalten ist und der gewöhnlich unbekannt sein wird, benutzen wir die Beziehung

$$\frac{r + r_3}{r + r_4} = \cos \alpha$$

und die Gleichung (7)

$$\cos \alpha = \frac{\frac{r}{\omega\eta} - \frac{\omega\eta}{r}}{\frac{r}{\omega\eta} + \frac{\omega\eta}{r}}.$$

Machen wir bei der Einstellung der Brücke z. B.

$$\frac{r}{\omega\eta} = 2\frac{\omega\eta}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\omega\eta} = \sqrt{2},$$

so wird

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

und

$$r_3 = \frac{1}{3}(r_4 - 2r).$$

Machen wir

$$\frac{r}{\omega\eta} = 3\frac{\omega\eta}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\omega\eta} = \sqrt{3},$$

so wird

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

und

$$r_3 = \frac{1}{2}(r_4 - r).$$

Im letzten Falle — $\frac{r}{\omega\eta} = \sqrt{3}$ — wird z. B.

$$L = \frac{\eta}{r} \cdot \frac{3}{2}(r + r_4)$$

und

$$C = \frac{\eta}{r} \cdot \frac{2}{r + r_4}.$$

Zusammenfassung.

Es wird eine Brückenschaltung für Wechselstrom besprochen, durch die bei einer Stromverzweigung die Phasen und das Verhältnis der Zweigströme bestimmt oder nach Wunsch eingestellt werden können und durch welche andererseits eine Induktivität oder eine Kapazität in einfacher Weise gemessen werden kann. Benutzt wird dazu ein Induktionsvariometer (Phasenschlitten) in besonderer Schaltung.

Frankfurt a. M., Universität. Institut für angewandte Physik.

Über die dielektrischen Eigenschaften der Luft und einiger fester Isoliermaterialien bei hochgespannter Hochfrequenz.

Von

Eberhardt Goebeler.

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

Inhalt.

Einleitung.

Die Beanspruchung der Dielektrika bei Gleich- und Wechselstrom ist ein bereits vielfach bearbeitetes Gebiet. Wenig Untersuchungen liegen jedoch bei Hochfrequenz vor, wo die dielektrischen Eigenschaften der Isoliermaterialien von einem noch neu hinzutretenden Faktor beeinflußt werden, nämlich von der hier sehr starken Umelektrisierung.

Der Bericht über diesbezügliche, im Technisch-Physikalischen Institut der Universiät Jena angestellte Untersuchungen ist der Inhalt vorliegender Arbeit.

Während Messungen in Luft durch Algermissen[1]), Clark und Ryan[2]) u. a., welche ebenso wie die von Alexanderson[3]) aussagen, daß die Durchbruchfeldstärke den gleichen Wert hat wie bei Niederfrequenz, zu bestätigen waren, sind feste Körper bei Hochfrequenz noch nicht untersucht worden.

Da eine Hochfrequenzmaschine nicht zur Verfügung stand, war die Aufgabe eine doppelte:

1. die Herstellung der Hochfrequenz. An dieselbe waren folgende Bedingungen zu stellen:

a) sinusförmiger Verlauf, d. h. Freiheit von Oberwellen,

b) keine Intensitätsschwankungen,

c) stetige Regulierbarkeit der Spannung.

Erst, nachdem diese Bedingungen erfüllt waren, konnte an den zweiten Teil der Arbeit herangegangen werden.

---

[1]) J. Algermissen, Annal. d. Physik (4) 19, 1007, 1016. 1906.
[2]) J. C. Clark und H. J. Ryan, Proc. of the Am. Inst. of Electr. Engineers 33, 937. 1914.
[3]) Alexanderson, General Electric Review 427, 1914.

2. Untersuchung der Luft und fester Isoliermaterialien.

Vorversuche.

Um die hochgespannte Hochfrequenz zu erhalten, wurden im Laufe der Zeit drei verschiedene Wege eingeschlagen, von denen erst der letzte zum Ziel führte. Da mit ungedämpften Wellen gearbeitet werden sollte, kamen als Erzeuger derselben nur Glühkathodenröhren und Lichtbogengeneratoren in Betracht.

Zuerst wurde versucht, durch Parallelschalten vieler (5 bis 10) kleiner Röhren (Verstärkerröhren) durch entsprechende Schaltung in einem schwingungsfähigen Kreise Hochfrequenz zu erzeugen. Infolge der verschiedenen Betriebsdaten und Charakteristiken der Röhren stellte es sich als äußerst schwierig heraus, dieselben zu gutem Zusammenarbeiten zu bringen. Auch hat Barkhausen[1]) gezeigt, daß das Heizmaß derartiger Röhren mit sehr dünnem Heizfaden äußerst gering ist. Legt man eine Lebensdauer von 750 Stunden zugrunde, so ergibt sich je Röhre 5 mAmp. als Emisionsstrom. Die zur Verfügung stehende Energie ist also sehr gering[2]).

So wurde zum Lichtbogen übergegangen. Zuerst wurde mit einer kleinen Meßlampe gearbeitet, dann mit einer 200-Watt-Poulsenlampe und schließlich mit einer Schiffs-Senderlampe für 1,5 kW. Hierbei traten nun Änderungen der Wellenlänge wie auch der Intensität auf. K. Vollmer[3]) hat gezeigt, daß diese Schwankungen schwer zu verringern sind. Arbeitet man mit Zwischenkreis, so haben die primären Intensitätsschwankungen im Sekundärkreis proportionale Schwankungen zur Folge, während primäre Frequenzschwankungen sekundär ebenfalls Intensitätsschwankungen zeitigen. Meine Untersuchungen bestätigten diese Beobachtungen, ebenso auch die, daß man kein magnetisches Gebläse anwenden darf, um einigermaßen konstante Verhältnisse zu bekommen. Außerdem reichten die hiesigen Mittel nicht aus, den Generator unter den Bedingungen laufen zu lassen, für die er gebaut war. Deshalb wurde der eingeschlagene Weg aufgegeben.

Erst das Arbeiten mit Röhren großer Leistung führte zum Erfolg.

Es sei noch erwähnt, daß ich auch Empfangsversuche gemacht habe an einigen Lichtbogensendern für Telephonie wie auch Telegraphie. Aufgenommen wurde mit Hochantenne und selbstgebauter Schwingaudionschaltung. Ein Verstärker war nicht nötig. Es gelang, das Audion so rückzukoppeln, daß es nicht mehr „mitgenommen" wurde, sondern überlagerte: man hörte deutlich die Frequenzschwankungen des sendenden Generators. Dies zeigt deutlich, daß also auch dort, wo alle Erfahrungen der Praxis und technischen Hilfsmittel zur Verfügung stehen, die Schwankungen des Lichtbogens nur schwer zu beseitigen sind.

Die Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung soll von zwei Gesichtspunkten aus betrachtet werden:
a) die Erzeugung der Hochfrequenz,
b) die Prüfeinrichtungen.

a) Die Erzeugung der Hochfrequenz (Bild 1, I.)

Die Hochfrequenz wurde durch einen Röhrengenerator erzeugt. Für die Vorversuche wurden Röhren der Firmen E. Huth, C. F. Müller und Telefunken (R. S. 17, Fabrikat Osram) verwendet mit einer Leistung von 200 Watt, für die Messungen Telefunkenröhren (R. S. 18) mit 500 Watt.

Die Röhre erhielt ihre Anodenspannung (bis zu 3000 Volt) von einem mit Ne-Gas gefüllten Wehnelt-Glühkathodengleichrichter (g), der an der Sekundärseite eines

[1]) Barkhausen, Elektronen-Röhren, S. 17. Leipzig 1923.

[2]) Siehe auch S. 496, Bild 5. Um genauer ablesen zu können, sind die Werte der Abszisse und Ordinate durch 10 zu dividieren

[3]) Jahrb. d. dr. Tel. u. Tel., Bd. 3. Heft 2 u. 3. 1910.



Transformators lag. Derselbe hatte das Übersetzungsverhältnis 1 : 40 und war für 500 Perioden gebaut. In diesen wurde der Strom einer 500-Periodenmaschine (d) geschickt, deren Erregung in weiten Grenzen geändert werden konnte. Es war eine Maschine der AEG (Induktor-Gleichpoltyp) für 2 kW, angetrieben von einem Nebenschlußmotor (AEG) von 5 PS, der für ein Durchziehen und Nicht-Abfallen auch bei starker Belastung garantierte. Der Schwingungskreis bestand aus einem veränderlichen Luftkondensator und der Primärspule des Lufttransformators (t). (Die Gitterrückkoppelung ist in der Zeichnung fortgelassen.)

Der Lufttransformator (t) hatte primär 80 Windungen Emailledraht 0,6 mm ∅ und sekundär 800 Windungen Emailledraht 0,25 mm ∅. Der Durchmesser der Primärspule betrug 12 cm, ihre Länge 16 cm. Der Abstand der Spulen betrug 1 cm. Alles

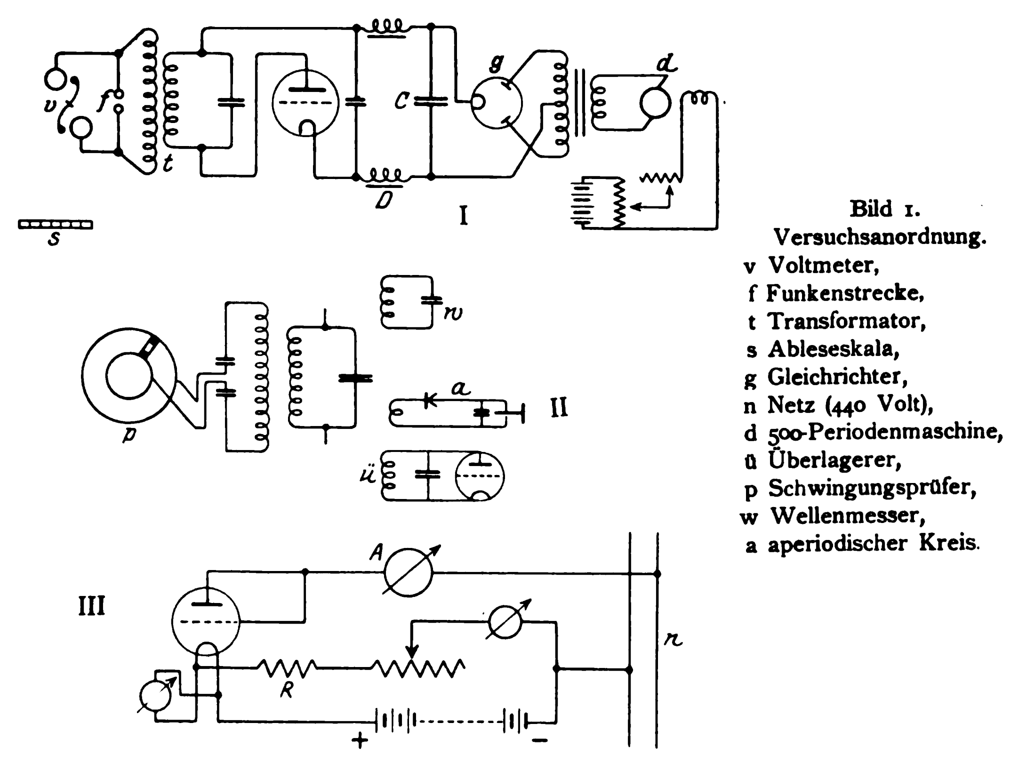


Bild 1.
Versuchsanordnung.
v Voltmeter,
f Funkenstrecke,
t Transformator,
s Ableseskala,
g Gleichrichter,
n Netz (440 Volt),
d 500-Periodenmaschine,
ü Überlagerer,
p Schwingungsprüfer,
w Wellenmesser,
a aperiodischer Kreis.

leitende Material war sonst an dem Transformator vermieden. Die Drähte wurden durch Hartgummileisten gehalten, welche auf einen Glaszylinder aufgekittet waren. Sie verliefen also meist frei in der Luft. Auch der ganze Transformator hing frei.

Unmittelbar an die Sekundärseite wurden die verschiedenen Funkenstrecken (f) angeschlossen und hierzu parallel das Voltmeter (v).

Das Voltmeter, das die Spannung sekundär messen sollte, mußte folgenden Anforderungen genügen: es mußte möglichst geringe Kapazität besitzen, um nicht zu viel Strom zu verbrauchen. Diese Kapazität durfte sich nur in geringer Weise ändern bei verschiedenen Ausschlägen, damit die Sekundärseite nicht etwa bei einer bestimmten Stellung in Resonanznähe geriete. Es mußte hohe Spannungen aushalten und durfte auch bei Überspannungen nicht etwa den Transformator kurzschließen. Sein Anzeigebereich mußte wenigstens eine Zehnerpotenz betragen bei leichter Möglichkeit einer Nacheichung.

Vorversuche, die Spannung rechnerisch zu finden mit Hilfe des Ladestromes eines bekannten Kondensators (Thermoelement oder Detektor und Galvanometer), führten zu keinem befriedigenden Resultate. Machte man den Kondensator genügend

groß, um seine Kapazität einwandfrei feststellen zu können, so entnahm er dem Kreise zu viel Strom.

Deshalb wurde diese Art der Spannungsmessung verlassen und zu ihrer direkten Messung übergegangen mit Hilfe eines elektostatischen Instrumentes. Heydweiller[1]) hat ein Spiegelelektrometer für hohe Spannungen angegeben, das auf dem Prinzip der Drehwage beruht. Es hat folgende Gestalt: zwei Ringe aus 5 mm starkem Draht mit einem Durchmesser von 10 cm stehen stark gegeneinander versetzt sich gegenüber. Zwischen ihnen hängt bifilar ein S-förmiger Körper, an dessen beiden Enden Kugeln angesetzt sind. Diese werden, wenn man an das S und die beiden Ringe andererseits eine Spannung legt, in dieselben hineingezogen. Das Instrument zeigt Effektivwerte an. Das Heydweillersche Instrument weist nun folgende Nachteile auf: da die beiden Ringe und das bewegliche S-Stück an demselben Mittelteil befestigt sind, bereiten die Isolation und die schwervermeidlichen Kriechströme Schwierigkeiten,

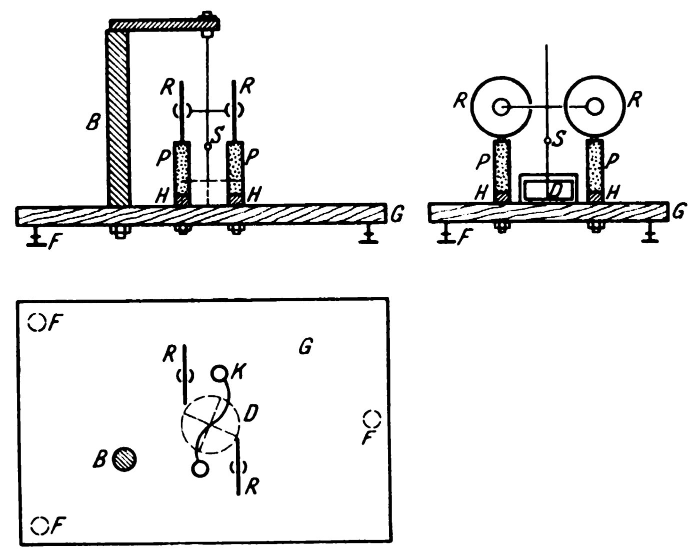


Bild 2. Hochspannungsvoltmeter.

die bei Hochfrequenz noch in besonderem Maße hervortreten. Sodann ruft eine Berührung zwischen schwingendem System und feststehendem einen Kurzschluß hervor. Drittens ist die Zahl der Kraftlinien, die von den Ringen gegen Erde und andererseits von dem S-Stück gegen Erde gehen, nicht die gleiche. Daher wird das Instrument, an einen Transformator angeschlossen, eine Unsymmetrie der Spannungsverteilung hervorrufen. Bei Hochfrequenz war zu erwarten, daß auch diese Eigenschaft schwer ins Gewicht fallen würde.

Deshalb wurde das Instrument folgendermaßen aufgebaut (Bild 2): die beiden Ringe (R) standen auf Säulen aus Paraffin (P) von 10 cm Höhe und 4 cm Dicke. Diese waren im Vakuum erstarrt. Ihre Befestigung auf der Grundplatte (G) aus Marmor bereitete einige Schwierigkeiten. Eine genügende mechanische Festigkeit wurde auf folgende Weise erreicht: die Säulen wurden aufgegossen auf ebenfalls im Vakuum mit Paraffin ausgekochte Holzfüsse (H). Noch eine innigere Verbindung zwischen Fuß und Säule bildeten 4 Glasstäbchen, die, in den Fuß eingelassen, noch 2 cm in die Säule ragten. Die Füße (H) waren unten mit Gewinde versehen und wurden mit Hartgummischrauben auf der Grundplatte befestigt. Das schwingende System (K) hing an einem Galgen (B) aus Hartgummi. Es bestand die Möglichkeit, dasselbe zu erden. Die Ringe waren so aufgestellt, daß das S-Stück bei übermäßigem Ausschlag bereits an dem einen Ring anschlug, ohne den anderen erreichen zu können.

[1]) Zeitschr. f. Instrum. 12, 377, 1892.

Da die Spannung nur an die beiden Ringe angelegt wurde, das S-Stück aber spannungslos blieb, war hierdurch gleichzeitig eine symmetrische Kapazitätsverteilung gegen Erde gewährleistet, wie auch ein Kurzschließen des Transformators unmöglich gemacht. Alle Metallteile waren gut abgerundet, um Sprühen zu verhindern. Besonderer Wert wurde auf die Dämpfung (D) gelegt: vier Flügel aus Glimmer (2×4 cm) bewegen sich in einem Gefäß, das mit Öl gefüllt ist. Die horizontale Einstellung der Grundplatte (G) erfolgte durch drei Stellschrauben (F). Die Empfindlichkeit wurde eingestellt durch Veränderung der Entfernung der beiden das schwingende System (K) haltenden Aufhängedrähte. An dem ganzen Instrument war alles Metall auf ein Minimum beschränkt, um die Kapazitätsströme zu verringern.

Die Eichung des Voltmeters.

Das Instrument wurde mit Wechselstrom von 50 Perioden geeicht. Die dazu benötigten Präzisionsinstrumente, Maschine und Transformator, sind bereits an anderem Orte beschrieben worden[1]). Bild 3 zeigt die Eichkurve. Abgelesen wurde mit Spiegel (Bild 2 S) und Skala. Der Spalt wurde durch eine gasgefüllte Niedervolt-Wolframlampe beleuchtet. Bei einem Abstand Spiegel-Skala von 75 cm konnten noch 50 Volt abgelesen werden.

Bei der Eichung war die Mitte des Transformators geerdet, um symmetrische Spannungsverteilung zu haben. Dieselbe mußte auch gewährleistet sein bei den

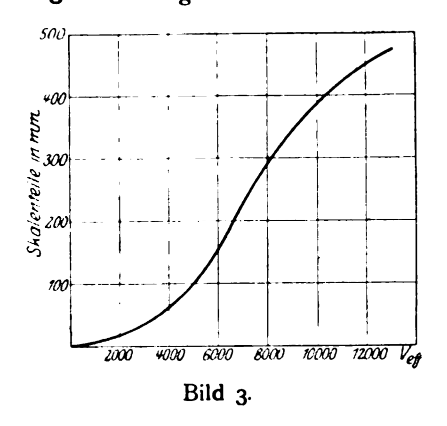


Bild 3.

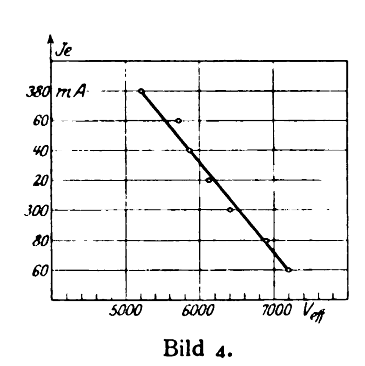


Bild 4.

Messungen, also der Lufttransformator mußte ebenfalls gegen Erde symmetrische Spannungsverteilung haben. Es wäre möglich gewesen, daß durch den Einfluß der Rückkoppelungsspule, die von der einen Seite in die Primärspule hineinragte, dies Verhältnis sich verschoben hätte. Deshalb wurde die Spannungsverteilung in folgender Weise untersucht: das eine Ende der Sekundärseite des Transformators wurde über einen kleinen Kondensator und ein empfindliches Hitzdrahtmilliamperemeter geerdet und der Ausschlag gemessen, während das andere Ende frei in Luft endete. Dann wurde das andere Ende ebenso geerdet, diesmal war das erste Ende freigelassen. Der zur Erde fließende Strom war in beiden Fällen der gleiche, also bestand Symmetrie gegen Erde.

Es war zuerst in Aussicht genommen, eine Vorrichtung zu treffen, um die Spannung während einer Messung genau linear anwachsen zu lassen. Es ergab sich jedoch, daß dies unmöglich war wegen der Schwankungen der Röhrenheizung. Diese bringen eine verschiedene Emission hervor und drücken sich in anderer Leistungsabgabe der Röhre aus. In Bild 5 ist die sekundäre Spannung dargestellt in Abhängigkeit von der Emission bei konstanter Erregung des Dynamos. Der Vorgang ist

[1]) J. Sorge, Über d. elektr. Festigkeit einiger flüssiger Dielektrika. Arch. f. Elektrot. Bd. 13. S. 189. 1924.

folgendermaßen zu erklären: je geringer die Emission wird (ein Zeichen für abnehmende Heizung), um so weniger Strom entnimmt die Röhre dem Gleichrichter. Um so geringer wird also der Spannungsabfall an ihm, d. h. die Spannung an der Röhre muß steigen. Dies zeigt Bild 4. Bereits 20 mAmp. Unterschied in der Emission ändern die Spannung um über 150 Volt; und dieser Unterschied wurde während einer Messung oft überschritten. Deshalb wurde die Spannung von Hand aus gesteigert und teilweise auch durch veränderlichen Motorantrieb mit der Möglichkeit, mittels Handrad noch feine Korrekturen vornehmen zu können.

b) Prüfeinrichtungen (Bild 1, II u. III).

Infolge der Kompliziertheit der Anordnung erwies es sich als erforderlich, die einzelnen Faktoren jederzeit einer Prüfung unterziehen zu können. Diese Faktoren waren folgende:

Konstanz des Heizstromes,
sinusförmige Schwingungen,
Konstanz der Anodenspannung.

Konstanz des Heizstromes.

Da eine Änderung des Heizstromes um 5% eine Änderung des Emissionsstromes um 100% herbeiführt, mußte besonders auf Konstanz des Heizstromes geachtet werden. Derselbe wurde deshalb nur roh mit Ampere- und Voltmeter eingestellt, um dann genau reguliert zu werden nach dem Anodenstrommilliamperemeter (A) (Bild 1, III). Hierbei wurde eine Lebensdauer von 250 Stunden zugrunde gelegt und die ihr entsprechende Emission dem Bilde 5 entnommen. Die Darstellung veranschaulicht die Gleichung

$$I_e = H \cdot E_h I_h. \qquad (1)$$

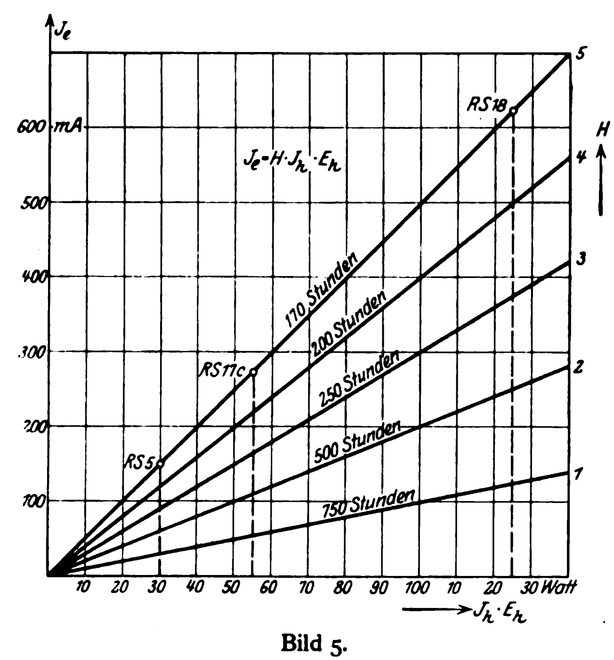


Bild 5.

Die Formel gewinnt man durch folgende Überlegung: infolge des hohen Vakuums in der Röhre kann die durch den Heizstrom entwickelte Wärmemenge $N_h = E_h I_h$ nur als Strahlung abgegeben werden, welche der Oberfläche proportional ist. Es stellt sich ein stationärer Zustand ein, bei dem die zugeführte Wärme der als Strahlung abgegebenen gleich ist, also auch proportional der Oberfläche ist. Das Verhältnis beider (Watt/Kerze) ist also unabhängig von der Oberfläche, so daß dieser Quotient ein übliches Maß der Temperatur des Heizfadens, also seiner Lebensdauer ist. Ebenso wie die Strahlung ist der Emissionsstrom I_e der Oberfläche proportional, das Verhältnis $I_e : N_h$ also wieder unabhängig von der Oberfläche, also ebenso ein Maß für die Temperatur und Lebensdauer des Fadens. Das Verhältnis von Emissionsstrom zu Heizleistung in mAmp. bezeichnet Barkhausen[1]) als Heizmaß H.

[1]) Barkhausen, l. c. s. S. 492.

$$H = \frac{I_e}{N_h} = \frac{I_e}{E_h I_h} \quad \cdots \quad I_e \text{ in } 10^{-3} \text{ Amp.}$$

So ethält man die Formel

$$I_e = H \cdot E_h I_h,$$

welche das Bild 5 darstellt. Als Abszisse ist der Wattverbrauch $E_h I_h$ der Heizung der Röhren aufgetragen, als Ordinate der Emissionsstrom J_e. Die vom Nullpunkt strahlenförmig ausgehenden Geraden sind Linien gleicher Lebensdauer für $H = 1$ bis 5. Die Wechselstromamplitude eines Schwingungskreises erreicht im Höchstfall den halben Wert des Emissionsstromes. Man gewinnt also ein Urteil, welche Leistung man von den einzelnen Röhren zu erwarten hat. Besonders bei einigen Röhren, wo die Betriebsdaten fehlten, leistete diese Darstellung obiger Gleichung gute und schnelle Dienste. Man verfährt dann in folgender Weise: man reguliert die Heizung der Röhre so lange, bis ihr Faden dem Auge ungefähr ebenso hell zu glühen scheint wie der einer Vergleichsröhre mit Wolframfaden, etwa der einer betriebsmäßig brennenden Verstärkerröhre. Jetzt stellt man den Wattverbrauch fest und erhält so den Abszissenwert $E_h J_h$, z. B. 100. Soll die Lebensdauer nun etwa 500 Stunden betragen, so wird $H = 2$ gesetzt, d. h. man erhält pro Watt Heizung 2 mAmp. Emissionsstrom, also im ganzen als Ordinate 200 mAmp. Nun reguliert man den Heizwiderstund noch so lange, bis der Emissionsstrom tatsächlich 200 mAmp. beträgt. Daß hierbei E_h und J_h noch eine geringe Änderung erfahren, ist nicht weiter von Bedeutung, da eine Änderung von H um 10 bis 20% nicht weiter ins Gewicht fällt.

Ein besonderer Schalter ermöglichte es, auch zwischen den Messungen durch einen einzigen Griff die Röhre vom Schwingungskreis und Gleichrichter abzuschalten und unter Verbindung von Gitter und Anode an 440 Volt zu legen für Ermittelung des Emissionsstromes.

Da mit Gleichstrom geheizt wurde, mußte dafür gesorgt werden, daß plötzliches Schwanken des Emissionsstromes nicht etwa die Heizung in den labilen Zustand überführte, wo der Emissionstrom für das eine Fadenende eine zusätzliche Heizung ergibt, die noch mehr Elektronen aussendet. Diese, einen Strom darstellend, wirken wieder als Heizung für das Fadenende; und so geht es fort, bis der Faden durchbrennt. Deshalb wurde vor dem negativen Pol der Heizung ein Widerstand [(R) in Bild 1, III)] gelegt von etwa der 50fachen Größe des Heizfadens. Der Emissionsstrom verteilt sich dann umgekehrt wie die an die Enden des Heizfadens angeschlossenen Widerstände und kann so kein Unheil anrichten.

Sinusverlauf der Schwingungen.

Da das Hochspannungsvoltmeter Effektivwerte anzeigte, konnte man die maximalen durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ nur unter der Bedingung finden, daß der Strom rein sinusförmig verlief. Zur Prüfung des Kreises auf Oberwellen diente der Überlagerer (ü) (Bild 1, II) mit dem aperiodischen Kreis (a). Der Überlagerer wurde erregt durch eine 10 Watt-Senderöhre, sein Bereich ging bis zur vierten Oberwelle des großen Senders. Eine grobe Abstimmung des Überlagerers wurde durch 8 Stufen der Spule erreicht, die feine Einstellung geschah an einem Drehplattenkondensator.

Wellenlänge.

Die Wellenlänge wurde gemessen durch einen Wellenmesser (w) von Telefunken, Type KKW 31 mit He-Röhrchen als Indikator. Als noch empfindlicher erwies sich jedoch eine Pintsch-Glimmlampe. Allerdings muß der Wellenmesser bei ihrer Verwendung frisch geeicht werden, da die Kapazität der Fassung und Zuleitungsdrähte dann mit eingeht.



Anodenspannung.

Eine Messung der Anodenspannung war nur qualitativ nötig, um zu erkennen, ob alle einzelnen Teile glatt zusammenarbeiteten. Sie geschah durch ein selbstangefertigtes Blattelektrometer, an dem die Spannung von 250 zu 250 Volt ablesbar war. Es wurde mit 50 Perioden geeicht.

Um zu erkennen, ob der vom Gleichrichter gelieferte Strom auch gleichmäßig war, wurde er auf seine Spannung untersucht, die in diesem Falle ebenfalls kontinuierlich verlaufen mußte. Und zwar die Spannung bei Belastung, d. h. im Betrieb. Es erwies sich als geeigneter, die hochfrequente Wechselspannung zu analysieren. Hierzu diente eine Einrichtung, ähnlich den Schwingungsprüfern, wie man sie für Lichtbogengeneratoren verwendet.

Auf der Achse eines Motors, dessen Tourenzahl in weiten Grenzen geändert werden konnte, saß eine Holzscheibe von 30 cm Durchmesser. An ihrem Umfang war radial die Indikatorröhre angebracht. Schleifringe und Bürsten vermittelten die Verbindung zu den inneren Belegungen zweier Kondensatoren, deren äußere an die Enden der Sekundärseite des Lufttransformators angeschlossen waren. Bild 1, II zeigt bei p die Schaltung. Die Kondensatoren bestanden aus je zwei sich gegenüberstehenden Messingkugeln von 1 cm Radius in einem Abstand von 5—15 mm. Als Indikator diente ein He-Rohr anstatt der schwer ansprechenden und dann stets in ganzer Länge leuchtenden Ar-Röhren.

Wurde nun Sender und Schwingungsprüfer in Tätigkeit gesetzt, so zeigte sich am Rande der Scheibe das Bild 6a. Der Hochfrequenzstrom war offenbar abgehackt im Rhythmus der 500-Periodenmaschine. Der Kondensator C und die Luftdrosseln D (Bild 1, I) reichten sichtlich nicht hin, die Schwankungen des gleichgerichteten Stromes auszugleichen. Die scheinbaren Unterbrechungen des Bildes sind darauf zurückzuführen, daß in der He-Röhre erst bei 60—90 Volt eine leuchtende Entladung eintritt. Das ständige Abwechseln zweier verschiedener Werte ist so zu erklären, daß die beiden Mittelfrequenztransformatorseiten ungleichmäßig gewickelt waren, der herausgeführte Punkt entspricht also nicht dem Nullpunkt. Hierbei betrug die Größe von C 2500 cm. Nun wurden die Luftdrosseln ersetzt durch eisengefüllte (Sekundärseiten kleiner Transformatoren). Das Bild zeigte dann die Form Bild 6b, die Spannung verlief bereits stetig. Aber immer noch zeigte sich deutlich ein rhythmisches Schwanken. Der Kondensator C wurde nun vergrößert bis auf $9 \cdot 10^5$ cm, wo sich das Bild Bild 6c ergab, also keine Schwankungen mehr auftraten. Jedoch reichte diese Kapazität noch nicht aus, wenn dem Kreis mehr Energie entzogen wurde, vielmehr zeigte dann der Schwingungsprüfer wieder das Bild b. Erst, nachdem der Kondensator C auf $1{,}8 \cdot 10^6$ cm vergrößert worden war, ergab sich unter allen Betriebsbedingungen eine vollkommen konstante Spannung.

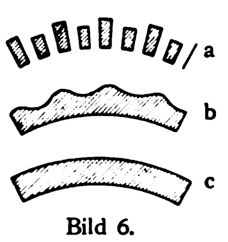


Bild 6. Schwingungsprüfer.

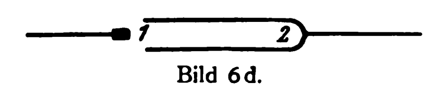


Bild 6d.

Bild 6d zeigt die Elektrodenanordnung in der Leuchtröhre. Das Leuchten setzte bei geringer Spannung ein beim Punkt 1 und breitete sich bei steigender Spannung immer mehr in Richtung nach Punkt 2 aus. Bei den Bildern a, b und c ist also der Punkt 1 unten, d. h. nach dem Drehungsmittelpunkt zu zu denken.

Die Messungen.

Die ausgeführten Messungen wurden mit der Wellenlänge 3000 m gemacht. Messungen, die mit $\lambda = 2500$ m und $\lambda = 3500$ m angestellt wurden, ergaben keine Abweichungen.



Die Versuche sind in zwei Gruppen zu sondern:
1. Versuche in Luft.
2. Versuche an festen Körpern.

1. Versuche in Luft.

Es wurden Untersuchungen gemacht mit ebenen Elektroden, mit Kugeln und mit Spitzen. Die verwendete Funkenstrecke, in welche die Elektroden eingesetzt wurden, war durch Glas isoliert. Beide Elektroden konnten grob eingestellt werden, die eine wurde noch mit einer Feineinstellung versehen, bestehend aus einer Spindel mit 5-mm-Gewinde von 1 mm Ganghöhe. Das Ende der Spindel trug eine Scheibe, die in 100 gleiche Teile geteilt war. Mit ihrer Hilfe konnte man noch 0,005 mm einwandfrei einstellen. Da mit Schlagweiten von etwa 1—10 mm gearbeitet wurde, betrug die Genauigkeit der Ablesung ± Fehler von 0,5 bis 0,05%. Die mechanische Festigkeit der Funkenstrecke war genügend groß, daß sie durch elektrische Beanspruchung nicht deformiert wurde. Die Nullpunktseinstellung durch Lehren erwies sich bei ebenen Elektroden und Kugeln als nicht statthaft, bei Spitzen konnte man sie jedoch anwenden. Im anderen Falle wurde zuerst der Nullpunkt, d. h. die Berührung der Elektroden elektrisch festgestellt, indem an die Elektroden eine Spannung von wenigen Millivolt gelegt wurde. Dann drehte man die Spindel, bis bei Berührung der Elektroden ein Milliamperemeter ausschlug.

Um den Verzögerungseffekt zu beseitigen, wurde die Funkenstrecke durch eine Uviollampe bestrahlt, die Temperatur der Luft in unmittelbarer Nähe abgelesen.

Sämtliche Werte für Luft sind Mittelwerte aus vielen Überschlägen. Für einen Punkt wurden oft 20 und mehr Messungen gemacht.

Die Elektroden mußten vor den Überschlägen peinlichst gesäubert werden. Sie waren hochglänzend poliert und wurden vor Gebrauch mit absolutem Alkohol abgerieben. Während man bei Plattenelektroden vor dem neuen Säubern bis 4 Überschläge hintereinander machen konnte, mußten die Kugeln nach jedem zweiten Überschlag geputzt werden. Dies ist darauf zurückzuführen, daß bei den Platten der Überschlag doch nicht immer genau an der gleichen Stelle eintrat, während dies bei Kugeln der Fall war. Blieb der Überschlag einige Sekunden bestehen, so wurden die Elektroden stark angegriffen und mußten, auf die Achse eines Motors gesetzt, zuerst mit Putzpomade behandelt werden.

Die Streuung war bei Kugeln nicht so groß, da diese sich genauer zentriert einstellen ließen. Bei den ebenen Elektroden als Kugelausschnitten von Kugeln von 1 m Radius war die axiale Zentrierung schlecht durchführbar, so daß die Überschläge öfters kleine Abweichungen gegen die Mitte hatten. Eine Verbesserung erreichte man dann, indem eine der Elektroden gedreht wurde. Da die Funkenbahn horizontal verlief, traten durch Staubteilchen fast keine Störungen ein.

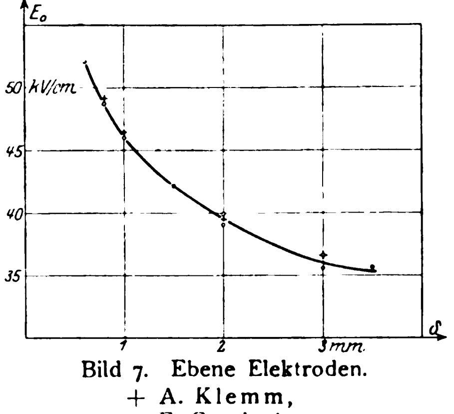


Bild 7. Ebene Elektroden.
+ A. Klemm,
○ E. Goebeler.

a) Ebene Elektroden.

Die verwendeten ebenen Elektroden bestanden aus Messing und hatten einen Durchmesser von 52 mm. Sie waren auf der Vorder- und Rückseite leicht gewölbt, so daß ihr Krümmungsradius 1,00 m betrug. Bild 7 zeigt die erhaltenen Werte der Feldstärke E in Abhängigkeit von der Schichtdicke δ, die folgende Tabelle 1 gibt sie zahlenmäßig. Die Werte sind auf 760 mm Hg und 20° C reduziert.

Zum Vergleich dienen die Klemmschen Werte, die mit Gleichstrom erhalten wurden [1]. Die zweite Messung wurde als Kontrolle drei Monate später gemacht.

Tabelle I.

	Feldstärke in k Volt/cm, E_{max}			Abweichung in %	
δ mm	1. Messung	2. Messung	nach A. Klemm	1. Messung	2. Messung
0,6	52,2		52,75	— 1,05	
0,8	48,7		49,1		
1,0	46,1	46,4	46,3	— 0,43	+ 0,23
1,5	42,1				
2,0	39,8	39,1	39,25	+ 1,4	— 0,38
3,0	36,6	35,6	36,6	0	— 2,8
3,5	35,7				

Die auftretenden prozentualen Abweichungen von den Klemmschen Messungen blieben bei den vorliegenden Messungen unterhalb 2%, wie die letzten beiden Spalten der Tabelle zeigen. Die Klemmschen Messungen selbst sind nach seiner Angabe auf 2—3% genau.

b) Kugelelektroden.

Es folgten Messungen an Kugelelektroden. Die Elektroden bestanden aus Messingkugeln von 20,5 mm Durchmesser. Da bis zu Schlagweiten von 4 mm gemessen wurde, konnte das Feld nicht mehr als homogen angesehen werden. Deshalb wurde bei Berechnung der Feldstärke E_0 das Verhältnis $\frac{\delta}{r}$ berücksichtigt [2]. Die Spannungsverteilung war symmetrisch, also

$$E_0 = \frac{U}{d} \cdot f$$

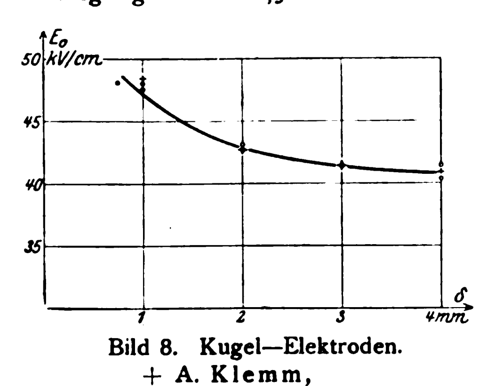


Bild 8. Kugel—Elektroden.
+ A. Klemm,
○ E. Goebeler.

Zum Vergleiche dienen wieder die Werte nach A. Klemm für Gleichstrom. Die Messung 2 ist einige Wochen später gemacht. Bild 8 zeigt die Feldstärke in Abhängigkeit von der Schlagweite, Tabelle II gibt die Werte an:

Tabelle II.

		Feldstärke in k Volt/cm, E_{max}			Abweichung in %	
δ mm	f	1. Messung	2. Messung	nach A. Klemm	1. Messung	2. Messung
0,75	1,0	48,2				
1,0	1,034	47,6	48,25	48,00	— 0,84	+ 0,52
2,0	1,068	43,1	42,7	42,75	+ 0,63	— 0,12
3,0	1,102	41,6	41,5	41,4	+ 0,48	+ 0,24
4,0	1,137	41,5	40,4	40,85	+ 1,56	— 1,11

Die Werte decken sich also unter Abweichung, die kleiner als 2% ist, mit den von A. Klemm mit Gleichstrom gefundenen.

[1] Arch. f. Elektrot. Bd. 12, S. 565 f. 1923.

[2] W. O. Schumann, Elektr. Durchbruchfeldstärke von Gasen. Springer, Berlin, S. 29, 1923.

c) Messungen an Spitzen.

Frequenzabhängigkeit der Überschlagspannung (Funkenspannung).

Zuerst wurde die Abhängigkeit von der Frequenz untersucht, und zwar wurde ein Vergleich gemacht zwischen 500 Perioden Wechselstrom und $1,25 \cdot 10^5$ Perioden Hochfrequenz. Die 500 Perioden wurden von derselben Maschine abgenommon, die bei Hochfrequenzmessungen die Anodenspannung lieferte. Ihr Scheitelfaktor war schon von anderer Seite[1]) gemessen worden und betrug in dem verwendeten Bereich 1,36. Der angeschlossene Transformator (Brown, Boveri Co.) hatte das Übersetzungsverhältnis 220 auf 36480 Volt.

Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß Funkenstrecke und Hochspannungsvoltmeter an ihrem Platze blieben und nur die Zuleitungen einmal an dem Hochfrequenztransformator und einmal an den von niederer Frequenz angeschlossen wurden. In beiden Fällen wurde die Spannung am Hochspannungsvoltmeter abgelesen.

Die Spitzenelektroden bestanden aus Grammophonstiften von 1,05 mm Dicke. Sie ragten 15 mm aus den Messinghaltern hervor, die 8 mm Durchmesser hatten und vorn, wo die Nadeln eingesetzt wurden, halbkugelig abgedreht waren. Während die Nadeln bei Hochfrequenz für mehrere Überschläge verwendet werden konnten, mußten bei 500 Perioden nach jedem Überschlag neue eingesetzt werden, da hier ein viel größerer Strom floß, der die Spitzen zum Schmelzen brachte.

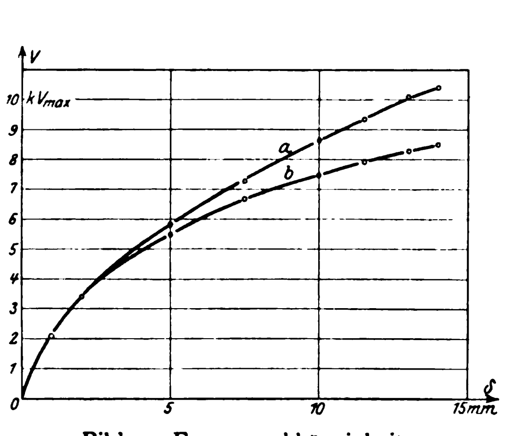


Bild 9. Frequenzabhängigkeit. (Spitzen.)
a 500 Perioden,
b Hochfrequenz.

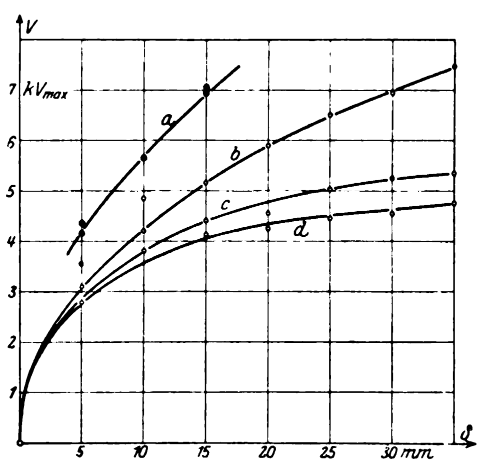


Bild 10. Verschieden lange Spitzen.
a Funkenspannung,
b Anfangsspannung bei 6 mm Länge,
c " " 10 " "
d " " 14 " "

Tabelle III.

d mm	maximale Überschlag-Spannung in kVolt $\nu = 500$	$\nu = 1,25 \cdot 10$	Abweichung in %
1	2,085	2,085	0
2	3,40	3,40	0
5	5,84	5,51	6
7,5	7,29	6,72	8,5
10	8,70	7,50	16
11,5	9.34	7,92	18
13	10,10	8,27	22
14	10,40	8,50	22,5

[1]) F. Müller, Diss. Jena 1924, s. S. 6.

Aus Tabelle III und Bild 9 ergibt sich, daß der Unterschied zwischen Hochfrequenz und 500 Perioden mit steigendem Abstand der Elektroden zunimmt. Der Überschlag tritt bei Hochfrequenz eher ein infolge starker Büschelentladungen, die ihm vorausgehen. Inwieweit die Elektrodenhalter das Feld beeinflußen, ist Gegenstand der nächsten Untersuchung.

Verschieden lange Spitzen (bei Hochfrequenz).

Ein zweiter Versuch sollte Aufschluß geben über den Einfluß der Länge der Spitzen auf die Funkenspannung. Hierfür wurden Nähnadeln von 1,22 mm Dicke verwendet. Tabelle IV gibt die Werte an für die Funkenspannung F in kVolt und die Anfangsspannung A, ebenfalls in kVolt, Bild 10 ist die dazu gehörige Kurvendarstellung. Es wurde mit den drei verschiedenen Längen der Spitzen gearbeitet: l = 14 mm, = 10 und = 6 mm.

Tabelle IV.

d	l = 14 mm		l = 10 mm		l = 6 mm	
mm	A	F	A	F	A	F
5	2,8	4,15	3,55	4,15	3,1	4,35
10	4,2		3,83		4,85	5,65
15	4,15	7,05	4,43	6,95	5,18	
20	4,25		4,55		5,9	
25	4,45		5,01		6,5	
30	4,55		5,25		6,95	
35	4,57		5,35		7,48	

Die Kurven zeigen deutlich, wie der Unterschied der Anfangsspannung mit wachsendem d zunimmt als Folge des Einflusses der Elektrodenhalter. Je kürzer die Elektroden sind, um so mehr wird das Feld durch die Elektrodenhalter beeinflußt. Dieselben hatten die gleiche Form wie bei dem vorigen Versuch, die Nähnadeln waren in 8 mm starke runde Messingstäbe eingesetzt, die vorn halbkugelig abgedreht waren. Bei der Funkenspannung war kein Einfluß der Länge der Spitzen festzustellen, da der hierauf untersuchte Bereich zu klein war. Über 15 mm Schlagweite war der Energieverlust durch Sprühen und durch Büschelentladungen bereits so groß, daß ein Überschlag nicht mehr in eindeutiger Weise erzielt werden konnte.

2. Untersuchung fester Körper.

Den zu untersuchenden festen Körpern wurde die Form von Bi-Konkavlinsen gegeben, deren Höhlungen, mit Quecksilber ausgefüllt, als Elektroden dienten. Ist der Radius der Höhlungen genügend groß und der Abstand d zwischen ihnen genügend gering, so kann man das Feld als homogen ansehen. Die Funkenstrecke ist ähnlich der von H. Edler angegebenen und von H. Rochow benutzten, die Füllung mit Quecksilber wurde ebenfalls im Vakuum vorgenommen[1]). Die Hartgummikörper, die rechts und links an die Linse ansetzten und die das Quecksilber am Herauslaufen hinderten, sowie die Zuführungen für den Strom enthielten, wurden durch ein Gestell gehalten, an dem sorgfältig alles Metall vermieden war. Es bestand aus im Vakuum ausgekochten Holz. Durch eine große Schraube aus dem gleichen Material wurden Linse und Hartgummiansätze fest zusammengepreßt.

Im Unterschied von den Messungen in Luft konnten bei den einzelnen zu untersuchenden Stoffen keine Mittelwerte gebildet werden, da nur eine beschränkte Anzahl von Linsen zur Verfügung stand. Jede Linse mußte besonders gedreht und

[1]) H. Rochow, Diss. Jena 1924. — H. Gabler, Diss. Jena 1924.



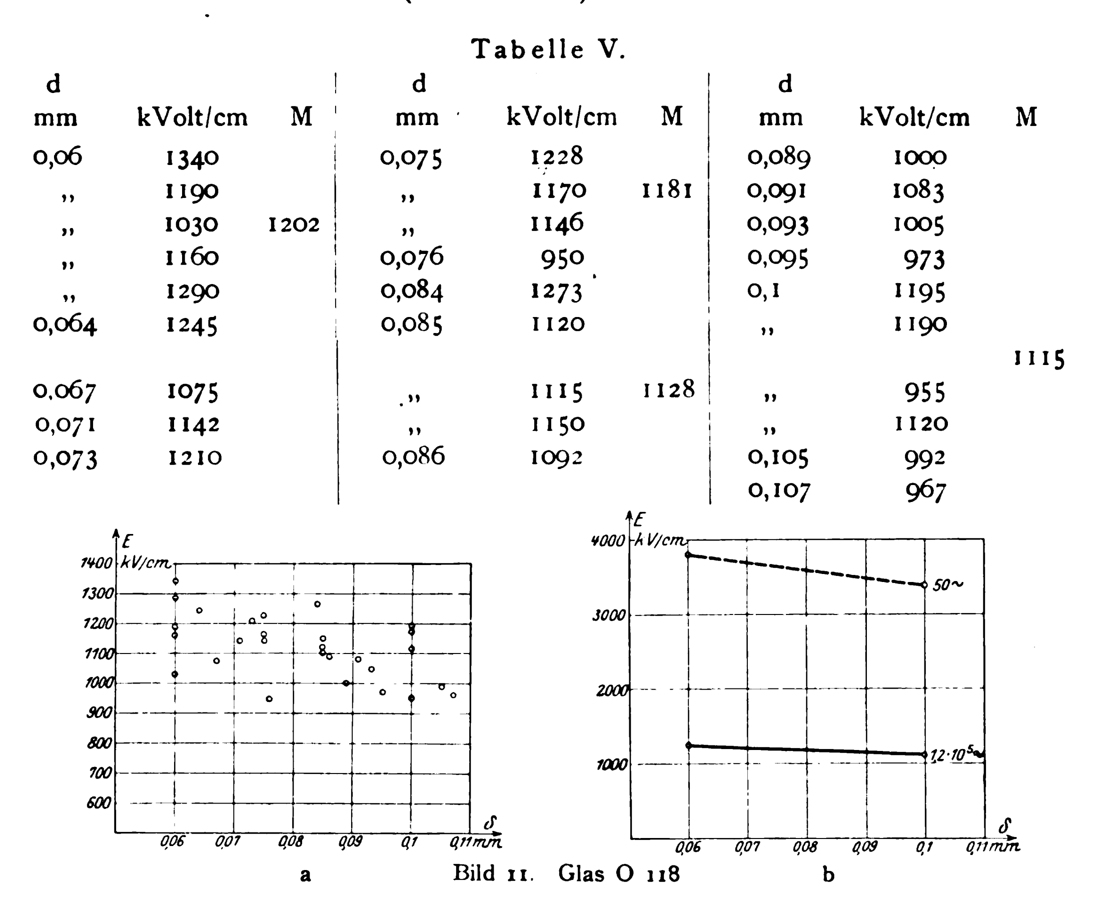
geschliffen werden, wobei es gewöhnlich nicht möglich war, mehrere Linsen mit bis in die Tausendstel-Millimeter übereinstimmenden Dicken herzustellen. Die Schichtdicken wurden mit einem Dickenmesser der Firma Carl Zeiß festgestellt und die Feldstärken unter Berücksichtigung der Tausendstel-Millimeter dann berechnet. Auf diese Weise wurde im allgemeinen keine Kurve erhalten, sondern mehr oder weniger große Streugebiete. Diese sind allerdings lange nicht so ausgedehnt wie bei Rochow, der mit 50 Perioden arbeitete. Vielleicht findet dies eine Erklärung durch den Umstand, daß die Spannungssteigerung sekundär statt bei Null bei 500 $Volt_{eff}$ einsetzte, da der Gleichrichter erst bei einer bestimmten Zündspannung zu arbeiten anfing. Es ist nicht ausgeschlossen, daß durch diesen Stoß Linsen mit kleinen Fehlern gleich im Anfang durchschlagen wurden, so daß sie keinen Wert ergaben. Hierfür spricht der Umstand, daß die Streuung nach niederen Werten geringer war als die nach hohen.

Untersuchungen an Glas.

Zuerst wurde ein schweres Flintglas der Firma Schott u. Gen., O 118, untersucht. Die Spannungssteigerung betrug sekundär 30 Volt/Sekunde. Tabelle V gibt die Werte der Feldstärke an (Maximalwerte).

Tabelle V.

d mm	kVolt/cm	M	d mm	kVolt/cm	M	d mm	kVolt/cm	M
0,06	1340		0,075	1228		0,089	1000	
,,	1190		,,	1170	1181	0,091	1083	
,,	1030	1202	,,	1146		0,093	1005	
,,	1160		0,076	950		0,095	973	
,,	1290		0,084	1273		0,1	1195	
0,064	1245		0,085	1120		,,	1190	
								1115
0,067	1075		,,	1115	1128	,,	955	
0,071	1142		,,	1150		,,	1120	
0,073	1210		0,086	1092		0,105	992	
						0,107	967	



a Bild 11. Glas O 118 b

Für die Materialdicken, bei denen mehrere Linsen gleicher Dicke zur Verfügung standen, sind auch noch die Mittelwerte M gebildet. Bild 11a zeigt die Werte graphisch aufgetragen. Trotzdem der Dickenbereich nur klein ist, erkennt man, wie die Streuung mit zunehmender Dicke der Linsen abnimmt. Sie hat den Maximalwert von 12,5%. Die Durchbruchfeldstärke ist gegenüber der bei 50 Perioden[1]) auf

[1]) H. Rochow, l. c.

ein Drittel des Wertes gesunken. Dies zeigt die Kurve Bild 11 b, wo die Mittelwerte beider Untersuchungen eingetragen sind. Bei Niederfrequenz betrug die Streuung nach Rochow maximal 25%

Der Durchbruch erfolgte unter Lichterscheinung und einem lauten Knacken. Betrachtete man die Stelle des Durchbruchs mit einem starken Vergrößerungsglase, so schien bei vielen Linsen eine Art Schmelzung eingetreten zu sein. Dafür spricht auch der Umstand, daß das erwähnte Aufleuchten beim Durchschlag von gelber Farbe war.

Da die Linse sich deutlich erwärmte, könnte der Einwand gemacht werden, daß sie vielleicht durch thermische Beanspruchung infolge ungleichmäßiger Ausdehnung erst springe und dann durch diesen Sprung oder Riß der Durchschlag eingeleitet werde. Um dies zu untersuchen, wurden einzelne Linsen längere Zeit unter eine Spannung gesetzt, die sie gerade noch vertrugen. Öfters wurde auch mit der Spannung bis auf Null zurückgegangen, und sie dann allmählich wieder gesteigert. Auch wurde die Spannung mehrere Male aus- und eingeschaltet. In allen diesen Fällen blieb die Durchbruchfeldstärke die gleiche, es zeigten sich keinerlei Ermüdungserscheinungen.

Untersuchungen an Porzellan.

Beim Schleifen der Porzellanlinsen mußte sehr darauf geachtet werden, daß das Schleifmittel nicht in die Poren eindrang, infolgedessen die wirksame Dicke nicht mehr feststellbar gewesen wäre. Deshalb wurden die Linsen mit Diamantstaub und Petroleum geschliffen und dann mit Druckluft gereinigt.

Es wurden zwei Sorten von Porzellan untersucht, welche als Sorte „H" und „M" bezeichnet werden sollen. „H" war bei höherer Temperatur gebrannt und hatte eine feinere Struktur als „M". Die Linsen H ließen sich auch besser und genauer schleifen, so daß eine bestimmte Dicke gemessen werden konnte. Linsen, die aus der Sorte M dünner als 0,3 mm geschliffen waren, erwiesen sich als von vornherein unbrauchbar, indem sie gleich zu Anfang bei der sekundären Minimalspannung von 500 Volt durchschlagen wurden. Daß sie vorher noch mechanisch einwandfrei gewesen waren, wurde festgestellt, indem sie vor dem Versuch an 220 Volt Gleichspannung gelegt wurden. Hier stellten sie noch keine leitende Verbindung dar. Tabelle VI und VII geben die Durchbruchfeldstärken, m sind wieder die Mittelwerte.

Tabelle VI.

Material „H".

d mm	kVolt/cm	m	d mm	kVolt/cm	m
0,12	312		0,2	371	
0,12	354		0,2	384	
0,12	378		0,25	278	
0,12	518	395	0,25	345	324
0,12	324		0,25	306	
0,12	416		0,25	365	
0,12	463		0,35	232	
0,2	251		0,35	202	227
0,2	288		0,35	214	
0,2	315		0,35	259	
0,2	414	337			

Tabelle VII.

Material „M".

d mm	kVolt/cm	d mm	kVolt/cm
0,291	212	0,338	349
0,301	298	0,344	345
0,302	418	0,348	359
0,303	249	0,35	271
0,304	282	0,383	251
0,304	335	0,384	262
0,305	461	0,422	243
0,333	217	0,423	342
0,336	310		

In Bild 12a sind die Werte graphisch aufgetragen. Man erkennt die bedeutend größere Streuung des Porzellans M gegenüber H. Die Feldstärke nimmt mit wachsender Schichtdicke ab, wie aus dem Material H ersichtlich. Diese Abnahme ist bedeutend größer als bei 50 Perioden, mit denen Rochow an dem Porzellan H Messungen gemacht hat. Dies veranschaulicht das Bild 12b. Es ist unwahrscheinlich, daß sich die beiden Kurven bei kleinen Schichtdicken schneiden. Leider liegen bei den Rochowschen Werten nicht genügend Beobachtungen vor, auch ist die Streuung nicht angegeben. So ist der Verlauf der 50-Periodenkurve nicht ganz sicher.

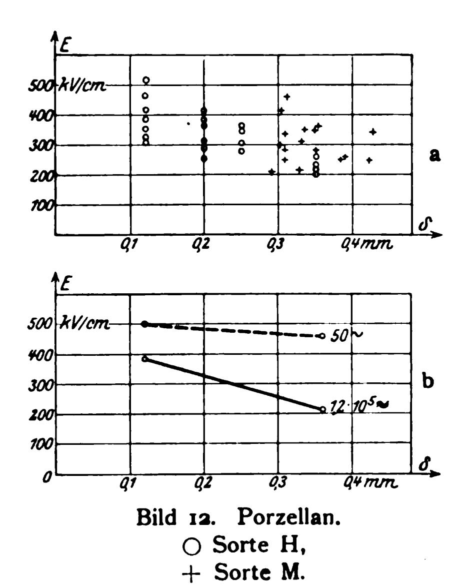


Bild 12. Porzellan.
○ Sorte H,
+ Sorte M.

Die Erhitzung der Linsen war viel größer als bei Glas. Der Durchschlag, an den Linsen als kaum bemerkbares schwarzes Pünktchen erkennbar, ließ sich oft mit Gleichstrom (220 Volt) nicht feststellen. Es kam auch vor, daß eine bei einer bestimmten Spannung durchschlagene Linse für eine geringere Hochfrequenzspannung noch einen großen Widerstand bedeutete, so daß die Spannung noch einmal bis zu einem zweiten Durchschlag gesteigert werden konnte. Solche Werte wurden bei den Messungen natürlich nicht berücksichtigt. Bei derartigen Vorgängen erwies sich der Gleichrichter als deutlicher Indikator für die verschiedenen Zustände, indem das Ne-Gas bei einem wirklichen und dauernden Durchschlag bedeutend weniger Licht ausstrahlte. So erkannte man auch in vielen Fällen an seinem Flackern, daß der Durchgang der Elektrizität durch die Funkenstrecke unterbrochen wurde von Augenblicken, während derer die Linse wieder eine bestimmte Spannung aushielt.

Diese Erscheinungen sind zurückzuführen auf die poröse Beschaffenheit des Porzellans und seine Durchsetzung mit Luft. Der Einwand, daß sich in der Funkenbahn auch Quecksilberdampf bilden kann, wird durch den Umstand widerlegt, daß bei Glas (und dem im folgenden zu behandelnden Hartgummi) derartige Erscheinungen nie auftraten. Auch Wasserdampf kann wegen der hohen Temperatur beim Brennen des Porzellans nicht hierfür verantwortlich gemacht werden. Es bleiben also nur eingeschlossene Luftreste übrig, die, beim Durchschlag stark erhitzt, sich ausdehnen

und in dem Funkenkanal das Quecksilber verdrängen. Auch wenn sie sich wieder zusammenziehen, bleibt der Raum frei wegen der geringen Adhäsion von Quecksilber zu Porzellan, und die Spannung steigt wieder an der Funkenstrecke.

Das Material M zeigte nicht nur eine bedeutend größere Streuung, sondern hatte auch einen sehr großen Ausfall an Linsen. Im Durchschnitt lieferte nur jede dritte Linse einen Wert.

Untersuchungen an Hartgummi.

Als nächstes folgten Untersuchungen an Hartgummi. Es wurde bester Hartgummi der Kautschukwerke Harburg verwendet. Die Streuung war gering, unbrauchbare Linsen kamen fast nicht vor. Tabelle VIII gibt die Werte der Feldstärke an unter Bildung der Mittelwerte m.

Tabelle VIII.

d mm	kVolt/cm	m	d mm	kVolt/cm	m
0,08	920		0,11	788	
0,08	763		0,11	657	
0,08	740	746,6	0,15	634	
0,08	655		0,15	706	619
0,08	805		0,15	591	
0,10	735		0,15	545	
0,10	690		0,2	460	
0,10	646		0,2	493	
0,10	679	752,5	0,2	570	537
0,10	790		0,2	625	
0,10	842		0,21	598	
0,10	886		0,21	495	
0,11	788		0,21	495	549,5
			0,21	610	

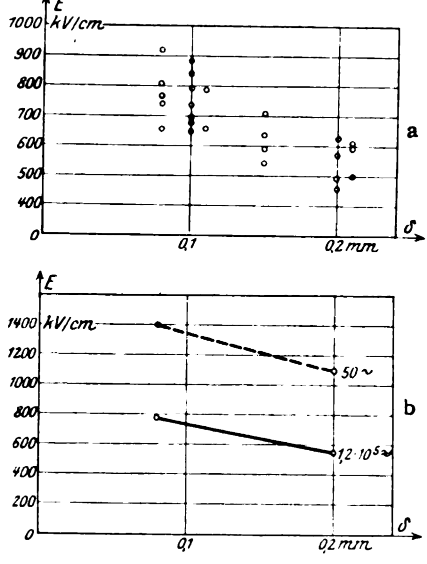


Bild 13. Hartgummi.

Bild 13a zeigt das graphische Bild. Die Mittelwertskurve verläuft nicht mehr streng gradlinig. Die maximale prozentuale Abweichung beträgt 14% im Unterschied von den Rochowschen Werten bei 50 Perioden, wo sie 70% beträgt. Bild 13b stellt die Mittelwerte beider Versuchsreihen zum Vergleich dar. Die Abnahme der Feldstärke bei größeren Schichtdicken ist für beide Frequenzen fast die gleiche, die Durchbruchfeldstärke ist bei Hochfrequenz auf die Hälfte herabgesunken.

Der einmal erfolgte Durchschlag blieb im Gegensatz zu Porzellan auch bestehen. Das Material war um die Durchschlagsstelle stets etwas verbrannt. Dieselbe war kreisrund, ringsherum zeigte sich ein bräunlicher Niederschlag. Wahrscheinlich hatte sich bei der Entladung Schwefel ausgeschieden. Die Linsen erwärmten sich stark vor dem Überschlag, doch zeigte sich kein verändertes Aussehen, wenn man sie aus der Funkenstrecke herausnahm, ehe der Durchbruch erfolgt war. Doch ist es fraglich, ob die chemische Zersetzung erst unmittelbar beim Überschlag eintritt.

Versuche an Galalith.

Es wurden zwei Sorten von Galalith untersucht, gereinigtes und ungereinigtes. Die Streuung war hier sehr gering, so daß man für die einzelnen Punkte nur wenig Linsen brauchte. Wegen der geringen Festigkeit konnten bis 5 mm dicke Linsen untersucht werden. Tabelle IX gibt zuerst die Werte für geringe Dicken bei gereinigtem Material.

Tabelle IX.

d mm	kVolt/cm	d mm	kVolt/cm
0,6	44,25	1,5	20,5
0,6	41,4	1,5	19,8
0,6	40,7	1,5	18,8
0,6	40,7	1,9	14,3
0,7	36,4	1,9	14,7
0,75	30,7	1,9	14,7
0,75	30,7	2,5	12,6
0,75	32,6	2,5	11,9
1,0	29,0	2,5	12,8
1,0	28,2	2,5	13,3
1,0	25,5		

Die maximale Streuung, die bei 1 mm auftrat, betrug 7,3%. Bild 14 zeigt unter I die Lage der Punkte.

Ein zweiter Versuch verglich das gereinigte Material mit dem nicht gereinigten. Es ergaben sich folgende Werte:

Tabelle X.

	gereinigt		ungereinigt	
d mm	kVolt/cm	%	kVolt/cm	%
3	11		12,5	
3	11,2	1,8	15,1	10,2
3	10,7		13,5	
4	9,06	0	9,70	5,1
4	9,06		10,75	
5	8,65		9,1	
5	8,7	1,75	9,4	2,67
5	8,85		9,55	

I

a gereinigt, b ungereinigt.

Bild 14. Galalith a und b.

Die Tabelle zeigt, daß die Streuung bei dem gereinigten Material viel geringer ist als bei dem ungereinigten. Hier ist jedoch die Durchbruchfeldstärke größer, und

zwar ist sie für 3 mm starke Linsen um über 12% gestiegen. Für größere Schichtdicken wird der Unterschied dann geringer. Aber trotz der verhältnismäßig großen Streuung des ungereinigten Materials fällt doch kein Meßpunkt in den Bereich des gereinigten. Die elektrische Festigkeit des letzteren ist also geringer als die des ungereinigten. Nach Angaben der Hersteller bestand die Reinigung in der Entziehung von Ölen und Fetten. Diese scheinen also den Isolationswert zu erhöhen.

Vergleichsversuche mit 50 Perioden lagen noch nicht fertig vor, doch scheint das Verhältnis der Festigkeiten bei Niederfrequenz gerade das Umgekehrte zu sein.

Vielleicht ist dies die Folge der äußerst starken Erhitzung, welche die Linsen bei Hochfrequenz vor dem Durchschlag erfahren. Der Funke bringt eine Zersetzung des Materials mit sich, die Funkenbahn ist umgeben von einer stark gebräunten, röhrenförmigen Schicht. Die Entwicklung von Gasen ist so stark, daß, wenn nicht sofort ausgeschaltet wird, die Entladung intermittierenden, stoßweisen Charakter annimmt.

Verschiedene andere Körper.

Es wurden noch zwei weitere Materialien untersucht, die aber keine reproduzierbaren Werte ergaben. Trotzdem soll ihr Verhalten bei Hochfrequenzbeanspruchung beschrieben werden.

1. Vulkanfiber.

Vulkanfiber verliert bei Beanspruchung durch Hochfrequenz seine isolierenden Eigenschaften vollständig; denn es war nicht möglich, selbst bei 4 mm Dicke die geringste Spannung an die Linse zu legen. Die Erwärmung war nur gering und kaum merklich. Geringe Spuren einer ölförmigen Flüssigkeit schwitzten dabei aus.

2. Faturan.

Faturan wurde in 5 mm Stärke untersucht. Steigerte man die Spannung allmählich (30 Volt/sec), so gelang es nicht, über 2000 Volt_{max} zu kommen. Von da ab ging die Spannung an der Linse, unbeschadet immer stärkerer Erregung der Maschine, zurück. Seitlich quollen an der Linse Dämpfe hervor, die sich sogar entzündeten, wenn nicht rechtzeitig ausgeschaltet wurde. Das Material war stark aufgequollen und zersetzt.

Vielleicht wäre es möglich, mit sehr geringen Hochfrequenzspannungen und sehr großer Geschwindigkeit der Spannungssteigerung noch reproduzierbare Werte zu erhalten. Hierfür war jedoch der Transformator und das Voltmeter nicht geeignet.

Die Untersuchungen an festen Körpern ergaben ohne Ausnahme eine Herabsetzung der Durchbruchfeldstärke gegenüber Niederfrequenz. Es mußte noch festgestellt werden, ob die Geschwindigkeit der Spannungssteigerung vielleicht für dies veränderte Verhalten von Einfluß sei. Daß dies nicht der Fall war, zeigte ein entsprechender Versuch mit dem Schwingungsprüfer[1]). Außerdem wurden aber noch sämtliche Messungen mit verhältnismäßig schneller und langsamer Spannungssteigerung bezüglich der Lage der Meßpunkte verglichen. Es ergab sich, daß derartige Werte meistens innerhalb des Streugebietes lagen. Soweit sie außerhalb lagen, war keine Richtung bevorzugt, so daß man irgendwelche Schlüsse ziehen könnte. Hiernach ist also die gewöhnlich angewandte Spannungssteigerung als zulässig und ohne Einfluß auf die Ergebnisse anzusehen, zumal da man ein Anwachsen der Spannung um 30 Volt/sec noch nicht gut als stoßweise Beanspruchung ansehen kann

[1]) Auch bei der höchsten Geschwindigkeit der Spannungssteigerung behielt das Lichtband seinen gleichmäßigen Charakter und zeigte keine Unregelmäßigkeiten die etwa durch das Gleiten der Kontakte auf den Widerständen hätten entstehen können.



Zusammenfassung.

Nach Vorversuchen mit Röhren kleiner Leistung und Lichtbogengeneratoren wird mit Hilfe einer rückgekoppelten Röhre ein Schwingungskreis zur Erzeugung ungedämpfter Schwingungen erregt. Die Selbstinduktion des Schwingungskreises bildet die Primärspule eines Lufttransformators, von dem die sekundäre hochgespannte Hochfrequenz abgenommen wird.

Schwierigkeiten bereiten die Oberwellen und die Schwankungen des Anodenstromes, der durch Gleichrichtung von hochgespannter Mittelfrequenz erzeugt wird.

Es wird dafür gesorgt, daß keine Oberwellen auftreten und die Amplitude stets den gleichen Wert hat. Dies wird geprüft mit einem Überlagerer nnd einem Schwingungsprüfer (rotierende Heliumröhre).

Die Spannung wird sekundär abgelesen an einem elektrostatischen Voltmeter, das folgenden Anforderungen entspricht:

1. hochwertige Isolation,
2. sehr geringe Kapazität,
3. sich bei verschiedenem Ausschlag nur wenig ändernde Kapazität,
4. gleiche Kapazität beider Pole gegen Erde,
5. verminderte Kurzschlußgefahr.

Die Wellenlänge des Kreises kann zwischen 2500 und 3500 m verändert werden. Die sekundäre Spannung beträgt im Höchstfalle 14 $kVolt_{max}$.

Die Anordnung wird geprüft durch Untersuchungen in Luft. Die Funkenstrecke wird durch ultraviolettes Licht bestrahlt, um Verzögerungseffekte zu vermeiden.

Ergebnisse.

A. Überschläge in Luft.

1. Ebene Elektroden.

2. Kugeln.

Es ergibt sich für ebene wie auch Kugelelektroden die gleiche Durchbruchfeldstärke wie bei Gleichstrom.

3. Spitzen.

Zuerst wird die Frequenzabhängigkeit untersucht. Vergleichende Messungen mit 500 Perioden zeigen, daß die Funkenspannung bei Hochfrequenz niedriger liegt. Mit wachsender Schlagweite nimmt der Unterschied zu.

Ein zweiter Versuch vergleicht verschieden lange Spitzen. Je länger die Spitzen sind, um so geringer ist die Anfangsspannung. Mit wachsender Schlagweite nimmt der Unterschied zu.

B. Feste Körper.

Es werden feste Körper untersucht. Allgemein wird eine starke Erwärmung der Materialien festgestellt. Bild 15 zeigt die Mittelwerte ohne Berücksichtigung der Streuung in logarithmischer Darstellung.

Die Durchbruchfeldstärke wird mit der bei 50 Perioden verglichen.

4. Glas (Bild 15, 1).

Bei Glas sinkt sie auf 1/3 des Wertes für 50 Perioden.

5. Porzellan (Bild 15, 3)

Bei Porzellan ist sie auf 1/3 bis 1/2 gesunken, doch sind die Werte für 50 Perioden nicht ganz sicher. Wegen der porösen Beschaffenheit ist die Streuung sehr groß.

6. Hartgummi (Bild 15, 2).

Bei Hartgummi ist die Durchbruchfeldstärke gegenüber Niederfrequenz fast auf die Hälfte ihres Wertes gesunken.



7. Galalith (Bild 15, 4).

Bei Galalith liegen noch keine Vergleichsmessungen fertig vor. Es wird festgestellt, daß gereinigtes Galalith bei Hochfrequenz elektrisch weniger fest ist als ungereinigtes als Folge der Entziehung von Öl- und Fettstoffen. Die Streuung ist gering, bei ungereinigtem Material jedoch größer als bei gereinigtem.

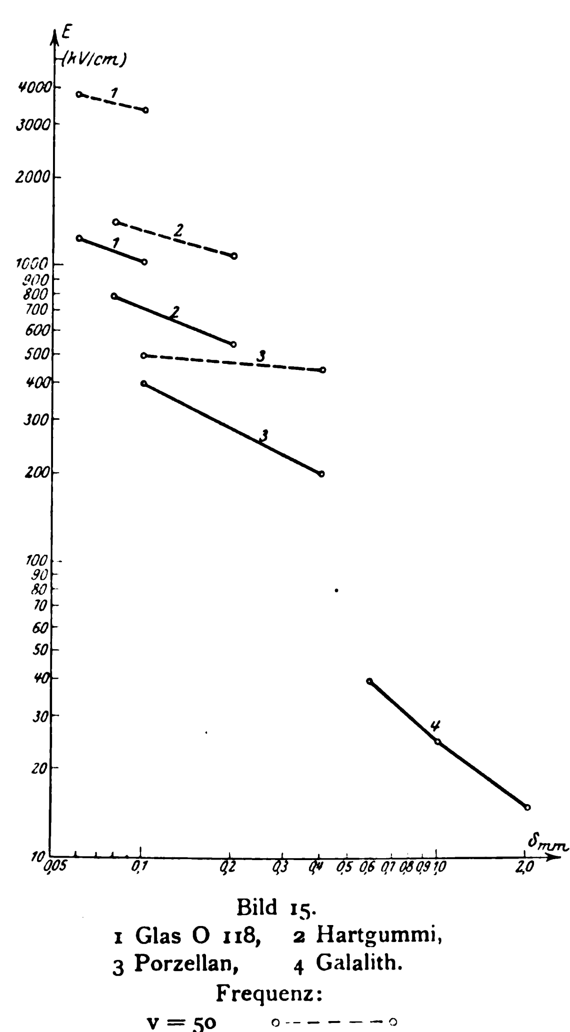


Bild 15.
1 Glas O 118, 2 Hartgummi,
3 Porzellan, 4 Galalith.
Frequenz:
$\nu = 50$ o- - - - - -o
$= 1{,}2 \cdot 10^5$ o————o

8. Weitere Materialien:

Vulkanfiber, Faturan.

Dieselben sind für Hochfrequenz hoher Spannung keine isolierenden Körper, sie leiten den Strom teilweise ohne wesentliche Erwärmung.

Es wird noch festgestellt, daß die Geschwindigkeit der Spannungssteigerung unterhalb jener liegt, bei der durch Stoßbeanspruchung andere Verhältnisse eintreten können.

Für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für das fördernde Interesse an derselben bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. W. O. Schumann zu dauerndem Dank verpflichtet.

Auch Herrn Institutsmechaniker K. Kösser gebührt mein Dank für seine nie ermüdende Hilfsbereitschaft beim Bau und Umbau der Apparatur.

Ich habe noch der angenehmen Pflicht nachzukommen, auch der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sowie der Helmholtzgesellschaft meinen Dank auszusprechen für ihre mannigfache Unterstützung mit Geld und Apparaten.

Die Firma Carl Zeiß (Jena) lieferte zum großen Teil das Rohmaterial zur Herstellung der Versuchsanordnung und besorgte großenteils das Schleifen der Linsen.

Die Firma Schott & Gen. (Jena) lieferte für die Untersuchungen das nötige Glas. Diese sowie auch die Osram G. m. b. H. (Berlin) seien gleichfalls an dieser Stelle meines Dankes versichert.

Anfangsspannung und Durchbruchfeldstärke von parallelen Zylinderelektroden.

Von

Hans Löber.

Mitteilung aus dem Technisch.-Phys. Institut der Universität Jena.

Die zur Untersuchung der Entladungsvorgänge ausgeführten, experimentellen Arbeiten haben bisher den Fall des zylindrischen Feldes, das gegeben ist durch zwei parallel sich gegenüberstehende Zylinder und einen einer geerdeten Ebene gegenüberstehenden Zylinder, nicht behandelt. Für diesen Fall, der für die theoretischen Ansätze der elektrostatischen Feldverteilung eine gewisse Bedeutung hat, versucht vorliegende Arbeit einige genaue experimentelle Unterlagen zu erbringen.

In Anlehnung an die Untersuchungen von Klemm[1]) wurde eine Versuchsanordnung benutzt, die in Bild 1 skizziert ist:

M war eine Starkstrominfluenzmaschine nach Wehrsen (Berlin) mit einer festen und zwei rotierenden Scheiben, die im Anfang mit einem Nebenschlußmotor angetrieben wurde, später aber, um eine einwandfreie Spannungssteigerung, besonders bei den kleinen Abständen zu ermöglichen, mit der Hand betätigt wurde. Von der Maschine führen 6 mm starke Messingdrähte zu der Funkenstrecke F und weiter zum Hochspannungsvoltmeter V.

Als Funkenstrecke wurde zunächst bei den Voruntersuchungen und Nachprüfungen der schon vorliegenden Messungen eine Präzisionsplattenfunkenstrecke und für die eigentlichen Messungen eine Spezialzylinderfunkenstrecke für symmetrische Spannungsverteilung zwischen zwei parallelen Zylindern (Bild 2) und eine solche für die Anordnung Zylinder-Ebene (Bild 3) benutzt.

Wie Bild 2 zeigt, ist die symmetrische Funkenstrecke auf einer paraffinierten Grundplatte aus Holz von der Größe 50 : 60 cm

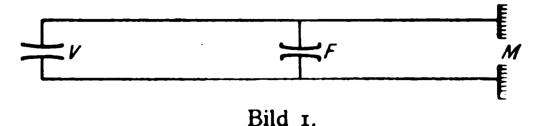


Bild 1.

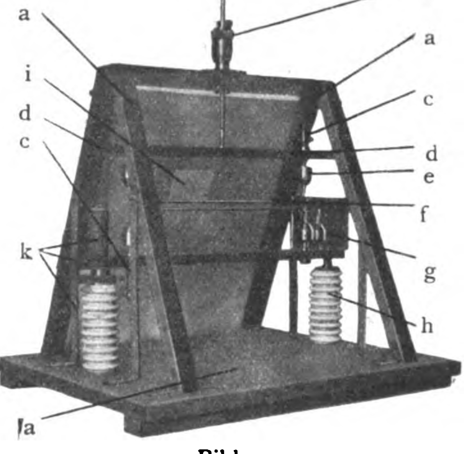


Bild 2.

aufgebaut. Ein 47 cm hohes Gestell aus 3 : 3 cm starken Faturanleisten, deren Stabilität noch durch seitliche Eisenstützen erhöht wurde, dient als Haltevorrichtung des beweglichen, oberen Zylinders f. Dieser wird ebenso wie der ihm gegenüberstehende feste Zylinder durch zwei Dreibackenfutter festgehalten. Die Futter waren so konstruiert, daß Zylinderstärken von 1—12 mm Durchmesser paßten, und in einem Abstand von 35 cm auf einer aus bestem Hartgummi bestehenden Leiste d aufgeschraubt. Durch einen stabilen (1 cm Durchmesser) runden Messingstab, der die Leiste d genau in der Mitte angreift, war die Verbindung zu der Präzisionsmikrometerschraube b hergestellt. Mit dieser Präzisionsmikrometerschraube, die eine Spezialkonstruktion der Firma Carl Zeiß war, wurde es ermöglicht, den Zylinderabstand auf 0,01 mm gut einzustellen.

[1]) Archiv für Elektrotechnik 1923, 6/12. Heft.

In der Funkenstrecke selber hat die auf zwei Porzellanisolatoren h feststehende Leiste noch eine Einstellvorrichtung k, durch die es möglich war, die Leiste und damit auch den Zylinder in dieselbe Ebene und auf Parallelität mit dem anderen beweglichen Zylinder einzustellen. Kontrolliert wurde die Einstellung vor jeder Messung mittels zweier Spiegel, die seitlich auf die feststehende Leiste aufgestellt werden konnten. In Bild 2 ist ein solcher bei g zu sehen. Zugeführt wurde die Spannung bei c. Bei der Anbringung dieser Klemmen wurde darauf geachtet, die Zuführungsdrähte weit von dem Zylinder entfernt zu halten, um möglichst jede Störung des Feldes durch die Zuleitungen zu vermeiden. Abgeschirmt gegen Staub wurde die Funkenstrecke durch eine Umhüllung aus Pappe, in der ein rechtwinkliger Ausschnitt nur die Zylindermitte der Bestrahlung durch eine Uviollampe aussetzte.

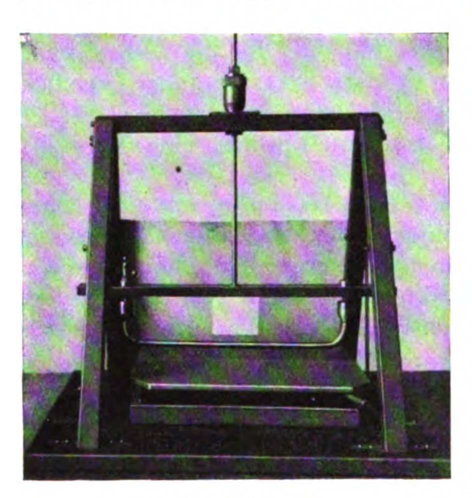


Bild 3.

Die Zylinder-Ebene-Funkenstrecke wurde dadurch erhalten, daß der feststehende Zylinder mit den Isolatoren aus der Zylinder—Zylinder-Funkenstrecke herausgenommen wurde und durch eine auf drei Stellschrauben ruhenden 1 cm starken, plan geschliffene Metallebene von 36 cm Länge und 30 cm Breite aus fein porösen Eisen ersetzt wurde. Bild 3 gibt die Anordnung wieder. Die Ebene selbst wurde nachkontrolliert durch eine Präzisionswasserwage und mittels der Stellschrauben vor jeder Meßreihe eingestellt. Ein Übelstand war zunächst, daß sich sehr leicht Staubteilchen auf der Ebene absetzten und bei Anlegung der Spannung ins Feld gezogen wurden. Dort wirkten diese Staubteilchen wie feine Spitzen, bei kleineren Abständen sogar wie Strombrücken. So wurden oft bei ein und derselben Schlagweite Werte gemessen, die 100% voneinander differierten, und immer konnte bei näherer Untersuchung ein solches Staubteilchen als Ursache entdeckt werden. Deshalb wurde das ganze äußere Funkenstreckengerüst mit einer faserfreien Papierhülle bedeckt; außerdem wurde aber vor jeder Messung noch mit einem feinen Lederläppchen die ganze Platte vorsichtig abgewischt. Als Hauptkriterium für Parallelität und konstante Verhältnisse wurde für den symmetrischen, wie auch unsymmetrischen Fall der regelmäßig in der Mitte ansetzende Funkenüberschlag erachtet; deshalb wurde bei allen ausgeführten Messungen neben der am Hochspannungsvoltmeter abgelesenen Spannung gleichzeitig Ort und Art des Funkenüberganges beobachtet.

Hochspannungsvoltmeter.

Bei den ersten Messungen wurde das von A. Klemm[1]) konstruierte Hochspannungsvoltmeter benutzt. Um aber den dem Instrument noch anhangenden Übelstand der Hysteresis zu beseitigen, wurde bald eine Neukonstruktion vorgenommen. Die äußere Gestalt des Instrumentes wurde dabei nur wenig verändert. Das Instrument besteht aus zwei horizontal gegenüberstehenden Metallschalen, von denen die untere in einer Messinghülse verschoben werden kann, um auf diese Art eine Änderung des Bereiches zu ermöglichen. Die obere Schale ist, wie Bild 4 zeigt, durch zwei Messingsäulen an einer Hartgummileiste festgeschraubt. Die Schale selbst hat eine kreisförmige Öffnung von 5 cm Durchmesser, in der das unter dem Einfluß des elektrischen Feldes bewegte Tellerchen hängt. Der diese Bewegung aufnehmende

[1]) l. c. Seite 556.

Mechanismus ist nicht direkt auf der Zinkschale befestigt, sondern zur besseren Lagerung auf einer der Zinkschale ungefähr gleich großen Eisenplatte, die auf vier an die Zinkschale angelöteten Messingsäulen aufgeschraubt wurde.

Zunächst war versucht worden, die an dem Tellerchen angreifende Kraft direkt durch einen verbindenden Draht auf eine Blattfeder zu übertragen und die Durchbiegung als Maß für die angelegte Spannung zu benutzen. Dabei wurde von vornherein auch die von Klemm benutzte Spiegelablesung angewandt. Alle diese mit Blattfedern ausgeführten Versuche scheiterten daran, daß bei der Eichung mit dem Transformator Schwingungserscheinungen ähnlich wie bei dem von Klemm gebauten, zweiten Hochspannungsvoltmeter auftraten und eine genaue Ablesung unmöglich machten. Angewandte Öl- und Luftdämpfung beseitigten zwar diese erzwungenen Schwingungserscheinungen, setzten dabei aber die Empfindlichkeit des Instrumentes

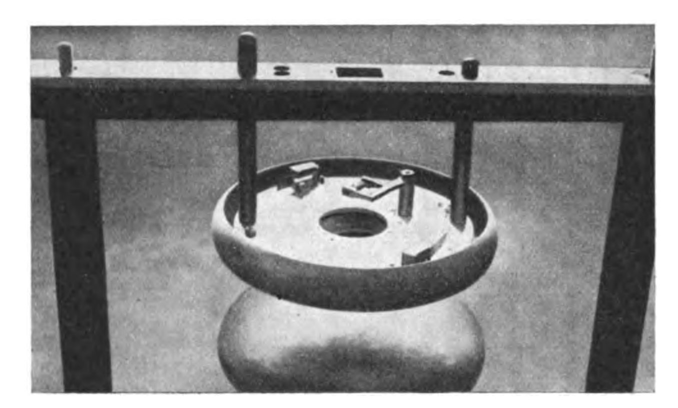


Bild 4.

soweit herab, daß diese Versuche aufgegeben werden mußten. Erst dadurch, daß ich zwei Federn von 9,3 mm Dicke, 22 mm Länge und 8,5 mm Breite in zwei sich gegenüberstehenden Messingklötzen festklemmte und die so gegenüberstehenden Federn spannend mit einem 0,07 mm starken Platindraht verband, war eine auch für Wechselstrommessungen brauchbare Gegenkraft gegeben. Es wurde jetzt noch der Spanndraht mit der in einer Messinggabel ruhenden Achse (A, Bild 5) durch ein 0,015 mm starkes Platindrähtchen verbunden, um so das an einem gleichstarken Drähtchen auf der gegenüberliegenden Seite der Achse befestigtes Tellerchen T das Gleichgewicht zu halten.

Bild 5 gibt die Anordnung wieder. Mittelst Klebwachs war auf der Achse ein Spiegelchen S befestigt, das einen von einer optischen Bank kommenden Lichtstrahl, der durch einen am äußeren Gestell des Hochspannungsvoltmeters angebrachten Spiegel senkrecht nach unten auf den Achsenspiegel geworfen wurde, seitlich auf eine vertikal aufgestellte Skala reflektierte. Sehr wichtig war die Lagerung der 12 mm langen und 3 mm dicken Metallachse. Zunächst wurden ausgekörnte Stahllager benutzt, die aber bald durch Rubinsteinlager ersetzt wurden. Die Steine waren in kleine Messingschrauben gefaßt, so daß die Achse sich gut ohne Beschädigung der geschliffenen Spitzen in die Lager einspannen ließ. Die Wirkungsweise ist nun so, daß unter dem Einfluß des elektostatischen Feldes das Tellerchen nach unten gezogen wird und dadurch die Drehung des Achsenspiegels eine Verschiebung des Lichtstrahls auf der Skala bewirkt.

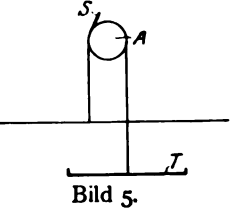


Bild 5.

Als sonstige Hilfsmittel wurden zur Beseitigung des Verzögerungseffektes eine Quecksilber-Uviollampe verwendet. Die Lampe war in ungefähr 1 m Entfernung

von der Funkenstrecke aufgestellt. Messungen wurden erst dann ausgeführt, wenn die durch das Brennen der Lampe bewirkte Erhöhung der Temperatur einen maximalen, konstanten Wert erreicht hatte.

Die Temperaturmessung geschah durch ein geeichtes, chemisches Thermometer mit einer auf $^1/_{10}{}^0$ ablesbaren Celsiusskala und einem mit erstem verglichenen, gewöhnlichen Zimmerthermometer. Dabei wurde ein Thermometer immer in den Strahlengang der Uviollampe hinter die Funkenstrecke gestellt, und das andere seitlich davon. Für die für das Zylinderfeld gültige Temperatur wurde der Mittelwert, der sich aus den beiden Temperaturen t_1 und t_2 ergab, angenommen. Dabei betrug die maximale Abweichung der beiden Temperaturen höchstens $^1/_{10}{}^0$ C. Da die Einstellung des Berührungspunktes durch optische Beobachtungen nicht genau reproduzierbare Einstellungen ergab, wurde der Berührungspunkt durch Galvanometerausschlag festgestellt.

Vorversuche.

Vor der Einstellung des Hochspannungsvoltmeters wurde eine Prüfung des Übersetzungsverhältnisses des Transformators, der zum Eichen diente, vorgenommen. Außerdem wurde der Spannungsabfall im Transformator durch den Leerlaufstrom bei der Berechnung der Sekundärspannung aus der primär gemessenen berücksichtigt.

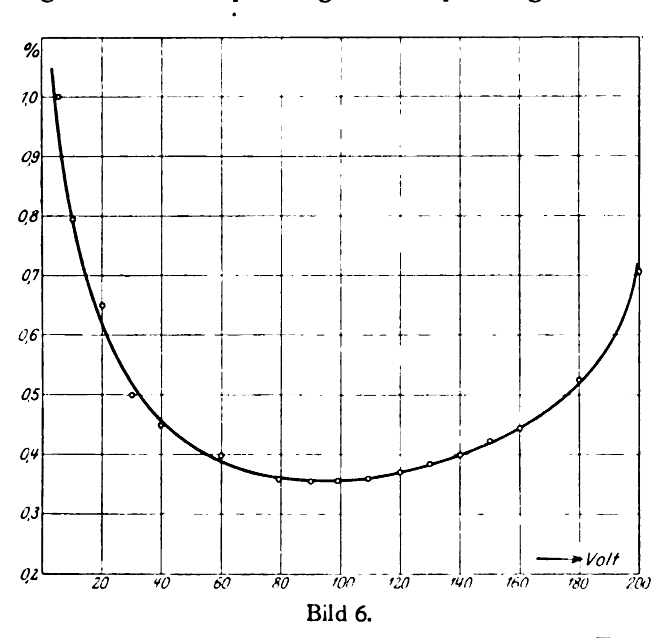


Bild 6.

Dieser Spannungsabfall E_L bei Leerlauf ist angenähert gleich $\frac{E_k}{2}$, wenn E_k die bei kurzgeschlossener Sekundärseite nötige Primärspannung ist, wobei der primäre Kurzschlußstrom I_k gleich dem Leerlaufstrom I_L sein muß.

Bei Kurzschluß und Leerlauf ausgeführte Leistungsmessungen zeigten, daß φ_L bei Leerlauf und φ_K bei Kurzschluß nur so wenig von 90^0 differierten, daß $\frac{E_K}{2}$ algebraisch von der aus dem Übersetzungsverhältnis berechneten Spannung E_L subtrahiert werden konnte.

Die Werte von E_K E_L I_k I_L wurden aus den aufgenommenen Kurzschluß- und Leerlaufcharakteristiken entnommen. Den abzuziehenden Spannungsabfall gibt Bild 6 wieder, der eine Beziehung zwischen der Primärspannung und dem abzuziehenden, prozentualen Spannungsabfall bei Leerlauf des Transformators darstellt.

Eichung des Hochspannungsvoltmeters.

Die Eichung wurde so ausgeführt, daß die Sekundärseite des Transformators direkt mit den Platten des Hochspannungsvoltmeters verbunden wurde. Durch Regulierung des Feldes der speisenden Maschine mittels Spannungsteiler wurde an der Primärseite des Transformators eine bestimmte Spannung eingestellt und durch Präzisionsvoltmeter (Weston-Dynamometer) abgelesen. Das Hochspannungsvoltmeter zeigte jetzt einen bestimmten Ausschlag. Der Ausschlag erfolgte momentan nach Anlegen der Spannung, ein Kriechen oder Nachbleiben wurde nicht beobachtet; gute Konstanz zeigte ebenfalls die Einstellung des Nullpunktes. Der Bereich des Instrumentes war gegeben einmal durch die Stärke der Blattfedern, denn je stärker die Blattfedern, je größer also die Gegenkraft, um so größer auch der benutzte Bereich, und zweitens durch die Entfernung der beiden Elektrodenschalen.

Die für die verschiedenen Meßbereiche aufgenommenen Werte gibt Tabelle 1 wieder:

Tabelle I.
Eichwerte des Hochspannungsvoltmeter.

Skalenteile	1. 0,5—5 kV	2. 2,7—13 kV	3. 4,4—19,5 kV	4. 7,3—34,4 kV	5. 9,5—45 kV
	Plattenabstand 1,5 cm	Plattenabstand 4 cm	Plattenabstand 6 cm	Plattenabstand 10,5 cm	Plattenabstand 13,5 cm
1	0,511	—	—	—	—
5	0,730	2,785	4,435	7,33	9,55
10	1,466	2,752	5,799	9,725	12,45
20	1,996	4,982	7,400	12,75	16,47
30	2,353	5,865	8,699	15,10	19,10
40	2,635	6,580	9,750	17,050	21,96
50	2,82	7,225	10,620	18,40	24,009
60	3,105	7,80	11,42	20,01	25,91
70	3,290	8,33	12,11	21,30	27,72
80	3,480	8,799	12,795	22,5	29,25
90	3,630	9,240	13,490	23,62	30,65
100	3,782	9,57	14,152	24,72	32,05
110	3,960	9,995	14,62	25,64	33,25
120	4,09	10,32	15,10	26,20	34,40
130	4,235	10,7	15,64	27,55	35,65
140	4,355	11,04	16,12	28,7	36,62
150	4,48	11,35	16,65	29,85	37,81
170	4,74	11,92	17,60	30,08	40,01
190	4,95	12,48	18,09	32,40	42,20
200	5,049	12,75	18,90	33,12	43,1
220	—	13,08	19,50	34,4	45,0

Wie Tabelle 1 zeigt, ist der Meßbereich des Instrumentes außerordentlich groß. Die einzelnen Bereiche greifen weit ineinander, so daß die gute Übereinstimmung der bei ein und demselben Abstand bei verschiedenen Bereichen ausgeführten Nachmessungen als gutes Kriterium für die Zuverlässigkeit der Meßanordnungen angesehen werden kann. Doch war leider die Hysteresiserscheinung noch nicht vollständig beseitigt. Die Differenz der Eichung bei steigender Primärspannung und der bei abnehmender war annähernd 50% kleiner als bei dem Klemmschen Hochspannungsvoltmeter Nr. 1[1]).

[1]) l. c. S. 562.

Um aber keinen Fehler zu begehen, wurde streng darauf geachtet, daß nur bei steigender Spannung geeicht wurde. Die Hysteresiserscheinung war bei Stahlfedern am größten; die besten Resultate gaben Phosphorbronzeblattfedern, die von der Firma Hartmann und Braun, Frankfurt am Main geliefert waren. Versuche, die mit hysteresisfreien Quarzsäulen angestellt wurden, führten nicht zum Ziel, da die erreichte Stärke nicht genügte, um die erforderliche Elastizität zu liefern.

Bestimmung der Durchbruchsfeldstärken zwischen zwei ebenen Elektroden.

Um sich von der Brauchbarkeit des Hochspannungsvoltmeters vollständig zu überzeugen, wurden nochmals die Klemmschen Werte der Durchbruchfeldstärken von zwei ebenen Platten nachgemessen. Dabei fand ich, daß die von mir gemessenen Werte, reduziert auf 20° C und 760 mm Luftdruck durchweg etwas niedriger lagen als die von Klemm gefundenen; und zwar war die Differenz bei kleinen Schlagweiten am größten. Tabelle II gibt die Werte der nachgemessenen Elektroden wieder.

Tabelle II.
Durchbruchfeldstärke der Luft in kV/cm im Vergleich zu den von A. Klemm erhaltenen Resultaten.
(Werte auf 20° C und 760 mm umgerechnet.)

δ/cm	Plattendurchmesser						Mittlere Abweichung in %
	90 mm Klemm	90 mm Löber	60 mm Klemm	60 mm Löber	40 mm Klemm	40 mm Löber	
	𝔈 kV/cm						
0,1	46,3	45,8	46,9	46,5	—	46,6	— 0,9
0,2	39,2	39,0	39,2	38,95	39,25	39,09	— 0,55
0,3	36,6	36,5	36,77	36,7	36,80	36,75	— 0,23
0,4	34,9	34,6	35,00	35,05	35,05	34,83	— 0,47
0,5	33,9	33,8	33,96	33,8	33,87	33,75	— 0,33
0,6	33,0	32,88	32,92	33,76	32,85	32,86	— 0,26
0,7	32,45	32,35	32,2	32,08	32,15	32,03	— 0,4
0,8	32,00	31,9	31,70	31,65	31,60	31,52	— 0,22
0,9	31,70	31,61	31,25	31,25	31,2	31,15	— 0,15
1,0	31,40	31,30	31,00	30,90	30,9	30,90	— 0,2

Bei den nachgemessenen Kugeln wurden Abweichungen in derselben Richtung und ähnlicher Größenordnung nachgewiesen. Als Ursache dieses Unterschiedes wurde der von Klemm unberücksichtigte Spannungsabfall des Transformators angesehen. Bei den Messungen mußte darauf geachtet werden, daß der Überschlag genau in der Mitte erfolgte und daß besonders kurz vor dem Überschlag eine gleichmäßige, langsame Spannungssteigerung stattfand. Temperatur und Luftdruck wurden ebenso wie bei den folgenden Messungen in der von Weickert[1]) angegebenen Weise berücksichtigt. Da aber Beobachtungen gemacht wurden, daß bei Temperaturen unter 20 Grad die Korrektion zu niedrige Werte ergab, wurde während sämtlicher Messungen in einem Temperaturbereich von 20—23° C gearbeitet. Nähere Untersuchungen über den Einfluß der Temperatur wurden nicht angestellt.

Untersuchungen über die zu wählende Zylinderlänge und über die Zylinderfunkenstrecke.

Aus einer Reihe von Voruntersuchungen, bei denen bei gleicher Zylinderstärke und gleichem Abstand (Größenordnung 1—2 cm) Zylinderlängen von 16—40 cm

[1]) Diss. Dresden 1910.

untersucht wurden, ergab sich, daß mit Zunahme der Zylinderlänge eine Abnahme der Überschlagspannung erfolgte. Dieses Resultat kann so gedeutet werden, daß durch den Einfluß der Enden bei den kürzeren Zylindern das Feld mehr nach außen gedrängt wird, und die Feldstärke in der Mitte geringer wird. Bei einer Zylinderlänge von 30 cm war für die zur Untersuchung kommenden Zylinder für Schlagweiten bis 2 cm ein Einfluß der Länge nicht mehr festzustellen. Die entgültigen Messungen wurden mit einer Zylinderlänge von 34 cm ausgeführt. Um den Funken möglichst in der Mitte zum Überschlag zu zwingen, waren die Zylinder in der Mitte nach einer konstanten Form etwas durchgebogen. Die stärkste Zylinderwölbung betrug im Durchschnitt 0,3 mm, was ungefähr einem Krümmungsradius von 100 m entspräche. Daß der Funke genau in der Zylindermitte übersprang, war wichtig, da sonst die Meßpunkte sofort unregelmäßig um einen Prozentsatz von einander differierten, der außerhalb der Meßgenauigkeit lag. Das Einsetzen des Funkens in der Zylindermitte war auch eine Bürgschaft dafür, daß die Parallelität der Zylinder eine einwandfreie war. In der Stärke von 3—7 mm waren die Zylinder aus Borsilberstahl und die Toleranz der Abweichung vom Durchmesser betrug maximal 0,01 mm. Von 8—12 mm Durchmesser bestanden die Zylinder aus Messing und jetzt waren die zum Festklemmen umgebogenen Enden angesetzt, da ein Biegen dieser starken Zylinder ohne Deformation nicht mehr möglich war. Dabei wurde darauf geachtet, daß die Übergangsstellen tadellos poliert wurden, um Feldstörungen von diesen Stellen aus zu vermeiden. Die Untersuchungen geringerer Zylinderstärken mußte aufgegeben werden, da bei diesen Dicken schon eine Durchbiegung unter den Einfluß des Feldes beobachtet wurde. Frühere Arbeiten hatten den Einfluß der in der Nähe des Feldes befindlichen Körper hervorgehoben, deshalb wurde nach dieser Richtung die Zylinderfunkenstrecke einer eingehenden Prüfung unterzogen. Das ganze äußere Gestell, ebenso wie die Zylinder haltenden Querleisten wurden eng mit Staniol umwickelt, leitend verbunden und dann geerdet. Vorher bei möglichst großem Abstand ausgeführte Messungen wurden dann nachkontrolliert. Dabei konnte ein Unterschied, also auch ein Einfluß bei den ausgeführten Meßreihen nicht festgestellt werden.

Messungen mit der Zylinder—Zylinder und der Zylinder—Ebene—Funkenstrecke.

Nachdem durch die in Tabelle II zusammengestellten Resultate und durch die oben beschriebenen Voruntersuchungen die Brauchbarkeit der Versuchsanordnungen gewährleistet war, konnte an die Hauptaufgabe die Untersuchungen des disaxialen Zylinderfeldes herangetreten werden. Die größte Feldstärke für die Anordnung zweier paralleler Zylinder ist nach Russel[1]) gegeben durch $\mathfrak{E} = \frac{U_0}{\delta} f$, wo

U_0 die Spannung zwischen den Zylindern
δ die Schlagweite und
f ein Faktor von folgender Form ist,

$$f = \frac{\sqrt{\xi\,(2+\xi)}}{\ln\left(\xi+1+\sqrt{\xi\,(\xi+2)}\right)}$$

worin

$$\xi = \frac{\delta}{2R}$$

δ ist die Schlagweite Zylinder—Zylinder und R der Zylinderradius. Für die Anordnung Zylinder—Ebene gilt derselbe Ansatz mit dem Unterschied, daß jetzt im Faktor f, $\xi = \frac{\delta}{R}$ wird, wo jetzt δ die Schlagweite Zylinder—Ebene bedeutet.

[1]) Phil. Mag. 6. 237, 1906.

Die unter Berücksichtigung der erwähnten Nebenumstände ausgeführten Messungen sind in Tabelle III zusammengestellt.

Die Anfangsspannungen in dieser Tabelle sind kV angegeben:

Tabelle III.

Anfangsspannung für zwei gleiche parallele Zylinder bei symmetrischer Spannungsverteilung. Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg.

δ/mm	Zylinderdurchmesser in mm										
	3	3,5	4	4,5	5	6	7	7,82	9	10	12
0,1	0,893	0,882	0,878	0,871	0,864	0,851	0,841	0,839	0,82	0,809	0,799*
0,25	1'625	1,62	1,615	1,598	1,608	1,588	1,581	1,565	1,554	1,551	1,545*
0,5	2,752	2,736	2,734	2,718	2,720	2,695	2,689	2,685	2,673	2,671	2,661*
0,75	3,720	3'718	3,695	3,69	3,690	2,681	3,680	3,676	3,640	3,631	3,61*
1	4,551	4,55	4,55	4,545	4,545	4,50	4,51	4,505	4,52	4,525	4,53
2	7,949	7,941	7,95	8,01	8,01	8,09	8,08	8,091	8,06	8,01	8,01
3	10,89	10,945	10,945	11,09	11,17	11,24	11,27	11,28	11,28	11,27	11,26
4	13,805	13,92	13,92	13,95	13,99	14,13	11,18	14,23	14,35	14,35	14,3
5	16,51	16,69	16,69	16,71	16,73	16,85	16,89	16,97	17,18	17,28	17,32
6	18,59	19,17	19,17	19,26	19,36	19,43	19,58	19,61	19,79	19,87	20,00
7	21,22	21,60	21,60	21,72	21,8	21,95	21,97	22,23	22,35	22,40	22,65
8	23,39	23,85	23,85	23,8	24,1	24,4	24,69	24,70	24,85	24,94	25,17
9	25,41	25,78	25,92	25,95	26,28	26,65	26,91	27,12	27,21	27,40	27,73
10	27,32	27,65	27,95	28,05	28,31	28,99	29,37	29 45	29,65	29,92	30,14
11	28,52	29,32	29,72	29,92	30,3	31,09	31,45	31,68	32,10	32,33	32,80
12	30,37	30,75	31,25	31,38	31,98	33,12	33,89	34,15	34,42	34,78	35,12
13	31,58	32,61	32,6	32,9	33,65	35,18	35,62	36,40	36,49	37,28	37,64
14	32,8 *	33,5	34,1	34,4	35,2	36,90	37,36	38,30	38,88	39,60	40,00
15	33,8 *	34,65	35,45	36,3 *	37,2 *	38,59	39,28	40,19	41,0	41,55	42,53
16			36,84			40,05				42,82	
17			37,00								

* extrapolierte Werte.

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, nehmen die Werte der Anfangsspannung von 0,1—1 mm Schlagweite mit zunehmendem Zylinderradius ab und bleiben dann in einem Bereich von 1—3 mm ungefähr konstant. Bei 3 mm ist jedoch schon zu sehen, daß die Anfangsspannung mit zunehmendem Zylinderradius wächst. Bei höheren Abständen verschiebt sich die maximale Anfangsspannung immer mehr nach der Seite größerer Zylinder.

Nach der oben angegebenen Weise wurden dann die Durchbruchfeldstärken aus diesen Werten berechnet. Die so erhaltenen Werte sind in Tabelle IV zusammengestellt.

Diese Werte in Abhängigkeit vom Verhältnis: Schlagweite zu Zylinderradius aufgetragen ergibt Bild 7. Man sieht daraus, wie die Kurven mit wachsender Schlagweite zunächst abnehmen, dann einen tiefsten Wert durchlaufen und mit zunehmender Schlagweite wieder ansteigen, um schließlich in einen Maximalwert überzugehen. Dabei erreichen die für die größten Zylinder aufgenommenen Kurven nicht diesen Wert, da es über 16 mm Schlagweite nicht möglich war, den Funken zu zwingen, in der Mitte der Zylinder überzuspringen. Als Ursache wurde die durch die umgebogenen Enden der Zylinder bei größeren Abständen auftretende Feldverzerrung angesehen. Das durchlaufende Minimum wird um so flacher, je größer der Zylinderradius wird. Der Anstieg nach dem Minimum dagegen nimmt mit Zunahme des

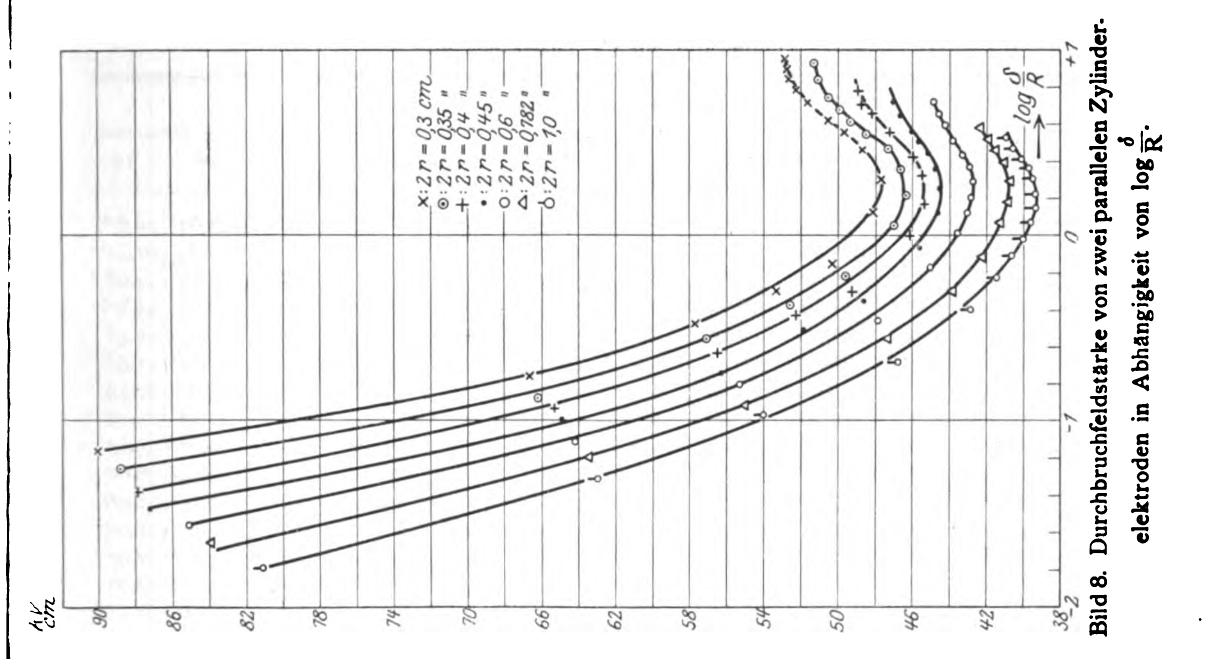


Bild 8. Durchbruchfeldstärke von zwei parallelen Zylinderelektroden in Abhängigkeit von $\log \frac{\delta}{R}$.

Bild 7. Durchbruchfeldstärke von zwei parallelen Zylinderelektroden in Abhängigkeit von $\frac{\delta}{R}$.

Tabelle IV.
Durchbruchfeldstärke in kV/cm einer Funkenstrecke aus zwei parallelen Zylindern.
Temperatur 20° C. Druck 760 mm.

δ/mm	Zylinderdurchmesser in mm										
	3	3,5	4	4,5	5	6	7	7,82	9	10	12
0,1	90,0	89,0	88,0	87,6	86,6	85,29	84,7	84,05	83,11	81,03	79,8 *
0,25	66,7	66,5	66,12	65,76	65,71	64,52	64,27	63,41	62,93	62,89	62,40 *
0,5	57,91	57,1	56,91	56,22	56,62	55,33	55,13	55,06	54,57	5[illegible],03	54,00 *
0,75	55,56	52,77	52,25	52,1	51,84	51,09	50,89	50,45	49,87	49,6	49,1 *
1	50,26	49,43	49,2	48,53	48,40	47,25	47,06	47,01	46,70	46,6	46,42
2	48,08	46,93	46,14	45,63	45,25	44,80	44,25	43,85	43,16	4[illegible],14	41,97
3	48,00	46,17	45,22	44,45	44,29	43,59	42,6	42,14	41,5	41,08	40,45
4	48,5	46,99	45,69	44,91	43,96	42,76	41,82	41,22	40,75	40,47	39,82
5	49,5	47,5	46,19	45,32	44,01	42,2	41,35	40,88	40,5 *	40,00	39,24
6	50,44	48,61	46,65	45,73	44,2	42,58	41,25	40,69	39,95	39,44	38,69
7	51,5	49,56	47,22	45,93	44,53	42,72	41,3	40,75	39,70	39,10	38,36
8	52,3	50,01	47,83	46,43	44,94	43,14	41,5	40,7	39,73	39,16	38,06
9	53,01	50,46	48,22	46,72	45,24	43,35	41,75	40,84	39,78	39,17	38,07
10	53,51	50,87	48,53	46,94	45,52	43,70	42,10	41,16	39,91	39,36	38,07
11	53,92	50,92	48,83	46,84	45,74	44,19	42,35	41,31	40,21	39,56	38,3
12	54,11	51,07	48,93	46,84	45,69	44,45	42,5	41,60	40,51	39,81	38,5
13	54,12	51,07	48,73	46,9	45,75	44,65	42,90	41,87	40,8	40,00	38,76
14	54,1	51,22	48,93	46,84	45,7	44,75	42,99	42,10	40,90	40,13	38,99
15		51,12	49,03			44,77	43,65	42,25	40,10	40,25	39,26
16		51,1	48,93			44,72				40,38	

* extrapolierte Werte.

Zylinderradius ab; ebenso das Verhältnis $\frac{\delta}{R}$, bei dem das Minimum seinen tiefsten Wert erreicht. Der absolute Wert von $\frac{\delta}{R}$, bei dem das Minimum eintritt, liegt für Radien von 0,3—1,2 cm in einem Bereich von 1,8—1,5. Um den Verlauf der Durchbruchfeldstärke auch für die kleinsten Schlagweiten zu demonstrieren, ist die Durchbruchfeldstärke in Abhängigkeit von $\lg \frac{\delta}{R}$ in Bild 8 wiedergegeben. Leider konnten die gefundenen Werte nicht mit experimentellen Resultaten anderer Autoren verglichen werden. Bis jetzt hat nur C. P. Steinmetz[1]) den Einfluß des Abstandes und der Dicke zweier sich nicht umhüllender Zylinder durch einige Messungen untersucht. Die Streuung dieser Messungen ist jedoch eine so erhebliche, daß ein exakter Vergleich unmöglich ist. Eine Ähnlichkeit der Kurven kann man feststellen mit dem Unterschied, daß Steinmetz keinen ausgesprochenen Maximalwert findet.

Nach Abschluß der oben beschriebenen Messungen Zylinder—Zylinder wurden die Anfangsspannungen zwischen Zylinder und einer geerdeten Platte untersucht. Hierbei benutzte Zylinder hatten genau denselben Radius wie bei den ersten Untersuchungen. Die Streuung der gemessenen Werte ist jetzt größer, wahrscheinlich sind als Ursache feine Staubteilchen, die bei aller Sorgfalt nicht entfernt werden konnten anzusehen. Außerdem bedeutet δ auch jetzt die Schlagweite genauer.

Tabelle V gibt die Zusammenstellung der gemessenen Anfangsspannungen in kV wieder:

[1]) Trans. of the Am. Inst. of. Electr. Engin. 15, 1899, S. 281.

Tabelle V.

Anfangsspannungen einer Funkenstrecke aus einem Zylinder und einer geerdeten Ebene.
Temperatur 20° C. Druck 760 mm Hg.

δ/mm	Zylinderdurchmesser in mm										
	3	3,5	4	4,5	5	6	7	7,82	9	10	12
0,1	0,875	0,858	0,85	0,831	0,816	0,807	0,80	0,792	0,789	0,772	0,725
0,25	1,636	1,63	1,611	1,598	1,595	1,585	1,569	1,551	1,55	1,54	1,53
0,5	2,719	2,698	2,670	2,668	2,661	2,64	2,626	2,61	2,601	2,592	2,58
0,75	3,688	3,665	3,649	3,64	3,632	3,618	3,614	3,61	3,605	3,582	3,58
1	4,53	4,50	4,49	4,49	4,50	4,49	4,482	4,88	4,475	4,452	4,45
1,5	6,175	6,17 *	6,18	6,18 *	6,190	6,128	6,128	6,190	6,145	6,140	6,12
2	7,88	7,84	7,80	7,81	7,80	7,82	7,825	7,82	7,890	7,940	7,89
3	10,35	10,45	10,63	10,64	10,73	10,81	10,90	10,93	10,99	10,99	11,12
4	12,71	12,94	13,08	13,26	13,36	13,51	13,62	13,69	13,77	13,80	14,11
5	14,60	15,10	15,31	15,58	15,76	16,05	16 17	16,24	16,45	16,57	16,85
6	16,40	16,91	17,32	17,74	18,12	18,41	18,56	18,86	19,12	19,24	19,42
7	17,88	18,65	19,16	17,71	26,15	20,69	21,13	21,35	21,55	21,80	22,21
8	19,3	20,09	20,89	21 47	22,09	22,76	23 21	23,70	23,95	24,31	24,60
9	20,32	21,29	22,59	23,08	23,71	24,64	25,28	25,91	26,35	26,61	27,23
10	21,31 *	22,59	23,56	24,31	24,96	26,36	26 95	27,80	28,39	28,65	29,52
11	22,4 *	23,42	24,69	25,63	26,25	27,80	28,42	29,52	30,2 *	30,96	31,96
12		24,39	25,65	26,80	27,32		29,79	31,05		32,91	31,96
13		25,45	26,69	27,92	28,2					34,69	33,95
14					30,4						35,72

* extrapolierte Werte.

Tabelle VI.

Durchbruchfeldstärke in kV/cm einer Funkenstrecke aus einem Zylinder und einer geerdeten Ebene.
Temperatur 20° C. Druck 760 mm.

δ/mm	Zylinderdurchmesser in mm										
	3	3,5	4	4,5	5	6	7	7,82	9	10	12
0,1	89,9	87,5	86,2	84,5	82,2	81,9	81,22	80,2	79,5	78,8	76,9
0,25	68,91	68,0	67,08	66,05	65,7	65,2	64,2	63,83	63,45	62,95	62,8
0,5	60,1	59,0	57,68	57,0	56,5	55,6	55,13	54,64	54,06	53,74	53,09
0,75	57,03	55,5	54,4	53,8	53,47	52,1	51,7	51,34	50,71	50,2	49,60
1	54 85	53,2	52,1	51,02	50,8	49,6	49,03	48,44	47,92	47 44	46 85
1,5	54,2	53,09	51,29	50,5 *	49,2	48,1 *	46,90	46,48	45,3	45 *	44,02
2	55,25	53,43	51,8	50,02	48,82	47,33	46,3	45,54	45,04	44,9	43,55
3	56,3	51,4	52,51	51,75	49,2	47,5	46,17	45,38	44,58	43,6	43,04
4	56,8	55,45	53,27	51,07	49,85	47,78	46,1	45,25	44,19	43,3	42,62
5	57,4	56,16	54,3	51,90	50,78	48,9	46,5	45,55	44,41	43,5	42,52
6	58,5	57,0	55,08	52,76	51,72	49,39	47,39	46,36	45,06	43,98	42,53
7	58,8	57,27	55,78	53,56	52,48	50,1	48,59	47,11	45,40	44,53	43,2
8	58,8	57,27	56,18	54,1	53,29	50,71	48,82	48,02	46,03	45,27	43,61
9	58,86	57,27	56,3	54,8	53,6	51,41	49,22	48,56	46,90	45,86	44,05
10		56,9	56,3	54,8	53,41	51,6	49,52	48,87	47,32	45,9	44,54
11		57,5	55,9	54,7	53,14	51,6	49,5	48,9	47,4 *	46,6	45,04
12		57,35	56,13	54,8	53,2		49,5	48,9		46,8	45,44
13					53,0					47,0	45,5
14					53,2						

* interpolierte Werte.

Ähnlich wie bei dem symmetrischen Falle nimmt die Anfangsspannung bei konstanter Schlagweite mit zunehmendem Zylinderradius bis zu einer Schlagweite von 1 mm ab, bleibt dann in dem Bereich von 1,5—3 mm konstant und wächst mit zunehmendem Zylinderradius wieder an. Die zugehörigen, berechneten Durchbruchfeldstärken sind in Tabelle VI zusammengestellt.

Die Werte dieser Durchbruchfeldstärken in Funktion von $\frac{2\delta}{R}$ graphisch dargestellt, ergeben ein ähnliches Bild wie der symmetrische Fall Zylinder—Zylinder (Bild 9). Die Durchbruchfeldstärke nimmt allmählich mit wachsender Schlagweite ab, durchläuft ein Minimum, wird wieder größer und erreicht einen Grenzwert. Dabei gewinnen die Kurven für die drei stärksten Zylinderradien ihren Grenzwert nicht vollständig, wieder aus demselben Grund, wie bei dem symmetrischen Falle. Um die Werte für die kleinen Abstände zu zeigen, sind in Bild 10 die Durchbruchfeldstärken wieder in Funktion von $\log \frac{2\delta}{R}$ dargestellt.

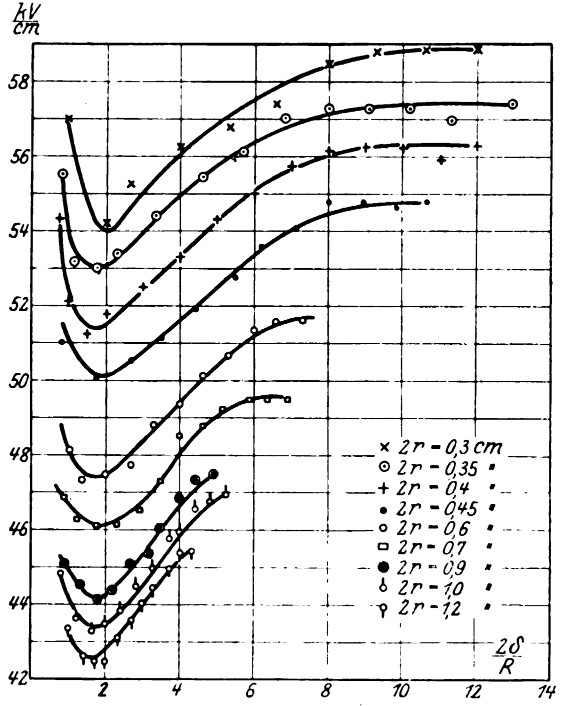


Bild 9. Durchbruchfeldstärken von Zylinder gegen Ebene in Abhängigkeit von $\frac{2\delta}{R}$.

Kurve A: Werte für Zylinder—Ebene,
Kurve B: Werte für Zylinder—Zylinder.

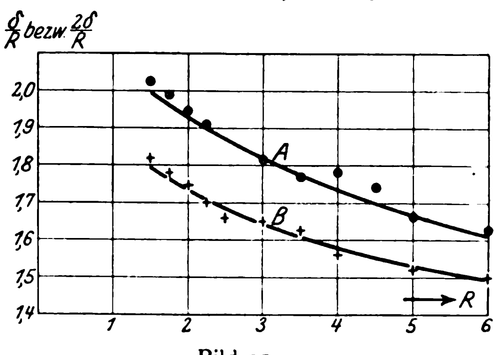


Bild 11.

Wie aus Bild 9 hervorgeht, wird das Verhältnis $\frac{2\delta}{R}$ bei dem das Minimum seinen tiefsten Punkt durchläuft, ebenso wie der absolute Betrag der Minimumfeldstärke (ausgedrückt in kV) mit zunehmendem Zylinderradius kleiner. Ersteres zeigt noch besonders Bild 11, dabei aber auch gleichzeitig wie der Wert $\frac{2\delta}{R}$ (Kurve A), bei dem das Minimum auftritt, im Fall Zylinder—Ebene größer ist als das entsprechende $\frac{\delta}{R}$ (Kurve B) für zwei gleiche Zylinder, trotzdem beide Fälle in der elektrostatischen Feldverteilung identisch sind. Dieselbe Erscheinung wurde von A. Klemm bei den Kugeluntersuchungen festgestellt.

Vergleich der gefundenen Resultate mit der Theorie und den Klemmschen Untersuchungen über Kugelelektroden.

Die Gesetze für die elektrostatische Feldverteilung nehmen an, daß für einen gegebenen Abstand $\delta_s = \delta_p$, wobei δ_s die Schlagweite Zylinder—Zylinder, δ_p die Schlagweite Zylinder—Ebene bedeutet, die Anfangsspannung im Falle Zylinder—

Zylinder gleich der doppelten Anfangsspannung im Falle Zylinder—Ebene sei, vorausgesetzt, daß die Durchbruchfeldstärken in beiden Fällen die gleichen sind, also $\mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}_p$, wo $\mathfrak{E}_s$ die Durchbruchfeldstärke Zylinder—Zylinder, $\mathfrak{E}_p$ die Durchbruchfeldstärke Zylinder—geerdete Ebene bedeutet. Untersucht man nun daraufhin die Ergebnisse des Experimentes, so sieht man, daß diese Annahme nicht zutrifft. Die

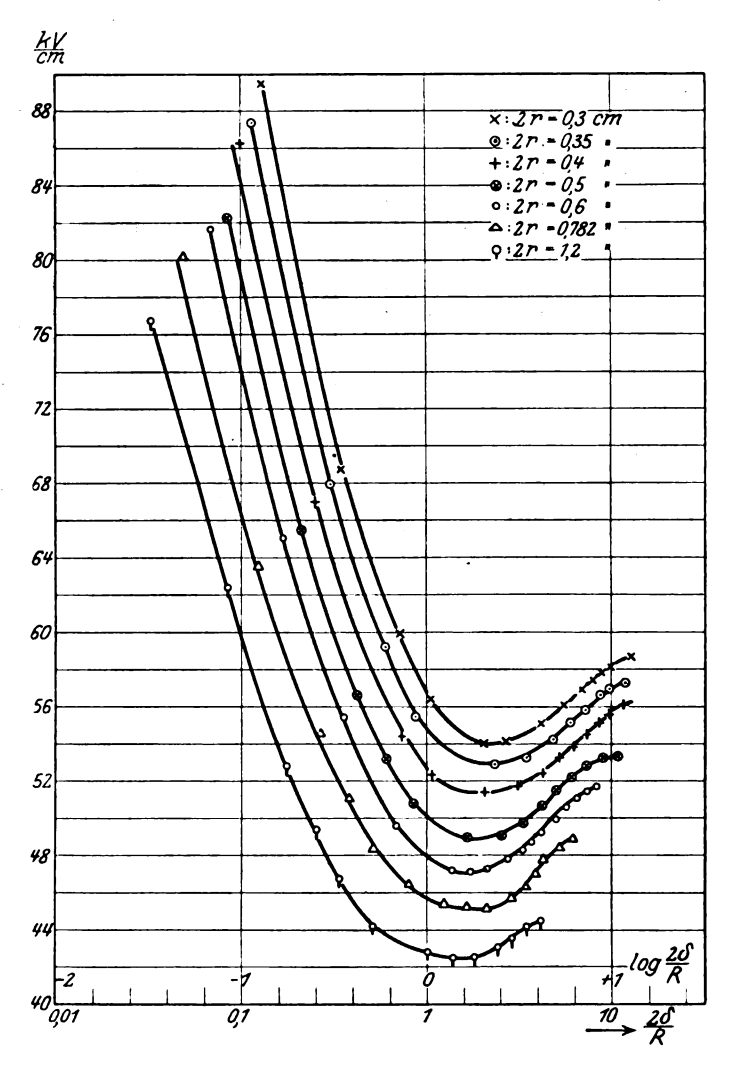


Bild 10. Durchbruchfeldstärken von Zylinder gegen Ebene in Abhängigkeit von $\log \frac{2\delta}{R}$.

Durchbruchfeldstärke zwischen Zylinder—Ebene für einen gewissen Abstand liegt durchweg höher als die Durchbruchfeldstärke für den Fall Zylinder—Zylinder im Abstande $\frac{\delta_s}{2}$. Physikalisch läßt sich diese höhere Durchbruchfeldstärke dadurch erklären, als durch die geerdete Ebene im Falle Zylinder—Ebene nur die Hälfte des Raumes für die Ionisierung zur Verfügung steht wie bei der Anordnung Zylinder —Zylinder, also eine höhere Feldstärke nötig ist, um in diesem Raume die für den Durchbruch nötige Trägerzahl zu erzeugen. Das Verhältnis der Durchbruchsfeldstärken, beziehungsweise der Anfangsspannungen von Zylinder—Ebene zu Zylinder —Zylinder gibt Tabelle VII wieder:

Tabelle VII.
Verhältnis der Durchbruchfeldstärken bzw. der Anfangsspannungen Zylinder—Ebene zu Zylinder—Zylinder.

δ_s/mm	δ_p/mm	Zylinderdurchmesser in mm										
		3	3,5	4	4,5	5	6	7	7,82	9	10	12
0,5	0,25	1,151	1,17	1,172	1,16	1,17	1,18	1,162	1,151	1,161	1,155	1,153
1	0,5	1,195	1,19	1,171	1 174	1,165	1,176	1,169	1 161	1,157	1,146	1,146
2	1	1,141	1,151	1,131	1,119	1,121	1,109	1,110	1,101	1,109	1,118	1,116
3	1,5	1,132	1,151	1,131	1,126	1,11	1,097	1,099	1,101	1,090	1,095	1,091
4	2	1,135	1,13	1,122	1,104	1,106	1,117	1,108	1,102	1,106	1,110	1,094
6	3	1,103	1,119	1,125	1,118	1,112	1,111	1,118	1,129	1,116	1,106	1,112
8	4	1,085	1,105	1,114	1,118	1,112	1,108	1,110	1,109	1,111	1,106	1,114
10	5	1,08	1,102	1,115	1,125	1,111	1,115	1,105	1,109	1,110	1,095	1,105
12	6	1,075	1,112	1,121	1,141	1,130	1,111	1,109	1,109	1,111	1,106	1,100
14	7	1,09	1,111	1,139	1,149	1,140	1,117	1,130	1,115	1,106	1,104	1,112
16	8		1,11	1,114			1,120				1,107	

Aus vorstehender Tabelle ergibt sich folgendes: Bis zu einer Schlagweite von $\delta_s = 6$ mm nähert sich das Verhältnis mit zunehmendem Zylinderradius der Einheit, während von da ab mit steigendem Zylinderradius das Gegenteil eintritt. Vergleicht man die Vertikalkolonnen, so ist allgemein festzustellen, daß sich das Verhältnis mit steigender Schlagweite eins nähert. Diese Verhältniszahlen mit den von A. Klemm

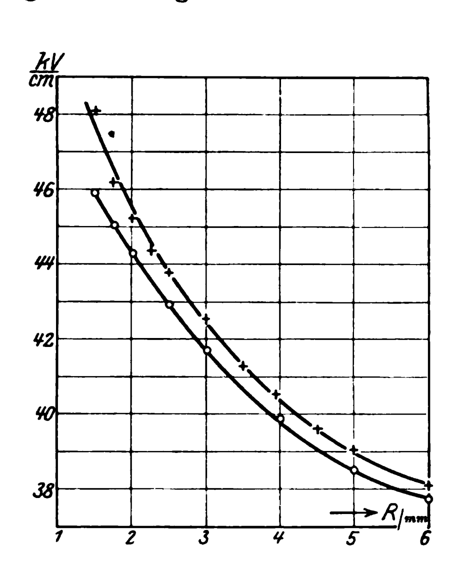


Bild 12. Minimumfeldstärken in Abhängigkeit vom Zylinderradius für Zylinder—Zylinder.
+ gemessene Werte,
o theoretische Werte.

Bild 13. Minimumfeldstärken in Abhängigkeit vom Zylinderradius für Zylinder—Ebene.
+ gemessene Werte,
o theoretische Werte.

bei Kugeln erhaltenen Resultaten verglichen, ergibt, daß die von mir angegebenen Werte im Durchschnitt 4% höher liegen. Dieser Unterschied läßt sich aber dadurch erklären, daß im Zylinderfalle, wo das Feld nach außen langsamer abnimmt als bei 2 Kugeln, durch die geerdete Ebene ein für die Entladung in Frage kommendes wirksameres Gasvolumen abgeschnitten wird, während bei zwei Kugeln eine stärkere Konzentration des Feldes unmittelbar um die Elektroden vorliegt, also die nötige

Feldbeanspruchung im Falle Zylinder—Ebene eine relativ höhere sein muß als im Falle Kugel—Ebene, verglichen mit der Durchbruchfeldstärke Zylinder—Zylinder bezw. Kugel—Kugel doppelten Abstandes.

Vergleiche ich die von mir gefundenen Werte der Minimumsfeldstärken für die einzelnen Zylinder mit den von W. O. Schumann[1]) theoretisch errechneten, so ergibt sich die Tatsache, daß die experimentellen Werte durchschnittlich 1,9% höher liegen, als die theoretischen. Im Falle Zylinder-Ebene ist das Verhältnis der gemessenen zu den theoretischen Werten wesentlich günstiger, während die maximale Abweichung der beiden Kurven für Zylinder—Ebene höchstens 1,5% beträgt, ist sie für Zylinder—Zylinder annähernd 4%. Bild 12 und 13 geben einen Vergleich der gemessenen und der theoretischen Kurve wieder. Eine genaue, tabellarische Vergleichung der von mir gemessenen Minimumfeldstärken für Zylinder—Zylinder und Zylinder—Ebene mit dem von W. O. Schumann berechneten ergibt Tabelle VIII:

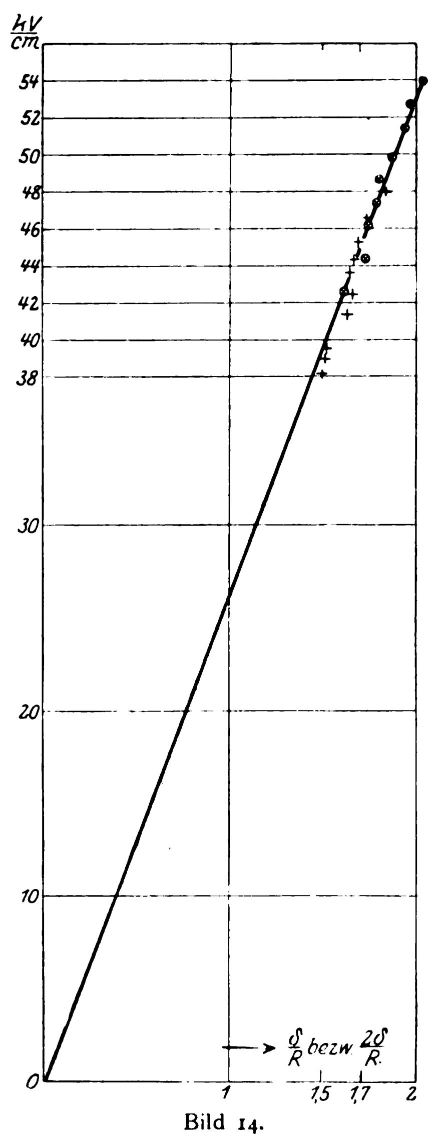


Bild 14.

Tabelle VIII.

Zylinderradius in cm	$\frac{E_{min.\ experimentell}}{E_{min.\ theoretisch}}$ Zylinder—Zylinder	Zylinder—Ebene
0,15	1,045	1,015
0,175	1,03	1,01
0,2	1,025	1,011
0,228	1,022	1,011
0,25	1,019	1,009
0,3	1,02	1,0085
0,35	1,017	1,0115
0,4	1,015	1,0105
0,45	1,013	1,0095
0,5	1,0125	1,008
0,6	1,011	1,0085

Mit zunehmendem Zylinderradius nähern sich also in beiden Fällen, wie das ja die Kurven schon zeigten, die experimentell gefundenen Werte denen der Theorie. Auch Klemm fand bei seinen Kugelmessungen die Abweichungen im symmetrischen Falle größer als im Falle Kugel—Ebene. Dabei ist der Unterschied zwischen theoretischen und experimentell gefundenen Werten bei Klemm größer.

Beim Minimum der Durchbruchfeldstärken $\mathfrak{E}_0$ gilt nach W. O. Schumann[2]) die Beziehung

$$\delta_m = 4{,}5 \frac{\mathfrak{E}_0 R}{B},$$

worin δ_m die Schlagweite, R der Zylinderradius und B eine Konstante darstellt. Wird die Minimumfeldstärke für Zylinder-Zylinder in Abhängigkeit von $\frac{\delta}{R}$ bzw. für Zylinder—Ebene von $\frac{2\delta}{R}$ aufgetragen, so muß sich nach dem theoretischen

[1]) W. O. Schumann, Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen S. 209.

[2]) Durchbruchfeldstärke i. G. S. 214.

Ansatz eine Grade ergeben. Wie Bild 14 zeigt, stimmt das angenähert mit dem Experiment überein. Setzt man in die Gleichung

$$\delta_m = 4{,}5 \frac{\mathfrak{E}_0 R}{B},$$

$B = 195$, ein Wert, den Schumann seinen Berechnungen zugrunde legt, ein, so würde die Grade eine Neigung von

$$\operatorname{tg} \alpha = 43{,}4$$

haben, während die experimentelle Grade eine Neigung von

$$\operatorname{tg} \alpha = 53$$

hat, welches wiederum eine Konstante $B = 238$ zur Folge hätte.

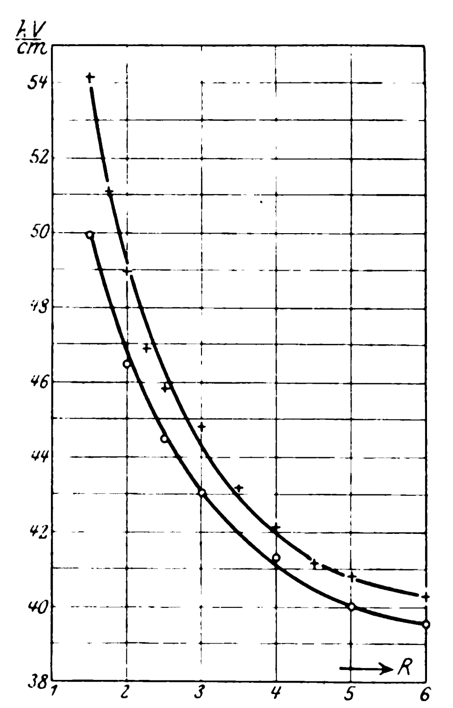


Bild 15. Grenzwertfeldstärken in Abhängigkeit vom Zylinderradius für die Anordnung Zylinder—Zylinder.
+ gemessene Werte,
o theoretische Werte.

Bild 16. Grenzwertfeldstärken in Abhängigkeit vom Zylinderradius für die Anordnung Zylinder—Ebene.
+ gemessene Werte,
o theoretische Werte.

Während A. Klemm findet, daß die Minimumfeldstärken im Falle Kugel—Kugel und im Falle Kugel—Ebene auf zwei verschiedenen Graden liegen und daß diese Graden nicht durch den Nullpunkt gehen, sondern schon bei einem Werte von 14 kV pro cm die Ordinate schneiden, liegen im Gegensatz hierzu die von mir gemessenen Minimumfeldstärken im symmetrischen Falle, ebenso wie im Falle Zylinder—Ebene auf ein und derselben Graden, und außerdem geht diese Grade scheinbar durch den Koordinatennullpunkt.

Die Streuung der Werte läßt sich darauf zurückführen, daß es oft sehr schwer war, die genaue Lage des Minimums zu bestimmen. Den zwischen den Untersuchungen von Klemm und den von mir ausgeführten Zylindermessungen auffallende Unterschied könnte man insofern erklären, als einmal die einflußreichen Zuleitungen bei der Kugelanordnung für meine Zylindermessungen eine wesentlich geringere Rolle spielen, und dann anscheinend dem Einfluß von Anlagerungserscheinungen im Kugelfelde eine größere Bedeutung zuzuschreiben ist.

Vergleicht man die gemessenen Werte der minimalen Werte der Durchbruchfeldstärke mit den nach einem genaueren Verfahren berechneten Werten von W. O. Schumann[1]), so liegen die gemessenen Werte mit einer gewissen Streuung um die berechnete Kurve AB herum. Im Mittel fallen sie mit ihr zusammen. Ob eine prinzipielle Abweichung vorliegt, müssen Messungen mit noch größeren Zylinderradien entscheiden.

Bild 15 vergleicht die von mir gemessenen Grenzwerte der Durchbruchfeldstärke bei großen Schlagweiten für den Fall Zylinder—Zylinder mit den von W. O. Schumann berechneten. Wieder ist die Durchbruchfeldstärke des Grenzwertes dargestellt in Funktion vom Zylinderradius. Es ergibt sich dieselbe Tatsache wie bei dem Vergleich der Minimumfeldstärken. Die gemessenen Werte liegen durchweg höher als die theoretisch gefundenen. Auffallend ist, daß bei kleineren Zylindern die Differenz zwischen Experiment und Theorie größer ist als bei großen. Durchschnittlich liegt die gemessene Kurve 4% höher als die theoretische. Annähernd dieselben Verhältnisse ergibt der Vergleich der gemessenen Grenzwerte für den Fall Zylinder—Ebene mit denen der Theorie. Wie Bild 16 zeigt, liegt die Kurve der gemessenen Grenzwerte wieder höher als die theoretische. Die durchschnittliche Differenz beträgt annähernd 4%.

Grenzwertvergleichungen mit Kugelmessungen sind nicht möglich, da Klemm bei seinen Messungen keinen ausgesprochenen Grenzwert erreichte; wie W. O. Schumann annimmt, deshalb, weil bei großen Schlagweiten die Kugelzuleitungen eine Feldverzerrung hervorrufen.

Polaritätserscheinungen.

Bei sämtlichen Messungen im symmetrischen wie unsymmetrischen Falle fiel die Anfangsspannung mit der Funkenspannung zusammen. Nur bei den dünnsten benutzten Zylindern war ein leises Sprühen, eine Art Streifenentladung, vor dem eigentlichen Durchbruch zu bemerken. Polaritätseffekte wurden nicht beobachtet. Auch im Falle Zylinder—Ebene war es gleich, ob ich dem Zylinder ein negatives oder positives Potential gab.

Zusammenfassung.

1. Das von A. Klemm konstruierte Hochspannungsvoltmeter wird in der Richtung umgebaut, daß die von Klemm benutzte Gegenkraft der Spiralfeder durch eine Blattfederanordnung ersetzt wird. Die dem Klemmschen Instrument anhaftenden Hysteresiserscheinungen werden dadurch vermindert. Das Instrument erhält wieder eine optische Ablesung und wird durch einen Transformator, dessen Daten genau bestimmt werden, geeicht.

2. Die Durchbruchfeldstärke der Luft wird mittels Plattenfunkenstrecke nochmals nachgemessen, die Genauigkeit beträgt für den gemessenen Bereich von 0,1—1 cm Schlagweite ± 0,5%. Die gefundenen Werte liegen durchweg 0,5% tiefer als die Klemmschen.

3. Die Anfangsspannungen einer Funkenstrecke aus zwei gleichen, parallelen Zylindern und einer Funkenstrecke aus einer geerdeten Ebene und einem Zylinder werden in dem Bereich von 0,1—17 mm gemessen.

Die benutzten Zylinder hatten eine Länge von 34 cm und waren in den Stärken von 3—7 mm Durchmesser aus Borsilberstahl, von 7,82—12 mm Durchmesser aus Messing. Die Genauigkeit der Messungen war für Schlagweiten größer als 0,5 mm, ± 1—2% und wurde für kleinere Schlagweiten etwas ungünstiger.

[1]) Arch. f. Elektrot. VII, 1923, S. 595. Bild 3, S 597.

4. Die in den aufgenommenen Kurven der Durchbruchfeldstärken auftretenden Minimumfeldstärken nehmen ebenso wie das Verhältnis $\frac{\delta}{R}$ Schlagweite zu Radius, bei dem sie auftreten, mit wachsendem Zylinderradius ab.

5. Die Messungen Zylinder—Zylinder, mit den entsprechenden bei der Anordnung Zylinder—Ebene auf Grund der Beziehungen $\delta_s = 2\,\delta_p$ verglichen, ergeben für die Anordnung Zylinder—Ebene höhere Anfangsspannungen bzw. höhere Durchbruchfeldstärken.

6. Die durch das Experiment gefundenen Minimumfeldstärken im Vergleich zu den von W. O. Schumann errechneten Werten liegen bei der Anordnung Zylinder—Zylinder 1,9% höher; im Falle Zylinder—Ebene stimmen die experimentell gefundenen Minimumfeldstärken annähernd mit den theoretischen Werten überein. Ein Analogon sind die von Klemm ausgeführten Messungen mit Kugelelektroden.

7. Auf Grund der Beziehung $\delta_m = 4{,}5\,\frac{E_0 R}{B}$ werden die Minimumfeldstärken in Abhängigkeit von $\frac{\delta}{R}$ bzw. $\frac{2\,\delta}{R}$ aufgetragen. Die so erhaltenen Punkte liegen auf einer Graden, die den Koordinatennullpunkt schneidet.

8. Die erreichten Maximalwerte bei großen Schlagweiten im Falle Zylinder—Zylinder, wie Zylinder—Ebene liegen durchschnittlich 4% höher als die von W. O. Schumann berechneten. Die Grenzwerte nehmen mit zunehmendem Zylinderradius ab. Das Verhältnis $\frac{\delta}{R}$ bzw. $\frac{2\,\delta}{R}$, bei dem der Grenzwert erreicht wird, nimmt mit wachsendem Zylinderradius ebenfalls ab.

9. Die Polarität hatte auf die Anfangsspannung keinen Einfluß.

10. Ein Einfluß der untersuchten Elektrodenmaterialien (Borsilberstahl und Messing) war nicht feststellbar.

Vorliegende Arbeit wurde im Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena ausgeführt. Die Anregung zu dieser Arbeit erhielt ich von Herrn Prof. Dr. Schumann, der mich in jeder Hinsicht förderte und unterstützte. Dafür bin ich ihm zu allergrößtem Dank verpflichtet. Nur durch das liebenswürdige Entgegenkommen der Firmen Carl Zeiß, Hartmann & Braun, Frankfurt a. M., Heräus-Hanau und der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft war die vollkommene Durchführung der Arbeit möglich. Genannten Firmen und Körperschaften spreche ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank aus.

Die Wanderwelle nach Aufnahmen mit dem Kathodenoszillographen.

Von

W. Rogowski und **E. Flegler.**

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

Es ist ein alter Wunsch, die mit Lichtgeschwindigkeit längs Drähten dahinbrausenden elektrischen Wanderwellen (Drahtwellen) oszillographisch aufzunehmen. Bisher hat seine Erfüllung auf sich warten lassen. Unseres Wissens wenigstens sind bisher von keiner Seite Wanderwellenaufnahmen gezeigt worden. Die Nachprüfung unserer theoretischen Vorstellungen, die Fülle von Anregungen, die auf niederfrequentem Gebiet der Siemenssche Oszillograph gegeben hat und heute noch gibt, blieben auf dem Gebiete der Wanderwellen bisher aus.

In Bild 1 und 2 bringen wir nun die ersten Wanderwellenoszillogramme. Sie beziehen sich auf eine Doppelleitung von 75 m einfacher Länge, an die plötzlich eine Spannung von 1000 Volt geschaltet wird (Bild 3). Die Akkumulatorenbatterie



Bild 1. Erstes Wanderwellenoszillogramm.



Bild 2. Zweites Wanderwellenoszillogramm. Es stimmt auch in den Feinheiten mit Bild 1 überein.

Beide Oszillogramme sind einmalig geschrieben. Es ist nichts an ihnen retouchiert worden. Die Originale lassen die Feinheiten erheblich klarer und deutlicher erkennen als die vorliegende Wiedergabe.

wurde bei den Aufnahmen durch einen Kondensator von etwa 1 Mikrofarad überbrückt. Denn die Batterie selbst erwies sich als zu unergiebig für die starken Ströme, die im Moment des Schaltens in die Doppelleitung ziehen. Der Schalter bestand aus einem Draht von 1 mm Durchmesser, der in Quecksilber gestoßen wurde. Auch hatten wir parallel dem Schalter, um ja einigermaßen periodische Verhältnisse zu erzielen, einen nicht gezeichneten Kondensator eingefügt.

Die Theorie der Einschaltwelle stammt von Kirchhoff aus dem Jahre 1857. Sie ergibt, wenn alle Verluste vernachlässigt werden, für die Spannung am Ende der Leitung — und hierauf beziehen sich auch die Oszillogramme 1 und 2 — den bekannten rechteckförmigen Wellenzug (Bild 4). Vergleichen wir nun das theoretische (Bild 4) und experimentelle Ergebnis (Bild 1 und 2)!

Der Anfang des Vorgangs geht in Bild 1 und 2 verloren. Das plötzlich eingeschaltete Kathodenrohr gibt so viel Elektronen auf die im Vakuum befindliche Platte, daß sie den Treffpunkt mitsamt der Umgebung verschmutzen. Der erste steile Anstieg der Welle, der die Spannung von Null auf den doppelten Wert der Schaltspannung hebt, wird aus diesem Grunde verdeckt. Jedoch ist noch der letzte Abschnitt des Anstieges deutlich zu sehen. Es folgt dann der in der theoretischen Kurve wagrechte Strich, der die volle Spannung 2 E darstellen soll. Ihn finden wir in den Oszillogrammen deutlich ausgeprägt. Er enthält aber noch eine recht hohe

Oberschwingung[1]). Man zählt etwa 15 Buckel. Diesen Strich mit all seinen Feinheiten hat der Kathodenstrahl in einer halben milliontel Sekunde gezeichnet.

Im theoretischen Bild folgt nun der jähe Abfall der Spannung, der im Oszillogramm 1 in wunderbarer Deutlichkeit zum Ausdruck kommt. Er ist in rund ein hundertmilliontel bis einmilliardtel Sekunde niedergeschrieben worden! Wir befinden uns hier bereits an der Grenze der richtigen Wiedergabe unseres Oszillographen. Ob der Spannungsabfall mehr oder weniger steil verläuft, ist eine Frage, von der die elektrotechnische Literatur der letzten 15 Jahre widerhallt. Beweise dafür und wider wurden gebracht, ohne endgültige Klärung zu geben. Unter den Bedingungen unseres Versuches ergibt das Oszillogramm eine unerhörte Steilheit. Der Größenordnung nach liegt die ganze Spannung etwa auf einem Meter Laufweg der Welle. Der zeitliche Anstieg der Front ist sicherlich so rasch, daß die einzelnen Buckel in dem wagrechten Strich (Spannung 2 E) langsam dagegen verlaufen. Um dies zu beweisen sind eben zwei Oszillogramme, die zwei verschiedenen Aufnahmen entsprechen, der Arbeit beigegeben. In den Feinheiten der Oberwellen stimmen sie überein. Die Oberwellen haben somit mit dem Funken nichts zu tun. Dieser verläuft noch rasch gegen die genannten Buckel, deren einzelner etwa eine zwanzigmilliontel Sekunde dauert.

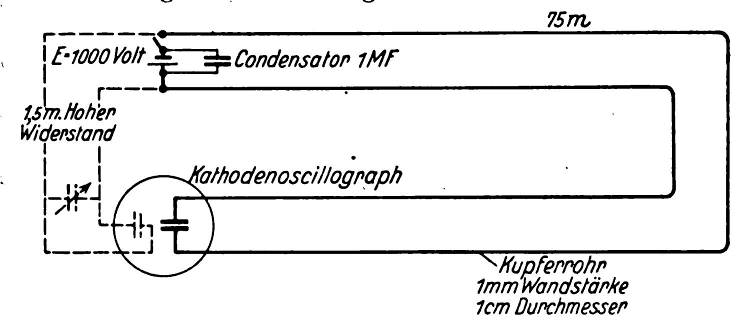


Bild 3. Schaltanordnung bei Aufnahme der Oszillogramme.

Wagner hat 1908 die steile Front für den Unfug verantwortlich gemacht, den die Wanderwelle in unseren Apparaten ausübt. Es ist möglich, daß er recht hat. Die steile Front kann jedenfalls da sein. Ob alle angerichteten Schäden darauf zurückzuführen sind, wird die alsbald einsetzende Untersuchung lehren.

In den Oszillogrammen wiederholt sich nun das Geschilderte periodisch. Auffallend wirkt noch die geringe Dämpfung. Wir müssen bei der vorliegenden Leitung (Kupferrohr von 1 mm Wandstärke, 10 mm Durchmesser) die Wanderwelle als sehr schwach gedämpften Wellenzug auffassen.

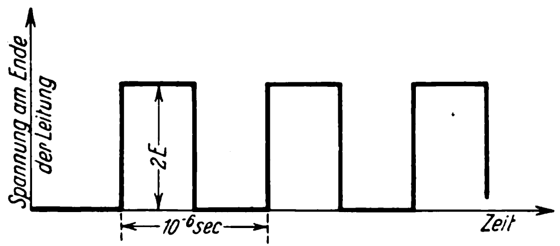


Bild 4. Theoretisches Bild nach Kirchhoft (1857).

Der Zeitmaßstab unserer Oszillogramme wird gegeben durch die Aufladung eines Kondensators (gestrichelte Leitung, Bild 3). Derselbe Schaltvorgang, der die Wanderwelle auslöst, bewirkt die Aufladung eines Kondensators. Die Zuleitungen zu ihm von 1,5 m Länge haben hohen Widerstand. Die Ladung des Kondensators vollzieht sich anfänglich natürlich auch wanderwellenmäßig, also nichtquasistationär. Sie ist aber bereits völlig quasistationär geworden und erfolgt nach bekannter e-Funktion, wenn die Wanderwelle den weiten Weg von 75 m zurückgelegt hat.

Den benutzten Oszillographen, zu dem Helmholtzgesellschaft und Elektrophysikalischer Ausschuß beigesteuert haben, beschreiben wir im nächsten Heft.

Wir sagen wohl nicht zu viel, wenn wir behaupten, daß mit den obigen Oszillogrammen ein neuer Zeitabschnitt der Untersuchung von Wanderwellen und einmalig ablaufender Hochfrequenzvorgänge beginnt.

[1]) Die Freileitung von 75 m war in vierfachen Schlangenlinien geführt, um sie in den beschränkten Räumen des Instituts unterzubringen. Vielleicht liegt hierin der Grund für die Entstehung der Oberwellen.

Abgeschlossen am 18. Mai 1925.



Archiv für Elektrotechnik

XIV. Band. 6. Heft 1925.

Kurzschlußläufermotoren mit veränderlichem Läuferscheinwiderstand.

Von

Dr.-Ing. **M. Liwschitz.**

I. Die Grundgleichungen des Asynchronmotors mit veränderlichem Läuferscheinwiderstand.

Den Motoren mit Doppelkäfig nach Boucherot und den mit Wirbelstromläufer[1]) ist gemeinsam, daß bei ihnen der Ohmsche Widerstand des Läuferkreises mit zunehmendem Schlupf zunimmt und der (auf den Ständer reduzierte) Streublindwiderstand des Läuferkreises mit zunehmendem Schlupf abnimmt. Beim Motor mit Boucherotläufer wird dies durch das Zusammenwirken der beiden Käfige, beim Motor mit Wirbelstromläufer durch die Stromverdrängung bewirkt.

Bezeichnen (alle Größen pro Phase, die Läufergrößen auf den Ständer reduziert):

R_2 den Ohmschen Widerstand des Läuferkreises,
x_2 den Streublindwiderstand des Läuferkreises,
σ den Schlupf des Motors,

so kann man sowohl für den Boucherotläufer, wie für den Wirbelstromläufer setzen:

$$\begin{aligned} R_2 &= a + b \cdot \varphi(\sigma) \\ x_2 &= l + m \cdot \psi(\sigma). \end{aligned} \qquad (1)$$

Bild 1. Ersatzschaltung des Motors mit veränderlichem Läuferscheinwiderstand.

a und l sind die konstanten Teile, b und m sind die mit dem Schlupf veränderlichen Teile des Ohmschen Widerstandes bzw. des Streublindwiderstandes des Läuferkreises.

Bezeichnet E_2 die im Läufer im Stillstand ($\sigma = 1$) induzierte EMK, so ist der Läuferstrom bei dem Schlupf σ

$$J_2 = \frac{\sigma E_2}{\sqrt{[a + b \cdot \varphi(\sigma)]^2 + \sigma^2 [l + m \cdot \psi(\sigma)]^2}} = \frac{E_2}{\sqrt{\left[\frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma}\right]^2 + [l + m \cdot \psi(\sigma)]^2}}, \qquad (2)$$

d. h. die mechanische Leistung des Läufers wird dargestellt durch die Größe

$$\left[\frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma}\right] - [a + b \cdot \varphi(\sigma)] = [a + b \cdot \varphi(\sigma)] \frac{1 - \sigma}{\sigma}$$

und die Ersatzschaltung des Motors ist gegeben durch das Bild 1. Es bedeuten hierin:

---

[1]) Siehe R. Rüdenberg, Asynchronmotoren mit Selbstanlauf durch tertiäre Wirbelströme, ETZ 1918; M. Liwschitz, Asynchronmotoren mit Kurzschlußläufer für hohes Anlaufmoment und niedrigen Anlaufstrom, Siemens-Zeitschrift 1925, Heft 2 und 3.

P_1 die primäre Klemmenspannung,
P_2 die sekundäre Klemmenspannung,
R_1 bzw. x_1 den Ohmschen Widerstand bzw. den Streublindwiderstand der Ständerwicklung,
R_μ bzw. x_μ den äquivalenten Ohmschen Widerstand bzw. den äquivalenten Blindwiderstand des magnetischen Kreises.

Wie beim gewöhnlichen Asynchronmotor ist auch hier die Belastung des Sekundärkreises induktionsfrei (mechanische Leistung!). Da jedoch die Konstanten des Sekundärkreises sich hier mit der Belastung ändern, so ist das Stromdiagramm des Asynchronmotors mit veränderlichem Läuferscheinwiderstand kein Kreis (s. Bilder 7, 15 und 16).

Die Größen R_μ und x_μ, die den Einfluß der Eisenverluste und des Magnetisierungsstromes berücksichtigen und infolgedessen normalerweise von geringerer Bedeutung sind, sind eigentlich keine Konstanten. Mit zunehmendem Schlupf nimmt sowohl R_μ wie x_μ ab. Im Stillstand ($\sigma = 1$) kann R_μ gleich Null gesetzt werden.

In ähnlicher Weise wie beim gewöhnlichen Asynchronmotor[1]) entnimmt man der Ersatzschaltung Bild 1:

$$\mathfrak{Z}_1 = R_1 + j\,x_1 \tag{3}$$

$$\mathfrak{Z}_\mu = R_\mu + j\,x_\mu \tag{4}$$

$$\mathfrak{Z}_2 = \frac{a + b\cdot\varphi(\sigma)}{\sigma} + j\,[l + m\cdot\psi(\sigma)] \tag{5}$$

$$\mathfrak{Z}_{2b} = [a + b\cdot\varphi(\sigma)]\,\frac{1-\sigma}{\sigma} \tag{6}$$

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_\mu + \mathfrak{J}_2 \qquad \mathfrak{J}_\mu = \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{Z}_\mu} \qquad \mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{Z}_2} \tag{7}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{J}_1\,\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{E}_1\left(1 + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_\mu} + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2}\right). \tag{8}$$

Das Argument des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_\mu}$ ist sehr klein. Mit großer Annäherung gilt

$$\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_\mu} = \frac{J_{\mu 0}\,x_1}{F_{10}} = \tau_1, \tag{9}$$

wo τ_1 den Heylandschen Streufaktor bedeutet. Mit Hilfe von (8), (9) und (7) erhält man

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{(1+\tau_1) + \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2}} \tag{10}$$

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{P}_1}{(1+\tau_1)\,\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_1} \tag{11}$$

und somit für den absoluten Betrag des Läuferstromes

$$J_2 = \frac{P_1}{\sqrt{\left[R_1 + (1+\tau_1)\,\frac{a + b\cdot\varphi(\sigma)}{\sigma}\right]^2 + \left[x_1 + (1+\tau_1)\,[l + m\cdot\psi(\sigma)]\right]^2}}\ \text{Amp.} \tag{12}$$

Für die Drehfeldleistung erhält man, wenn die primäre Phasenzahl mit m_1 bezeichnet wird,

$$N_d = m_1\,J_2^2\,\frac{R_2}{\sigma} = \frac{m_1\,P_1^2\,\frac{a + b\cdot\varphi(\sigma)}{\sigma}}{\left[R_1 + (1+\tau_1)\,\frac{a + b\cdot\varphi(\sigma)}{\sigma}\right]^2 + \left[x_1 + (1+\tau_1)\,[l + m\cdot\psi(\sigma)]\right]^2}\ \text{Watt.} \tag{13}$$

[1]) Siehe z. B. Arnold & la Cour, Wechselstromtechnik, Bd. V_1.

Mit der Drehfeldleistung (in Watt) steht das Drehmoment des Motors in der Beziehung

$$M = \frac{0{,}975 \cdot N_d}{n_s} \text{ mkg,} \tag{14}$$

wo n_s die synchrone Drehzahl des Motors bedeutet.

Mit Hilfe der Gleichungen (7) und (11) ergibt sich für den Ständerstrom

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P}_1 \frac{\mathfrak{Z}_\mu + \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_\mu [\mathfrak{Z}_1 + (1 + \tau_1) \mathfrak{Z}_2]} \tag{15}$$

und somit für den absoluten Betrag des Ständerstromes

$$J_1 = \frac{P_1 \sqrt{\left[R_\mu + \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma}\right]^2 + \left[x_\mu + [l + m \cdot \psi(\sigma)]\right]^2}}{\sqrt{\left\{R_\mu \left[R_1 + (1 + \tau_1) \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma}\right] - x_\mu \left[x_1 + [l + m \cdot \psi(\sigma)]\right]\right\}^2 + \left\{R_\mu \left[x_1 + [l + m \cdot \psi(\sigma)]\right] + x_\mu \left[R_1 + (1 + \tau_1) \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma}\right]\right\}^2}} \tag{16}$$

Der Phasenverschiebungswinkel zwischen dem Ständerstrom und der Ständerspannung φ_1 ist wie beim gewöhnlichen Asynchronmotor gleich der Summe der beiden Phasenverschiebungswinkel Θ_p zwischen der Ständer- und Läuferspannung und Θ_i zwischen dem Ständer- und Läuferstrom (Bild 2). Der Phasenverschiebungswinkel zwischen der Ständer- und Läuferspannung Θ_p ist gleich dem Argument des Verhältnisses

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2} = \frac{\mathfrak{Z}_1 + (1 + \tau_1) \mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_{2b}} \tag{17a}$$

und der Phasenverschiebungswinkel zwischen dem Ständer- und Läuferstrom Θ_i ist gleich dem Argument des Verhältnisses

$$\frac{\mathfrak{J}_1}{\mathfrak{J}_2} = \left(1 + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_\mu}\right). \tag{17b}$$

Es ergibt sich aus der Gleichung (17a)

$$\Theta_p = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1 + (1 + \tau_1)[l + m \cdot \psi(\sigma)]}{R_1 + (1 + \tau_1) \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma}}, \tag{18}$$

und aus der Gleichung (17b)

$$\Theta_i = \operatorname{arc\,tg} \frac{[l + m \cdot \psi(\sigma)] R_\mu - \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma} x_\mu}{z_\mu^2 + \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma} R_\mu + [l + m \cdot \psi(\sigma)] x_\mu}, \tag{19}$$

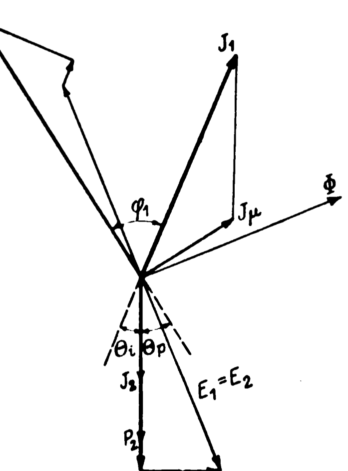


Bild 2. Spannungs- und Stromdiagramm.

somit

$$\varphi_1 = \Theta_p + \Theta_i = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1 + (1 + \tau_1)[l + m \cdot \psi(\sigma)]}{R_1 + (1 + \tau_1) \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{[l + m \cdot \psi(\sigma)] R_\mu - \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma} x_\mu}{z_\mu^2 + \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma} R_\mu + [l + m \cdot \psi(\sigma)] x_\mu} \tag{20}$$

Setzt man in Gleichung (16) $R_\mu = 0$, so erhält man für den Anlaufstrom

$$J_{1a} = \frac{P(1 + \tau_2)}{\sqrt{[R_1 + (1 + \tau_1)[a + b \cdot \varphi(1)]]^2 + [x_1 + [l + m \cdot \psi(1)]]^2}} \text{ Amp.,} \tag{21}$$

wo

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{x_{2(\sigma = 1)}}{x_1} \tag{22}$$

der sekundäre Streufaktor ist.

Das Anlaufmoment erhält man nach Gleichung (13) und (14) zu

$$M_a = \frac{0{,}975}{n_s} \frac{m_1 P_1^2 [a + b \cdot \varphi(1)]}{[R_1 + (1 + \tau_1)[a + b \cdot \varphi(1)]]^2 + [x_1 + (1 + \tau_1)[l + m \cdot \psi(1)]]^2} \text{ mkg.} \tag{23}$$

II. Der Motor mit Wirbelstromläufer.

Wir betrachten den Motor mit Wirbelstromläufer, und zwar den praktisch wichtigen Fall des nicht unterteilten Leiters. Die für diesen gewonnenen Resultate lassen sich sinngemäß auch auf den Wirbelstromläufer mit unterteiltem Leiter übertragen.

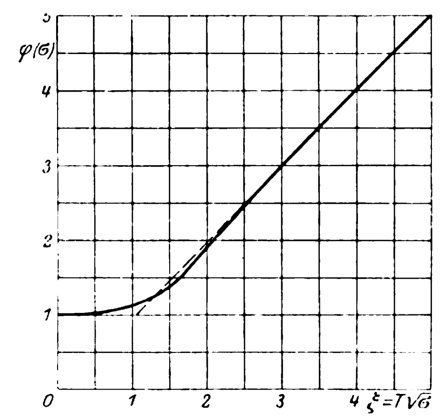


Bild 3. Widerstandsvermehrung in Abhängigkeit vom Schlupf.

Bild 4. Induktivitätsverminderung in Abhängigkeit vom Schlupf.

Für den Wirbelstromläufer mit nicht unterteiltem Leiter gilt[1])

$$\varphi(\sigma) = \xi \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\xi + \sin 2\xi}{\mathfrak{Cof}\, 2\xi - \cos 2\xi} \tag{24}$$

und

$$\psi(\sigma) = \frac{3}{2\xi} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\xi - \sin 2\xi}{\mathfrak{Cof}\, 2\xi - \cos 2\xi}, \tag{25}$$

wo

$$\xi = 2\pi t_k \sqrt{\frac{b_k}{b_n} \frac{f_1}{\varrho}} \sqrt{\sigma} = T \sqrt{\sigma}. \tag{26}$$

Hierin bedeuten;

t_k die Kupferhöhe (Leiterhöhe),
b_k die Kupferbreite (Leiterbreite),
b_n die Nutenbreite,
ϱ den spezifischen Widerstand des Leitermaterials in absoluten Einheiten (für warmes Kupfer = 2000),
f_1 die Ständerperiodenzahl (Netzperiodenzahl).

Für $f_1 = 50$ Per/sec und Kupfer als Leitermaterial ist T annähernd gleich der Leiterhöhe.

Bild 3 und 4 zeigen die Funktionen $\varphi(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$ in Abhängigkeit von $\xi = T\sqrt{\sigma}$. Während $\varphi(\sigma)$ mit zunehmendem ξ, d. h. mit zunehmender Leiterhöhe

[1]) Siehe A. B. Field, Americ. Proceed. 1905; F. Emde, E. & M., 1908, 1909. W. Rogowski, Arch. f. Elektrot. Bd. II; R. Rüdenberg, ETZ 1918.

zunimmt (Widerstandsvermehrung), nimmt $\psi(\sigma)$ mit zunehmender Leiterhöhe ab (Induktivitätsverminderung).

Die Berechnung der Hauptgrößen wie Drehmoment, Ständerstrom usw. eines Motors mit Wirbelstromläufer kann nun derart erfolgen, daß man für den betreffenden Schlupf den Kurven Bild 3 und 4 die Werte der Funktionen $\varphi(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$ entnimmt und sie in die Gleichungen (14), (16) usw. einsetzt.

Eine mit der Praxis gut übereinstimmende Näherungsrechnung erhält man, wenn man die Kurven der Bilder 3 und 4 in dem in Betracht kommenden Gebiet durch gerade Linien ersetzt, wie dies in den Bildern 3 und 4 angedeutet ist.

Mit Rücksicht auf das Optimum für die Widerstandsvermehrung wird man beim Wirbelstromläufer mit nicht unterteiltem Leiter T nicht größer als 3,5 bis 3,8 cm machen[1]), d. h. bei einer Netzperiodenzahl $f_1 = 50$ Per/sec und Kupfer als Leitermaterial wird man die Leiterhöhe nicht größer als etwa 4 cm machen.

Wie aus Bild 3 ersichtlich, verläuft $\varphi(\sigma)$ für alle Werte von ξ, die größer als 2 sind, geradlinig. Diese Gerade läßt sich nach unten bis $\xi = 1{,}1$ verlängern, so daß der Geltungsbereich der für $\varphi(\sigma)$ angenommenen Geraden sich auf alle Werte von ξ, die größer als 1,1 sind, erstreckt. Der Schlupf, der $\xi = 1{,}1$ entspricht, ergibt sich nach Gleichung (26) zu

$$\sigma' = \frac{b_n \cdot \varrho}{b_k \cdot f_1} \frac{1{,}1}{(2\pi t_k)^2}. \tag{27}$$

Für $f_1 = 50$ Per/sec und $\varrho = 2000$ (Kupfer) ergibt sich aus dieser Gleichung, da $\frac{b_n}{b_k}$ im Mittel gleich 1,15 ist,

$t_k = 4{,}0$ cm	$\sigma' = 0{,}08$	$f_2 = 4$ Per/sec
3,5 cm	$\sigma' = 0{,}10$	$f_2 = 5$,,
3,0 cm	$\sigma' = 0{,}14$	$f_2 = 7$,,

Die für $\varphi(\sigma)$ angenommene Gerade gilt also nach unten bis zu derart kleinen Schlüpfen, daß die Stromverdrängung dort beinahe keine Rolle mehr spielt, und daß die für den gewöhnlichen Asynchronmotor bekannten Beziehungen dort angewendet werden dürfen.

Für den Wirbelstromläufer mit nicht unterteiltem Leiter kann man somit nach Bild 3 setzen

$$\varphi(\sigma) = T\sqrt{\sigma}, \tag{28}$$

wo

$$T = 2\pi t_k \sqrt{\frac{b_k}{b_n} \frac{f_1}{\varrho}}. \tag{29}$$

Die prozentuale Induktivitätsverminderung ist viel kleiner als die prozentuale Widerstandsvermehrung. Der Geltungsbereich der in Bild 4 eingezeichneten Geraden erstreckt sich nach unten bis etwa $\xi = 0{,}9$, also auf noch kleinere Schlüpfe als die für $\varphi(\sigma)$ angenommene Gerade, nach oben bis ca. $\xi = 3{,}9$, d. h. bis auf den größten beim Wirbelstromläufer mit nicht unterteiltem Leiter vorkommenden Wert von ξ (im Bereiche $\sigma \leq 1$). Für die Gerade des Bildes 4 gilt

$$\psi(\sigma) = 1{,}2 - 0{,}22\, T\sqrt{\sigma}. \tag{30}$$

Setzt man die Gleichungen (28) und (30) in die Gleichung (1) ein, so erhält man für den Motor mit Wirbelstromläufer und nicht unterteiltem Leiter

$$R_2 = a + b \cdot \varphi(\sigma) = a + bT\sqrt{\sigma} = a + c\sqrt{\sigma}, \tag{31}$$

wo

$$c = bT \tag{32}$$

und

[1]) Siehe R. Rüdenberg l. c. Bild 24.

$$x_2 = l + m \cdot \psi(\sigma) = l + m\left(1{,}2 - 0{,}22\,T\sqrt{\sigma}\right) = p + q \cdot \sqrt{\sigma}, \tag{33}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} p &= l + 1{,}2\,m \\ q &= 0{,}22\,m\,T \end{aligned}\right\}. \tag{34}$$

a ist hier gleich dem Ohmschen Widerstand der Leiterteile, die außerhalb des aktiven Eisens liegen, und dem Ohmschen Widerstand der Kurzschlußringe. b ist gleich dem Ohmschen Widerstand der Leiterteile, die im aktiven Eisen liegen. Der Streublindwiderstand l entspricht der Streuung der Leiterteile, die außerhalb des aktiven Eisens liegen, der Streuung der Kurzschlußringe und der Zickzackstreuung des Läufers. Der Streublindwiderstand m entspricht der Nutenstreuung der im aktiven Eisen liegenden Leiterteile.

Mit Hilfe der Gleichungen (31), (33), (13), (16) und (20) erhält man für die Drehfeldleistung des Motors mit Wirbelstromläufer und nicht unterteiltem Leiter

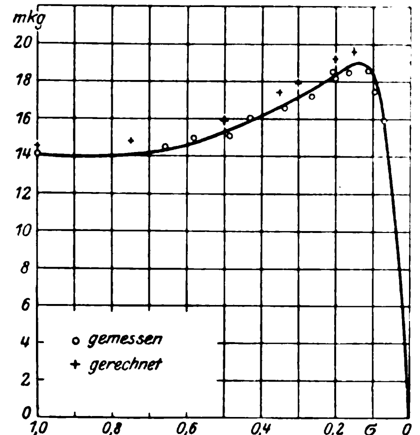


Bild 5. Motor mit Wirbelstromläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr./Min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf.

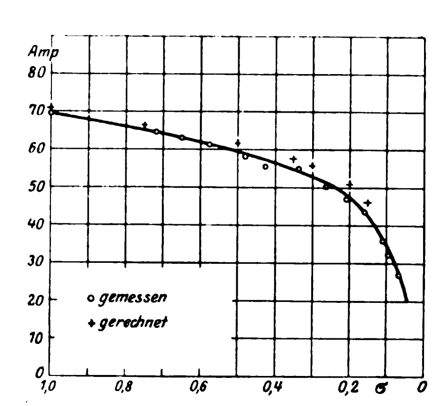


Bild 6. Motor mit Wirbelstromläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr./Min. Ständerstrom in Abhängigkeit vom Schlupf.

$$N_d = \frac{m_1 P_1^2 \dfrac{a + c\sqrt{\sigma}}{\sigma}}{\left[R_1 + (1 + \tau_1)\dfrac{a + c\sqrt{\sigma}}{\sigma}\right]^2 + \left[x_1 + (1 + \tau_1)\left(p + q\sqrt{\sigma}\right)\right]^2} \text{ Watt}, \tag{35}$$

für den Ständerstrom

$$\left.\begin{aligned} J_1 = \frac{P\sqrt{\left[R_\mu + \dfrac{a + c\sqrt{\sigma}}{\sigma}\right]^2 + \left[x_\mu + \left(p + q\sqrt{\sigma}\right)\right]^2}}{\sqrt{\begin{aligned}&\left\{R_\mu\left[R_1 + (1 + \tau_1)\dfrac{a + c\sqrt{\sigma}}{\sigma}\right] - x_\mu\left[x_1 + \left(p + q\sqrt{\sigma}\right)\right]\right\}^2 + \\ &+ \left\{R_\mu\left[x_1 + \left(p + q\sqrt{\sigma}\right)\right] + x_\mu\left[R_1 + (1 + \tau_1)\dfrac{a + c\sqrt{\sigma}}{\sigma}\right]\right\}^2\end{aligned}}} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

und für die Phasenverschiebung zwischen Ständerstrom und Ständerspannung

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1 + (1+\tau_1)(p + q\sqrt{\sigma})}{R_1 + (1+\tau_1)\dfrac{a + c\sqrt{\sigma}}{\sigma}} + \\ + \operatorname{arc\,tg} \frac{(p + q\sqrt{\sigma})R_\mu - \dfrac{a + c\sqrt{\sigma}}{\sigma} x_\mu}{z_\mu^2 + \dfrac{a + c\sqrt{\sigma}}{\sigma} R_\mu + (p + q\sqrt{\sigma})x_\mu}.\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Bildet man $\frac{d N_d}{d\sigma} = 0$, um den Kippschlupf bzw. das Kippmoment zu bestimmen, so kommt man auf eine Gleichung 5ten Grades. Da der Kippschlupf normalerweise gering ist, kann der Einfluß der Stromverdrängung im Kippunkt vernachlässigt werden und der Kippschlupf bzw. das Kippmoment nach den für den gewöhnlichen Asynchronmotor gültigen Beziehungen berechnet werden[1]).

Für das Anlaufmoment des Motors mit Wirbelstromläufer und nicht unterteiltem Leiter gilt nach Gleichung (23)

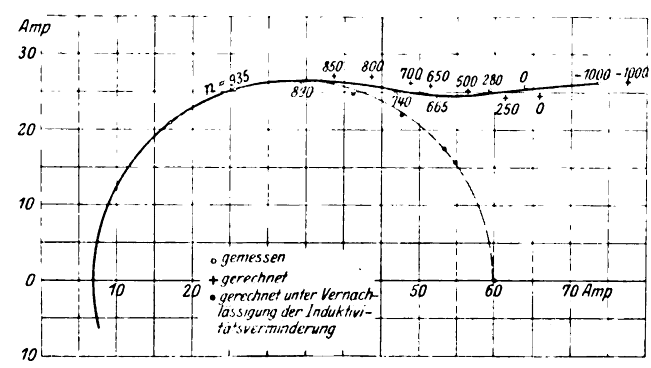


Bild 7. Motor mit Wirbelstromläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr/min. Stromdiagramm.

$$M_a = \frac{0{,}975}{n_s} \frac{m_1 P_1^2 (a + c)}{[R_1 + (1+\tau_1)(a + c)]^2 + [x_1 + (1+\tau_1)(p + q)]^2} \text{ mkg} \qquad (38)$$

und für den Anlaufstrom nach Gleichung (21)

$$J_{1a} = \frac{P(1+\tau_2)}{\sqrt{[R_1 + (1+\tau_1)(a + c)]^2 + [x_1 + (p + q)]^2}} \text{ Amp.} \qquad (39)$$

Die an einem Motor für 11 kW bei $n_s = 1000$ Umdr/min gemessenen und die für denselben Motor nach Gleichung (35) gerechneten Drehmomente in Abhängigkeit vom Schlupf zeigt Bild 5. Die gemessenen und nach Gleichung (36) gerechneten Ströme $J_1 = f(\sigma)$ dieses Motors zeigt Bild 6. Bild 7 zeigt das gemessene bzw. nach den Gleichungen (36) und (37) gerechnete Stromdiagramm desselben Motors. Die Zahlen geben die zu den betreffenden Strömen zugehörigen Drehzahlen an. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist sowohl beim Drehmoment wie beim Strom und der Phasenverschiebung recht gut. Es ist dabei zu berücksichtigen, daß die Messungen auf dem labilen Ast schwierig sind und an Genauigkeit, falls nicht besondere Sorgfalt bei den Messungen angewendet wird, stets zu wünschen übrig lassen.

[1]) Siehe z. B. Arnold & la Cour, Wechselstromtechnik, Bd. V_1. — M. Kloß, „Drehmoment und Schlüpfung des Drehstrommotors", Arch. f. Elektrot. Bd. V, Heft 3.

Vernachlässigt man die Induktivitätsverminderung, so erhält man als Stromdiagramm einen Kreis (gestrichelt eingezeichnet). Die Abweichung des Stromdiagramms des Motors mit Wirbelstromläufer von dem Kreis rührt also hier im wesentlichen von der Induktivitätsverminderung her.

III. Der Motor mit Doppelkäfig nach Boucherot.

Während für den Wirbelstromläufer das Gesetz der Widerstands- und Induktivitätsänderung bekannt ist, ist für den Boucherotläufer, bei dem die Verhältnisse infolge der Anordnung zweier Käfige komplizierter sind als beim Wirbelstromläufer, dieses Gesetz nicht bekannt. Die Funktionen $\varphi(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$ hängen beim Boucherotläufer im allgemeinen außer vom Schlupf sowohl von den Ohmschen Widerständen und Streublindwiderständen der beiden Käfige, d. h. von den Nuten- und Leiterdimensionen beider Käfige, von dem Abstand beider Käfige voneinander und von der Breite der die beiden Nutenreihen verbindenden Schlitze, wie von dem Verhältnis der magnetischen Widerstände des oberhalb und unterhalb des Laufkäfigs liegenden Eisens.

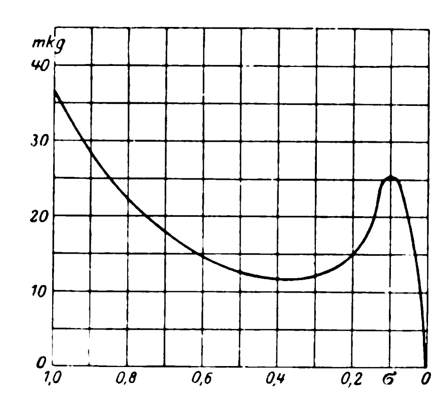


Bild 8. Motor mit Boucherotläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr/min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf für $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sigma^{\frac{3}{2}}$.

Bild 9. Motor mit Boucherotläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr/min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf für $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sigma^{\frac{4}{3}}$.

Bei den Motoren mit Boucherotläufer, die ihren Zweck erfüllen, d. h. ein hohes Anlaufmoment bei mäßigem Anlaufstrom aufweisen, wirkt im Stillstand fast der Anlaufkäfig allein, während bei kleinen Schlüpfen fast der Laufkäfig allein wirkt[1]). Zwischen Stillstand und Leerlauf ändern sich somit der Ohmsche Widerstand ebenso wie der Streublindwiderstand des Läuferkreises von den Werten, die der Anlaufkäfig hat, bis auf die Werte, die der Laufkäfig hat. Das Gesetz des Überganges vom Anfangswert zum Endwert in Abhängigkeit vom Schlupf findet man am einfachsten, indem man experimentell aufgenommene Drehmomenten- oder Stromkurven analysiert.

Für den oben beschriebenen Motor für 11 kW und $n_s = 1000$ Umdr/min nehmen wir an:

Ohmscher Widerstand des Anlaufkäfigs $= 0{,}8\, R_1$,
Ohmscher Widerstand des Laufkäfigs $= 4\, R_1$,
Streublindwiderstand des Anlaufkäfigs $= 2\, x_1$,
Streublindwiderstand des Laufkäfigs $= 0{,}2\, x_1$,

d. h.

$$a = 0{,}8\, R_1 \qquad b = (4 - 0{,}8)\, R_1 = 3{,}2\, R_1$$
$$l = 2\, x_1 \qquad m = -(2 - 0{,}2)\, x_1 = -1{,}8\, x_1.$$

[1]) Siehe M. Liwschitz, l. c.

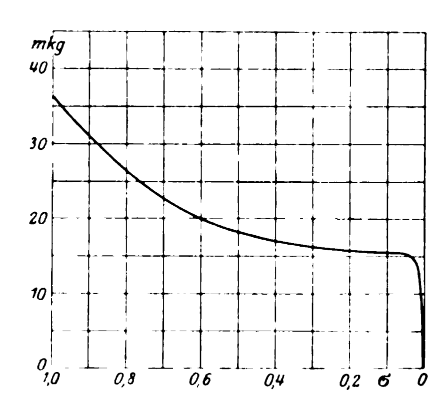


Bild 10. Motor mit Boucherotläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr/min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf für $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sigma$.

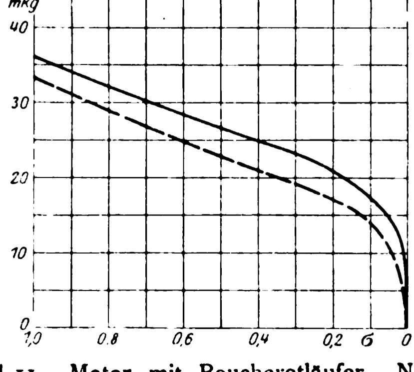


Bild 11. Motor mit Boucherotläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr/min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf für $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sigma^{\frac{1}{2}}$.

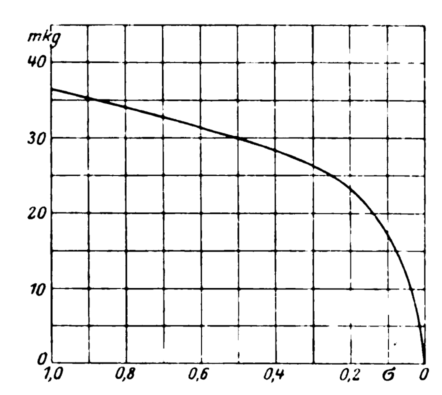


Bild 12. Motor mit Boucherotläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr/min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf für $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sigma^{\frac{1}{3}}$.

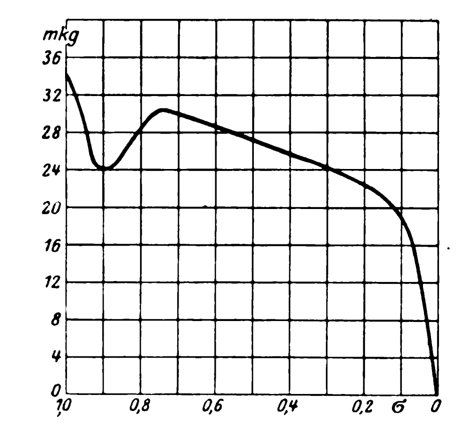


Bild 13. Motor mit Boucherotläufer. Nennleistung 15 kW, $n_s = 1500$ Umdr/min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf.

Die nach Gleichung (13) mit diesen Größen und den Werten $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sigma^{\frac{3}{2}}$, $\sigma^{\frac{4}{3}}$, σ, $\sigma^{\frac{1}{2}}$ und $\sigma^{\frac{1}{3}}$ gerechneten Drehmomentenkurven zeigen die Bilder 8 bis 12. In Bild 11 ist gestrichelt noch die Drehmomentenkurve für $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sigma^{\frac{1}{2}}$ unter der Annahme

$$a = 0{,}8\,R_1 \qquad b = 5{,}2\,R_1$$
$$l = 3\,x_1 \qquad m = -2{,}6\,x_1$$

eingetragen. Die Änderung der Konstanten des Läuferkreises hat also einen viel geringeren Einfluß als die Änderung in dem Verlauf der Funktionen $\varphi(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$.

Bei ausgeführten Motoren zeigt sich, daß $\varphi(\sigma)$ und $\psi(\sigma)$ beim Boucherotläufer ähnlich wie beim Wirbelstromläufer den Wert $\sigma^{\frac{1}{2}}$ bis $\sigma^{\frac{1}{3}}$ haben, daß also die Drehmomentenkurven einen ähnlichen Verlauf haben wie die Bilder 11 und 12.

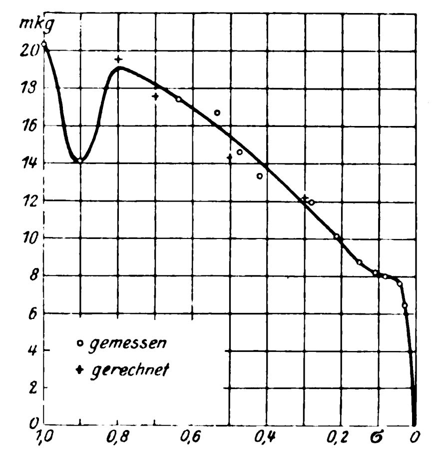


Bild 14. Motor mit Boucherotläufer. 11-kW-Stundenleistung, $n_s = 1500$ Umdr/min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf.

Bild 13 zeigt die Drehmomentenkurve eines Motors für 15 kW bei $n_s = 1500$ Umdr/min, Bild 14 die Drehmomentenkurve eines Motors für 11 kW-Stundenleistung bei $n_s = 1500$ Umdr/min. Dieser letztere Motor hat folgende Daten:

$$m_1 = 3 \qquad R_1 = 0{,}4$$
$$P_1 = 500/\sqrt{3} \qquad x_1 = 1{,}36.$$

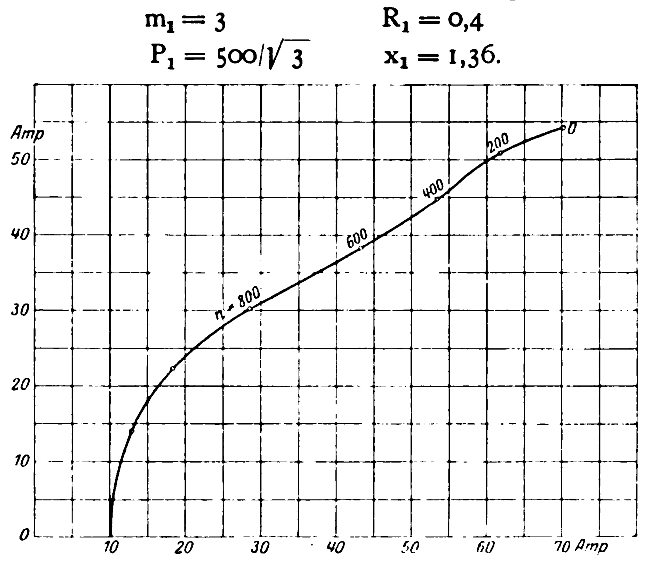


Bild 15. Motor mit Boucherotläufer. Nennleistung 11 kW, $n_s = 1000$ Umdr/min. Stromdiagramm.

Der Ohmsche Widerstand des Anlaufkäfigs beträgt 1,83 Ohm, der des Laufkäfigs 0,37 Ohm. Der Streublindwiderstand des Anlaufkäfigs beträgt 1,1 Ohm, der des Laufkäfigs 7,8 Ohm, so daß

$$a = 0{,}37 \qquad b = 1{,}46$$
$$l = 7{,}8 \qquad m = -6{,}7.$$

Die mit diesen Daten und $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sqrt{\sigma}$ nach Gleichung (13) gerechneten Drehmomente sind in das Bild 14 eingetragen. Sie stimmen mit den gemessenen Werten gut überein.

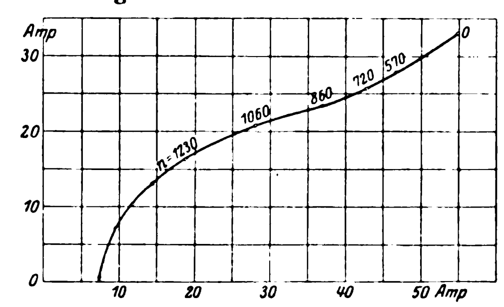


Bild 16. Motor mit Boucherotläufer. 11 kW Stundenleistung, $n_s = 1500$ Umdr/min. Stromdiagramm.

Das Stromdiagramm des unter II beschriebenen Motors für dieselben Verhältnisse, wie die ausgezogene Kurve Bild 11, zeigt Bild 15. Das an dem Motor für 11 kW-Stundenleistung und $n_s = 1500$ Umdr/min gemessene Stromdiagramm zeigt Bild 16. Auch das unter der Annahme $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sqrt{\sigma}$ nach den Gleichungen (16) und (20) gerechnete Stromdiagramm stimmt also dem Charakter nach mit dem gemessenen Stromdiagramm gut überein.

IV. Der Anlauf- und Bremsvorgang beim Motor mit veränderlichem Läuferscheinwiderstand.

In bezug auf Anlaufmoment und Anlaufstrom sind der Motor mit Wirbelstromläufer und der Motor mit Boucherotläufer, gleiche Wirkungsgrade und Leistungsfaktoren bei beiden Motoren vorausgesetzt, einander fast gleichwertig. In bezug auf Anlaufwärme der Wicklungen und Anlaufzeit sind beide Motorarten infolgedessen einander äquivalent. Der Wirbelstromläufer hat jedoch gegenüber dem

Boucherotläufer den Vorteil größerer Wärmekapazität; während beim Boucherotläufer die Anlaufwicklung infolge ihres hohen Widerstandes eine kleine Masse erhält, hat die Läuferwicklung des Wirbelstromläufers, da sie für den normalen Betrieb bemessen wird, die gleiche Masse wie der gewöhnliche Kurzschlußläufer [mit runden oder ovalen Stäben][1]. Die Bremswärme und Bremszeit sind beim Motor mit Wirbelstromläufer im allgemeinen kleiner als beim Motor mit Boucherotläufer, weil beim Motor mit Wirbelstromläufer der Läuferwiderstand im Bremsgebiet stark anwächst (s. Bild 3) bzw. die Drehmomente im Bremsgebiet größer sind als beim Motor mit Boucherotläufer.

Für den Motor mit Wirbelstromläufer und nicht unterteiltem Leiter sollen die Gleichungen für die Anlauf- und Bremswärme ebenso wie für die Anlauf- und Bremszeit kurz zusammengestellt werden[2].

a) Der Anlauf- und Bremsvorgang bei Überwindung von Massenträgheit.

Die Anlauf- wie die Bremswärme der Läuferwicklung hängen von der Ausführung des Motors nicht ab. Sie hängen nur von dem Schwungmoment GD^2 der zu beschleunigenden bzw. der zu verzögernden Massen und von der synchronen Drehzahl ab. Es gilt

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 GD^2 n_s^2 (\sigma_a^2 - \sigma_e^2) \text{ Watt sk,} \tag{40}$$

wo GD^2 in kgm^2 einzusetzen ist und σ_a bzw. σ_e den Anfangs- bzw. den Endschlupf bedeuten. Für den Anlauf ist $\sigma_a = 1$, $\sigma_e = 0$; für das Bremsen ist $\sigma_a = 2$, $\sigma_e = 1$.

Die Anlauf- und Bremswärme der Ständerwicklung hängen dagegen sowohl von der Ausführung der Ständerwicklung wie von der Ausführung der Läuferwicklung ab, und zwar sind sie um so kleiner, je größer der Läuferwiderstand ist, denn der größere Läuferwiderstand bedingt sowohl einen kleineren Anlauf- bzw. Bremsstrom wie eine kleinere Anlaufzeit. Es gilt

$$\mathfrak{A}_1 = A \frac{R_1}{R_{2g}} \frac{\lambda}{\nu} [\sigma - \lambda \ln (\lambda + \sigma)]_{\sigma_e}^{\sigma_a} \text{ Wattsk.} \tag{41}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 GD^2 n_s^2 \tag{42}$$

$$\lambda = \frac{a + \beta b}{\alpha b} \tag{43}$$

$$\nu = \frac{a + \beta b}{a + b} \tag{44}$$

$$R_{2g} = a + b. \tag{45}$$

R_{2g} ist der Gleichstromwiderstand der Läuferwicklung (Stromverdrängung = 0). α und β sind konstante Größen, die für den Anlauf bei Leiterhöhen bis 3,5 cm und für das Bremsen bei Leiterhöhen bis 2,5 cm den Wert haben

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0{,}22\, T^2 \\ \beta &= 1{,}0 \end{aligned}\right\} \tag{46a}$$

und für das Bremsen bei Leiterhöhen über 2,5 cm den Wert

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0{,}122\, T^2 \\ \beta &= 2{,}1. \end{aligned}\right\} \tag{46b}$$

Die Größe λ ist umgekehrt proportional der Widerstandsvermehrung; je tiefer die Nute ist, desto kleiner ist λ.

---

[1] Siehe M. Liwschitz, l. c.

[2] Näheres siehe M. Liwschitz: „Der Anlauf- und Bremsvorgang bei Asynchronmotoren mit Wirbelstromläufer". Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern, Bd. IV, Heft 1.

Für die Anlauf- bzw. die Bremszeit gilt die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} t = \frac{A}{m_1 P_1^2}\frac{x_1 + k p}{\nu R_{2g}}\frac{\lambda}{\mu^2}\Bigg[\frac{1}{3}(\lambda+\sigma)^3 - \left(\mu + \frac{3}{2}\lambda\right)(\lambda+\sigma)^2 + (\mu + 2\lambda)^2(\lambda+\sigma) - \\ - \lambda(\mu+\lambda)^2 \ln(\lambda+\sigma)\Bigg|_{\sigma_e}^{\sigma_a} + \frac{A}{m_1 P_1^2} k^2 c \ln\frac{\sigma_a}{\sigma_e}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$1 + \tau_1 = k \tag{48}$$

$$p = l + \delta m \tag{49}$$

$$q = \gamma m \tag{50}$$

$$\mu = -\frac{x_1 + k p}{k q}. \tag{51}$$

γ und δ sind konstante Größen, die für den Anlauf bei Leiterhöhen bis 3,5 cm und für das Bremsen bei Leiterhöhen bis 2,5 cm den Wert haben

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= -0{,}0555\, T^2 \\ \delta &= 1{,}0 \end{aligned}\right\} \tag{51 a}$$

und für das Bremsen bei Leiterhöhen über 2,5 cm den Wert

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= -0{,}0132\, T^2 \\ \delta &= 0{,}6 \end{aligned}\right\} \tag{51 b}$$

b) Der Anlaufvorgang bei Überwindung von Massenträgheit und anderen Gegenmomenten.

Bezeichnet man mit N_g das Gegenmoment, und zwar ausgedrückt in synchronen Watt, d. h.

$$N_g = 9{,}81\,\frac{2\pi n_s}{60} M_g,$$

so gilt für die Anlaufwärme der Läuferwicklung

$$\mathfrak{A}_2 = A \int_{\sigma_e}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{\frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{N_g}{N_d}\right)} \text{ Wattsk}, \tag{52}$$

für die Anlaufwärme der Ständerwicklung

$$\mathfrak{A}_1 = A R_1 \int_{\sigma_e}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{\frac{1}{\sigma}(s + t\sigma)\left(1 - \frac{N_g}{N_d}\right)} \text{ Wattsk} \tag{52}$$

und für die Anlaufzeit

$$t = A \int_{\sigma_e}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{N_d - N_g} \text{ sk}. \tag{54}$$

Zur Abkürzung ist hier gesetzt

$$\left.\begin{aligned} s &= a + \beta b \\ t &= \alpha b \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

N_g ist normalerweise veränderlich mit dem Schlupf. Die Integrale (52), (53) und (54) integriert man am einfachsten graphisch.

Methode der symmetrischen Koordinaten und allgemeine Theorie der Erdschlußlöscheinrichtungen.

Von

S. Bekku (z. Zt. in Berlin).
Elektrotechnisches Laboratorium Tokio, Japan.

Übersicht.

Mittels der Methode der symmetrischen Koordinaten (Method of symmetrical co-ordinates), die von C. L. Fortescue in sehr eleganter Weise entwickelt worden ist, können verschiedene Probleme in Drehstromnetzen ganz einfach behandelt werden. In diesem Aufsatz wird die Methode kurz erläutert und die Behandlungsweise der Erdschlußlöscheinrichtungen, der Petersenspule oder des Löschtransformators sowie anderer Einrichtungen in bezug auf die Löschwirkung und die Kipperscheinung theoretisch erläutert. Man kann den Erdschlußlichtbogen mit irgend einer Löscheinrichtung erlöschen und wenn die Unsymmetrie klein ist, tritt keine Kipperscheinung (oder Spannungresonanz) im Betriebszustande ohne zufällige Erdung ein, da es ja immer einige Verluste im Netze gibt.

1. Grundzüge der Methode der symmetrischen Koordinaten[1]).

In dem folgenden Aufsatze nehmen wir an, daß alle Ströme und Spannungen sich sinusförmig mit derselben Frequenz ändern und wir beschränken unsere Versuche nur auf den stationären Zustand.

Man kann das beliebige unsymmetrische Drehstromsystem J_a, J_b, J_c in drei Komponenten zerlegen. Diese Komponenten hat Fortescue als Null Phasensequenzkomponente, positive Phasensequenzkomponente und negative Phasensequenzkomponente bezeichnet, wobei

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} J_{a0} = {}^1/_3 (J_a + J_b + J_c) & \text{Null Phasensequenzkomponente,} \\ J_{a1} = {}^1/_3 (J_a + a J_b + a^2 J_c) & \text{positive Phasensequenzkomponente,} \\ J_{a2} = {}^1/_3 (J_a + a^2 J_b + a J_c) & \text{negative Phasensequenzkomponente,} \\ a = -{}^1/_2 + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

In ganz gleicher Weise kann man jedes beliebige unsymmetrische Spannungssystem V_a, V_b, V_c in drei Komponenten zerlegen.

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} V_{a0} = {}^1/_3 (V_a + V_b + V_c) \\ V_{a1} = {}^1/_3 (V_a + a V_b + a^2 V_c) \\ V_{a2} = {}^1/_3 (V_a + a^2 V_b + a V_c). \end{cases}$$

Diese Tatsache ist wohlbekannt, aber die Neuheit der Methode der symmetrischen Koordinaten von C. L. Fortescue besteht darin, daß alle Gleichungen zwischen Strom und Spannung in diejenigen zwischen ihren Phasensequenzkomponenten umgewandelt werden.

In den meisten Fällen werden durch diese Umwandlung die Probleme des unsymmetrischen Drehstroms sehr einfach und dadurch wird die Lösung der schweren Aufgaben verhältnismäßig leicht und in eleganter Form durchführbar.

Die Systeme (I) und (II) werden als rein mathematische Substitutionen behandelt.

[1]) C. L. Fortescue: Transaction of American Institute of Electrical Engineers. 1918.

Die Aufgaben beim unsymmetrischen Drehstromnetz bestehen im allgemeinen darin, die Ströme J_a, J_b, J_c für gegebene Spannung V_a, V_b, V_c zu finden. Man erhält eine genügende Anzahl von Gleichungen zwischen J und V. Wenn man den Wert eines jeden J aus den Gleichungen für gegebene V bekommt, so ist die Aufgabe gelöst.

Für die Lösung der algebraischen Gleichungen oder der Differentialgleichungen benutzen wir sehr häufig verschiedene Substitutionen, um die Lösung einfacher zu gestalten. Das geschieht ebenfalls für die Lösung der Gleichungen des unsymmetrischen Drehstromnetzes. Man kann die Systeme (I) und (II) für die Lösung der Gleichungen benutzen, nachdem man für gegebene Werte von V_a, V_b, V_c, d. h. für gegebene Werte von V_{a0}, V_{a1}, V_{a2} die Werte für J_{a0}, J_{a1}, J_{a2} erhalten hat, hierauf kann man die eigenen Werte von J_a, J_b, J_c aus der folgenden Beziehung ganz leicht ableiten:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} J_a = J_{a0} + J_{a1} + J_{a2} \\ J_b = J_{a0} + a^2 J_{a1} + a J_{a2} \\ J_c = J_{a0} + a J_{a1} + a^2 J_{a2}. \end{cases}$$

Nun wenden wir diese Methode für die Lösung des einfachsten Problems an. Sind Y_a, Y_b, Y_c drei verkettete Admittanzen, deren gemeinsamer Punkt (Nullpunkt) wie in Bild 1 direkt geerdet ist; ist V_a, V_b, V_c die Klemmenspannung von a, b, c gegen Erde, und J_a, J_b, J_c der Strom, dann haben wir:

$$J_a = V_a Y_a \quad (1)$$

$$J_b = V_b Y_b \quad (2)$$

$$J_c = V_c Y_c. \quad (3)$$

Bild 1.

In diesem Falle ist die Lösung von Anfang an selbstverständlich. Wenn alle Admittanzen gleich Y sind und alle Potentiale eine symmetrische Drehstromspannung bilden, d. h.

$$V_b = a^2 V_a, \qquad V_c = a V_a,$$

dann wissen wir, daß die Ströme auch ein symmetrisches Drehstromsystem bilden, d. h.

$$J_a = V_a Y, \qquad J_b = V_b Y = a^2 V_a Y = a^2 J_a.$$

$$J_c = V_c Y = a V_a Y = a J_a.$$

Man kann die Gleichungen (1), (2), (3) mit Phasensequenzkomponenten in folgender Weise darstellen; zuerst setzen wir

(1), (2), (3) zusammen (1) + (2) + (3),

dann haben wir

$$J_a + J_b + J_c = V_a Y_a + V_b Y_b + V_c Y_c. \quad (4)$$

Ähnlich (III) erhalten wir nun folgende Beziehung:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} V_a = V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} \\ V_b = V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2} \\ V_c = V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2} \end{cases}$$

Deshalb haben wir:

$$\begin{aligned} J_a + J_b + J_c &= (V_{a0} + V_{a1} + V_{a2}) Y_a \\ &+ (V_{a0} + a^2 V_{a1} + a V_{a2}) Y_b \\ &+ (V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2}) Y_c \\ &= (Y_a + Y_b + Y_c) V_{a0} \\ &+ (Y_a + a^2 Y_b + a Y_c) V_{a1} \\ &+ (Y_a + a Y_b + a^2 Y_c) V_{a2}. \end{aligned}$$

Nun definieren wir folgendermaßen:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} Y_{a0} = {}^1/_3\,(Y_a + Y_b + Y_c) \\ Y_{a1} = {}^1/_3\,(Y_a + a\,Y_b + a^2\,Y_c) \\ Y_{a2} = {}^1/_3\,(Y_a + a^2\,Y_b + a\,Y_c) \end{cases}$$

Also haben wir:

$$J_{a0} = Y_{a0}\,V_{a0} + Y_{a2}\,V_{a1} + Y_{a1}\,V_{a2}. \tag{4}$$

In derselben Weise, durch die Zusammensetzung $(1) + a\,(2) + a^2\,(3)$ und $(1) + a^2\,(2) + a\,(3)$, erhalten wir:

$$J_{a1} = Y_{a1}\,V_{a0} + Y_{a0}\,V_{a0} + Y_{a2}\,V_{a2} \tag{5}$$

$$J_{a2} = Y_{a2}\,V_{a0} + Y_{a1}\,V_{a1} + Y_{a0}\,V_{a2} \tag{6}$$

(4), (5), (6) sind die Gleichungen der Fortescueschen Methode entsprechend (1), (2), (3). Wenn alle Admittanzen gleich Y sind, dann haben wir:

$$Y_{a0} = Y, \qquad Y_{a1} = 0, \qquad Y_{a2} = 0.$$

Ferner, wenn die Spannungen V_a, V_b, V_c ein symmetrisches Drehstromsystem bilden, dann ersehen wir sehr leicht, daß

$$V_{a0} = 0, \qquad V_{a1} = V_a, \qquad V_{a2} = 0.$$

Und in diesem Falle haben wir:

$$J_{a0} = 0 \tag{4'}$$

$$J_{a1} = Y\,V_a \tag{5'}$$

$$J_{a2} = 0 \tag{6'}$$

Dieses Ergebnis zeigt uns, daß in diesem Falle der Strom ein Drehstromsystem bildet.

Zunächst denken wir uns eine allgemeine unsymmetrische Drehstrombelastung wie sie in Bild 2 gezeichnet ist. In diesem Falle haben wir folgende Gleichungen der gewöhnlichen Methode:

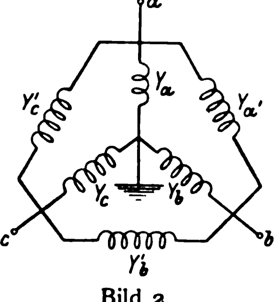


Bild 2.

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} J_a = Y_a\,V_a + Y_a'\,(V_a - V_b) - Y_c'\,(V_c - V_a) & (7) \\ J_b = Y_b\,V_b + Y_b'\,(V_b - V_c) - Y_a'\,(V_a - V_b) & (8) \\ J_c = Y_c\,V_c + Y_c'\,(V_c - V_a) - Y_b'\,(V_b - V_c) & (9) \end{cases}$$

Setzen wir (7), (8), (9) in folgender Weise zusammen:

$$(7) + (8) + (9)$$
$$(7) + a\,(8) + a^2\,(9)$$
$$(7) + a^2\,(8) + a\,(9),$$

dann erhalten wir:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} J_{a0} = Y_{a0}\,V_{a0} + Y_{a2}\,V_{a1} + Y_{a1}\,B_{a2} & (10) \\ J_{a1} = Y_{a1}\,V_{a0} + (Y_{a0} + 3\,Y_{a0}')\,V_{a1} + (Y_{a2} - 3\,a\,Y_{a2}')\,V_{a2} & (11) \\ J_{a2} = Y_{a2}\,V_{a0} + (Y_{a1} - 3\,a^2\,Y_{a1}')\,V_{a1} + (Y_{a0} + 3\,Y_{a0}')\,V_{a2} & (12) \end{cases}$$

wobei

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} Y_{a0} = {}^1/_3\,(Y_a' + Y_b' + Y_c') \\ Y_{a1} = {}^1/_3\,(Y_a' + a\,Y_b' + a^2\,Y_c') \\ Y_{a2} = {}^1/_3\,(Y_a' + a^2\,Y_b' + a\,Y_c'). \end{cases}$$

Das Gleichungssystem (VII) stellt die Beziehung zwischen Strom und Klemmenpotential in der Methode der symmetrischen Koordinaten dar, entsprechend dem gewöhnlichen Gleichungssystem (VI).

Nun stellen wir uns den Spannungsabfall in einem Drehstromgenerator vor, wenn letzterer unsymmetrisch belastet wird.

Sei E_a, E_b, E_c die induzierte EMK jeder Phase und nehmen wir an, daß der Nullpunkt direkt geerdet ist. Wenn nun jede Phase nur mit demselben Wechselstrom J_{a0} belastet wird, so entsteht im Luftspalt nur magnetischer Streufluß

und man kann den Spannungsabfall jeder Phase mit $Z_0' J_{a0}$ darstellen. Die Klemmenpotentiale V_a, V_b, V_c werden in diesem Falle wie folgt:

$$V_a = E_a - Z_0' J_{a0}$$
$$V_b = E_b - Z_0' J_{a0}$$
$$V_c = E_c - Z_0' J_{a0}.$$

Man nennt Z_0' die Null Phasensequenzimpedanz des Generators.

Wenn es beliebige Impedanz Z_e zwischen dem Nullpunkte des Generators und der Erde gibt, dann wird das Potential des Nullpunktes gegen Erde $-3 Z_e J_{a0}$, weil die Impedanz Z_e von dem Strom $3 J_{a0}$ durchflossen wird. In diesem Falle werden die Klemmenpotentiale V_a, V_b, V_c wie folgt:

$$\text{(IX)} \quad \begin{cases} V_a = E_a - Z_0 J_{a0} \\ V_b = E_b - Z_0 J_{a0} \\ V_c = E_c - Z_0 J_{a0} \end{cases}$$

wobei

$$Z_0 = 3 Z_e + Z_0'.$$

Wenn die Erdungsimpedanz Z_e nicht konstant ist, sondern sich mit der Stromstärke ändert, so kann man das Gleichungssystem in folgender Weise darstellen:

$$\text{(X)} \quad \begin{cases} V_a = E_a - F(J_{a0}) \\ V_b = E_b - F(J_{a0}) \\ V_c = E_c - F(J_{a0}). \end{cases}$$

Wenn der Generator nur mit symmetrischem Drehstrom J_{a1} (d. h. die Phase a mit J_{a1}, die Phase b mit $a^2 J_{a1}$, die Phase c mit $a J_{a1}$) belastet wird, erhalten wir die Klemmenpotentiale wie folgt (vorausgesetzt, daß es gar keine magnetische Sättigung gibt):

$$\text{(XI)} \quad \begin{cases} V_a = E_a - Z_1 J_{a1} \\ V_b = E_b - a^2 Z_1 J_{a1} \\ V_c = E_c - a Z_1 J_{a1}. \end{cases}$$

Man nennt Z_1 die positive Phasensequenzimpedanz des Generators, sie ist wohlbekannt unter dem Namen: „Synchrone Impedanz".

Wenn der Generator nur mit symmetrischem Drehstrom von entgegengesetztem Phasenumdrehungssinn J_{a2} (d. h. die Phase a mit J_{a2}, die Phase b mit $a J_{a2}$, die Phase c mit $a^2 J_{a2}$) belastet ist, dann haben wir die Klemmenpotentiale:

$$\text{(XII)} \quad \begin{cases} V_a = E_a - Z_2 J_{a2} \\ V_b = E_b - a Z_2 J_{a2} \\ V_c = E_c - a^2 Z_2 J_{a2}. \end{cases}$$

Wir wissen, daß der symmetrische Drehstrom vom entgegengesetzten Phasenumdrehungssinn J_{a2} ein rotierendes magnetisches Feld im Luftspalt hervorbringt, das in entgegengesetzter Richtung zu dem Rotor mit synchroner Geschwindigkeit bezogen auf den Stator rotiert.

Die gegenseitige Bewegung zwischen dem magnetischen Feld herrührend von J_{a2} und dem Rotor erzeugt die Wirbelströme in dem Rotor; hierdurch wird das rotierende magnetische Feld herrührend von J_{a2} stark gedämpft, besonders wenn der Rotor eine Käfigwicklung hat.

Man nennt Z_2 die negative Phasensequenzimpedanz des Generators, und wir wissen, daß Z_2 der Größe nach viel kleiner als Z_1 ist, aber ihr Leitungsfaktor ist viel größer als derjenige von Z_1.

Wenn der Generator mit J_{a0}, J_{a1}, J_{a2} belastet wird (d. i. die Phase a mit $J_{a0} + J_{a1} + J_{a2}$, die Phase b mit $J_{a0} + a^2 J_{a1} + a J_{a2}$, die Phase c mit $J_{a0} + a J_{a1} + a^2 J_{a2}$), so haben wir folgende Klemmenpotentiale:



$$(\text{XIII})\quad \begin{cases} V_a = E_a - F(J_{a0}) - Z_1 J_{a1} - Z_2 J_{a2} & (13) \\ V_b = E_b - F(J_{a0}) - a^2 Z_1 J_{a1} - a Z_2 J_{a2} & (14) \\ V_c = E_c - F(J_{a0}) - a Z_1 J_{a1} - a^2 Z_2 J_{a2}. & (15) \end{cases}$$

In den meisten Fällen ist der Generator symmetrisch gebaut, deshalb haben wir $E_b = a^2 E_a$, $E_c = a E_a$.

Wir können das Gleichungssystem mit folgender Zusammensetzung in die Schreibweise der Methode der symmetrischen Koordinaten umwandeln (für den symmetrischen Generator):

$$(13) + (14) + (15), \quad (13) + a(14) + a^2(15), \quad (13) + a^2(14) + a(15)$$

$$(\text{XIV})\quad \begin{cases} V_{a0} = -F(J_{a0}) & (16) \\ V_{a1} = E_a - Z_1 J_{a1} & (17) \\ V_{a2} = -Z_2 J_{a2}. & (18) \end{cases}$$

Wenn die Erdungsimpedanz konstant ist, haben wir

$$(\text{XIV}')\quad \begin{cases} V_{a0} = -Z_0 J_{a0} & (16') \\ V_{a1} = E_a - Z_1 J_{a1} & (17') \\ V_{a2} = -Z_2 J_{a2}. & (18') \end{cases}$$

Das Gleichungssystem (XIV) oder (XIV') gibt die Grundgleichungen für die symmetrische Drehstromquelle und diese zeigen uns nicht nur die Beziehung zwischen den einzelnen Größen, sondern auch zwischen den Phasen.

Wenn wir alle V zwischen (VI) und (XIV) eliminieren, haben wir drei Gleichungen mit drei unbekannten J_{a0}, J_{a1}, J_{a2}. Aus diesen Gleichungen können wir für gegebene unsymmetrische Belastung und symmetrische Stromquelle die Werte für J_{a0}, J_{a1}, J_{a2} erhalten.

Man kann leicht ersehen, daß (XIV) auf den Fall der Petersenspule direkt anwendbar ist.

II. Theorie des Löschtransformators.

Bild 3 sei das Schema des Löschtransformators (L.T.), dessen Klemmen mit a, b, c bezeichnet sind und deren gemeinsamer Punkt direkt geerdet ist.

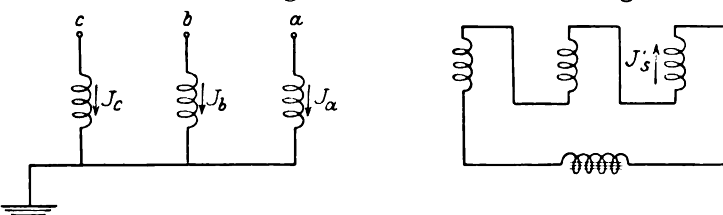


Bild 3.

Wir nehmen zuerst an, daß der L.T. vollkommen symmetrisch gebaut ist und die äußere Reaktanz beliebige magnetische Sättigung hat.

Die Klemmenpotentiale werden mit V_a, V_b und V_c bezeichnet, und ferner sei

Z_p Selbst-Impedanz der einzelnen Primärwicklung (nicht Streuimpedanz),

Z_p' gegenseitige Impedanz zwischen Primärwicklungen (d. h. entweder zwischen a und b oder b und c oder c und a),

Z_s Selbstimpedanz der Sekundärwicklung (nicht Streuimpedanz),

$f(J_s')$ Klemmenspannung der äußeren Reaktanz als eine Funktion des Sekundärstromes.

Dann haben wir mit der gewöhnlichen Methode folgende Gleichungen:

$$V_a = Z_p J_a + Z_p' (J_b + J_c) + Z_m J_s' \qquad (19)$$

$$V_b = Z_p J_b + Z_p' (J_c + J_a) + Z_m J_s' \qquad (20)$$

$$V_c = Z_p J_c + Z_p' (J_a + J_b) + Z_m J_s' \qquad (21)$$

$$Z_m (J_a + J_b + J_c) + Z_s J_s' + f(J_s') = 0. \qquad (22)$$

Durch die folgende Zusammensetzung werden die obigen Gleichungen in diejenigen der Phasensequenzkomponenten umgewandelt:

$$(19) + (20) + (21)$$
$$(19) + a\,(20) + a^2\,(21)$$
$$(19) + a^2\,(20) + a\,(21),$$

dann erhalten wir folgende Gleichungen (man erinnere sich, daß $1 + a + a^2 = 0$):

$$\text{(XV)} \quad \begin{cases} V_{a0} = (Z_p + 2 Z_p') J_{a0} + Z_m J_s' & (23) \\ V_{a1} = (Z_p - Z_p') J_{a1} & (24) \\ V_{a2} = (Z_p - Z_p') J_{a2} & (25) \\ 3 Z_m J_{a0} + Z_s J_s' + f(J_s') = 0. & (26) \end{cases}$$

(24) und (25) zeigen uns die Beziehung zwischen V_{a1} und J_{a1} oder V_{a2} und J_{a2}, und wir wissen sofort, daß $Z_p - Z_p'$ die Leerlaufimpedanz des L.T. ist. (23) und (26) zeigen uns die Abhängigkeit von V_{a0} und J_{a0} mittels eines Parameters J_s'. Es ist etwas schwierig, die Beziehung zwischen V_{a0} und J_{a0} rechnerisch zu bekommen. Ist z. B.

$$V_a = V_b = V_c = V,$$

dann ersehen wir ohne Mühe, daß

$$J_a = J_b = J_c = J.$$

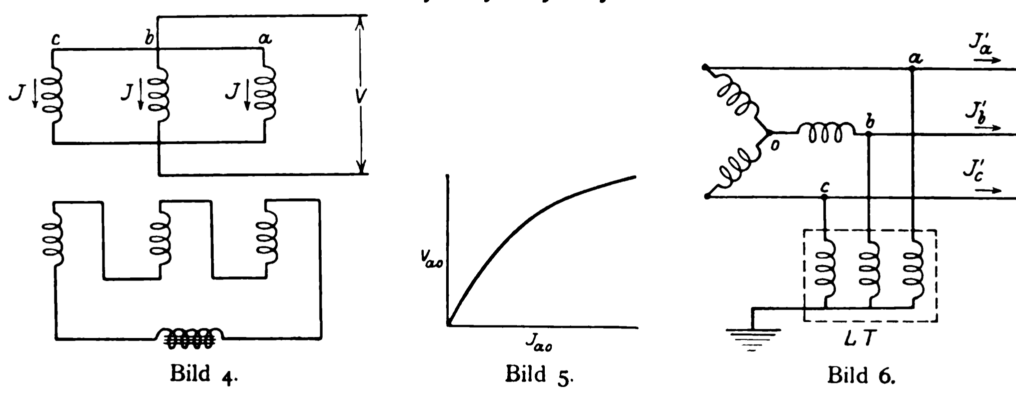


Bild 4. Bild 5. Bild 6.

Und aus der Definition der Phasensequenzkomponenten (I) und (II) erhalten wir sogleich:

$$J_{a0} = V, \qquad J_{a0} = J,$$
$$V_{a1} = 0, \qquad J_{a1} = 0,$$
$$V_{a2} = 0, \qquad J_{c2} = 0.$$

Daher werden (23) und (26):

$$V = (Z_p + 2 Z_p') J + Z_m J_s' \qquad (23')$$

$$3 Z_m J + Z_s J_s' + f(J_s') = 0. \qquad (26')$$

(23') und (26') zeigen uns die Abhängigkeit zwischen V und J, dieselbe können wir auf der Prüfung sehr leicht erkennen, ohne die Kenntnis der tatsächlichen Größe von J_s'. Und ferner sehen wir, daß die Abhängigkeit zwischen V und J, d. h. zwischen V_{a0} und J_{a0}, nach der Kurve Bild 5 verläuft. Wegen der magnetischen Sättigung der äußeren Reaktanz gibt es auch eine Sättigungscharakteristik zwischen V_{a0} und J_{a0}. Das Gleichungssystem (XV) wird wie folgt gekürzt:

$$\text{(XVI)} \quad \begin{cases} V_{a0} = F(J_{a0}) & (27) \\ V_{a1} = Z_L J_{a1} & (28) \\ V_{a2} = Z_L J_{a2}. & (29) \end{cases}$$

Zunächst denken wir uns eine Drehstromquelle, die aus einem symmetrischen, isolierten Drehstromgenerator und einem Löschtransformator, wie in Bild 6 gezeigt, besteht.

Es seien J_a', J_b', J_c' die Ströme, die aus der Klemme in die äußere Belastung geschickt werden. J_a, J_b, J_c die Ströme, die in je eine Klemme des L.T. geliefert werden.

E_a induzierte EMK in der Phase a. Wir finden sofort, daß die Phasensequenzkomponenten des Generatorstromes folgendermaßen lauten:

$J_{a0}' + J_{a0}$ Null Phasensequenzkomponente,
$J_{a1}' + J_{a1}$ positive Phasensequenzkomponente,
$J_{a2}' + J_{a2}$ negative Phasensequenzkomponente.

Weil der Nullpunkt des Generators isoliert ist, haben wir naturgemäß

$$J_{a0}' + J_{a0} = 0.$$

Ferner haben wir folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} V_{a0} &= F(J_{a0}) \\ V_{a1} &= Z_L J_{a1} \\ V_{a2} &= Z_L J_{a2} \\ V_1 &= E_a - Z_1 (J_{a1}' + J_{a1}) \\ V_{a2} &= -Z_2 (J_{a2}' + J_{a2}). \end{aligned}$$

Wenn man aus den obigen Gleichungen J_{a0}, J_{a1}, J_{a2} eliminiert, erhält man folgende Gleichungen:

$$\text{(XVII)} \quad \left\{ \begin{aligned} V_{a0} &= F(-J_{a0}') = -F(J_{a0}') && (30) \\ V_{a1} &= \frac{Z_L E_a}{Z_L + Z_1} - \frac{Z_1 Z_L}{Z_L + Z_1} J_{a1}' && (31) \\ V_{a2} &= -\frac{Z_2 Z_L}{Z_L + Z_2} J_{a2}'. && (32) \end{aligned} \right.$$

Wenn man das Gleichungssystem (XVII) mit (XIV) vergleicht, wird man finden, daß eine Drehstromquelle, die aus einem isolierten Drehstromgenerator und einem L.T. besteht, als eine allgemeine Drehstromquelle behandelt werden kann.

III. Theorie der anderen Erdschlußlöscheinrichtung.

Die Petersenspule und der L.T. sind sehr bekannt als Erdschlußlöscheinrichtung. Es gibt jedoch noch eine andere Löscheinrichtung, die in Bild 7 gezeichnet ist. — An jeder Klemme der Drehstromquelle befindet sich je ein Transformator; alle Sekundärwicklungen sind hier parallel mit einer äußeren Reaktanz verbunden. Der Nullpunkt der Drehstromquelle ist direkt geerdet. Anstatt drei Transformatoren für diesen Zweck zu benutzen, können wir nur einen symmetrischen Drehstromtransformator anwenden. Wir benutzen dieselben Bezeichnungen Z_p, Z_p' wie in Kapitel II und sind ferner:

Bild 7.

J_a, J_b, J_c Ströme in der Primärwicklung,
J_a', J_b', J_c' Ströme in der Sekundärwicklung,
Z_m gegenseitige Impedanz zwischen J_a und J_a' usw.,
Z_m' gegenseitige Impedanz zwischen J_a und J_b' oder J_c', usw.,
Z_s Selbstimpedanz der Sekundärwicklung,
Z_s' gegenseitige Impedanz zwischen J_a' und J_b', usw.,

so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$V_a' - V_a = Z_p J_a + Z_p' (J_b + J_c) + Z_m J_a' + Z_m' (J_b' + J_c') \quad (33)$$
$$V_b' - V_b = Z_p J_b + Z_p' (J_c + J_a) + Z_m J_b' + Z_m' (J_c' + J_a') \quad (34)$$
$$V_c' - V_c = Z_p J_c + Z_p' (J_a + J_b) + Z_m J_c' + Z_m' (J_a' + J_b') \quad (35)$$

$$f (J_a' + J_b' + J_c') = Z_s J_a' + Z_s' (J_b' + J_c') + Z_m J_a + Z_m' (J_b + J_c) \quad (36)$$
$$f (J_a' + J_b' + J_c') = Z_s J_b' + Z_s' (J_c' + J_a') + Z_m J_b + Z_m' (J_c + J_a) \quad (37)$$
$$f (J_a' + J_b' + J_c') = Z_s J_c' + Z_s' (J_a' + J_b') + Z_m J_c + Z_m' (J_a + J_b). \quad (38)$$

Wir setzen die obigen Gleichungen in folgender Weise zusammen:

$(33) + (34) + (35)$, $(33) + a (34) + a^2 (35)$,

$(33) + a^2 (34) + a (35)$, $(36) + (37) + (38)$,

$(36) + a (37) + a^2 (38)$, $(36) + a^2 (37) + a (38)$.

Dann erhalten wir:

$$V'_{a0} - V_{a0} = (Z_p + 2 Z_p') J_{a0} + (Z_m + 2 Z_m') J_{a0}' \quad (39)$$
$$V'_{a1} - V_{a1} = (Z_p - Z_p') J_{a1} + (Z_m - Z_m') J_{a1}' \quad (40)$$
$$V'_{a2} - V_{a2} = (Z_p - Z_p') J_{a2} + (Z_m - Z_m') J_{a2}' \quad (41)$$
$$f (3 J_{a0}') = (Z_s + 2 Z_s') J_{a0}' + (Z_m + 2 Z_m') J_{a0} \quad (42)$$
$$0 = (Z_s - Z_s') J_{a1}' + (Z_m - Z_m') J_{a1} \quad (43)$$
$$0 = (Z_s - Z_s') J_{a2}' + (Z_m - Z_m') J_{a2} \quad (44)$$

Wir können J_{a1}' und J_{a2}' sehr leicht eliminieren, also

$$V_{a1}' - V_{a1} = \left\{ Z_p - Z_p' - \frac{(Z_m - Z_m')^2}{Z_s - Z_s'} \right\} J_{a1}$$
$$= Z_K J_{a1} \quad (45)$$
$$V_{a2}' - V_{a2} = Z_K J_{a2} \quad (46)$$

wobei

$$Z_K = Z_p - Z_p' - \frac{(Z_m - Z_m')^2}{Z_s - Z_s'}.$$

Dies ist die Kurzschlußimpedanz des Transformators. Weiter haben wir:

$$V_{a0}' = - Z_0' J_{a0}$$
$$V_{a1}' = E_a - J_1 J_{a1}$$
$$V_{a2}' = - Z_2 J_{a2}.$$

Hieraus folgt:

$$\text{(XVIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} V_{a0} &= - (Z_0' + Z_p + 2 Z_p') J_{a0} - (Z_m + 2 Z_m') J_{a0}' && (47) \\ V_{a1} &= E_a - (Z_1 + Z_K) J_{a1} && (48) \\ V_{a2} &= - (Z_2 + Z_K) J_{a2} && (49) \\ f(3 J_{a0}') &= (Z_s + 2 Z_s') J_{a0}' + (Z_m + 2 Z_m') J_{a0}. && (50) \end{aligned} \right.$$

(47) und (50) zeigen uns die Abhängigkeit zwischen V_{a0} und J_{a0} mittels eines Parameters J_{a0}'. Es ist praktisch unmöglich, diese Abhängigkeit rechnerisch zu bekommen.

Man setzt den Generator ohne Erregung in Betrieb. Mit fremden Stromquellen kann man, wie in Bild 8 gezeichnet ist, die Abhängigkeit zwischen J und V, d. h. zwischen J_{a0} und V_{a0} durch einfache Prüfung bekommen. Hierbei haben wir folgende Gleichungen:

$$\text{(XIX)} \quad \left\{ \begin{aligned} V_{a0} &= - F (J_{a0}) \\ V_{a1} &= E_a - (Z_1 + Z_K) J_{a1} \\ V_{a2} &= - (Z_2 + Z_K) J_{a2}. \end{aligned} \right.$$

Aus (XIX) kann man sehr leicht ersehen, daß eine Stromquelle, die aus einem Generator, dessen Nullpunkt direkt geerdet ist, und einer Einrichtung, wie oben erwähnt, besteht, wieder als allgemeine Drehstromquelle behandelt werden kann.

Die Löschwirkung dieser Einrichtung bei zuverlässiger Erdung einer Leitung wird im nächsten Kapitel erläutert.

IV. Die Löschwirkung der Erdschlußlöscheinrichtung.

Die Bedingung für das Erlöschen des Erdschlußlichtbogens mit den verschiedenen Erdschlußlöscheinrichtungen wird in folgender Weise erhalten. Nehmen wir an, daß die Drehstrombelastung ganz symmetrisch ist und die Phase c geerdet wird. Wir bezeichnen den Lichtbogenstrom mit $3 J_e$ (s. Bild 9). Weil die Belastung symmetrisch ist, haben wir in (VII):

$$Y_{a0} = Y, \qquad Y_{a1} = 0, \qquad Y_{a2} = 0,$$

$$Y_{a0}' = Y', \qquad Y_{a1}' = 0. \qquad Y_{a2}' = 0.$$

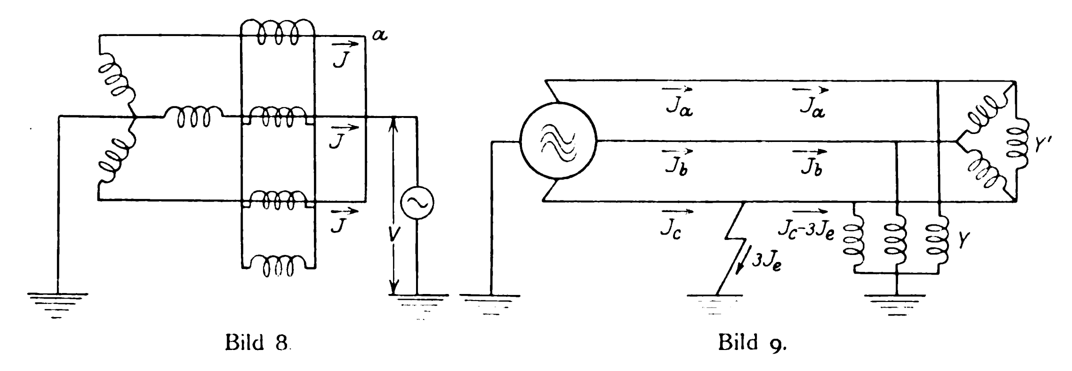


Bild 8. Bild 9.

Die Phasensequenzkomponenten von J_a, J_b, $J_c - 3 J_e$ sind $J_{a0} - J_e$, $J_{a1} - a^2 J_e$, $J_{a2} - a J_e$, daher erhalten wir aus (VII):

$$\text{(XX)} \quad \begin{cases} J_{a0} - \quad J_e = Y V_{a0} & (51) \\ J_{a1} - a^2 J_e = (Y + 3 Y') V_{a1} & (52) \\ J_{a2} - \; a J_e = (Y + 3 Y') V_{a2}. & (53) \end{cases}$$

Gleichzeitig haben wir (XIV), d. h.:

$$\text{(XIV)} \quad \begin{cases} V_{a0} = - F (J_{a0}) & (16) \\ V_{a1} = E_a - Z_1 J_{a1} & (17) \\ V_{a2} = - Z_2 J_{a2}. & (18) \end{cases}$$

Ferner haben wir noch eine Bedingung, daß $V_c = V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2} = 0$, weil die Phase c geerdet ist.

$$V_{a0} + a V_{a1} + a^2 V_{a2} = 0. \qquad (54)$$

Man schreibe (51) wie folgt:

$$J_e = J_{a0} + Y V_{a0}.$$

Wenn es eine eisenhaltige Induktivität L gibt (Bild 10), deren Volt-Ampere charakteristisch wie in Bild 5 gezeichnet verläuft, so haben wir zwischen J_{a0} und V_{a0} folgende Beziehung:

$$V_{a0} = F (J_{a0}). \qquad (27)$$

Wenn wir die positive Richtung des Stromes aus Erde an a bestimmen, dann gilt die Beziehung (16).

(27) zeigt uns, daß, wenn eine Spannung V_{a0} an die Klemmen der Induktivität gelegt wird, ein Strom J_{a0} entsteht. Ferner, wenn es eine Admittanz Y wie in

Bild 10 gibt, wird der gesamte Strom, der von dem Generator geliefert wird, gleich $J_{a0} + Y V_{a0}$, d. h. $= J_e$.

Wenn Y rein kapazitiv und L rein induktiv sind, ist es möglich, J_e verschwinden zu lassen.

L muß für die Spannung V_{a0} mit Y abgestimmt sein, dann wird die Größe von V_{a0} in folgender Weise berechnet: Wenn J_e gleich Null ist, folgt aus (52) und (17):

$$V_{a1} = \frac{E_a}{1 + Z_1'(Y + 3Y')}. \tag{55}$$

Aus (53) und (18) haben wir:

$$V_{a2} = 0, \qquad J_{a2} = 0; \tag{56}$$

aus (54) und (55):

$$V_{a0} = -\frac{a E_a}{1 + Z_1 (Y + 3Y')}. \tag{57}$$

(56) ist sehr merkwürdig, es zeigt uns, daß, wenn die Erdschlußlöscheinrichtung so bemessen ist, daß der Lichtbogenstrom vollkommen ausgelöscht werden kann, es dann keine negative Phasensequenzkomponente gibt. Es ist also keine Gefahr, die Käfigwicklung des Rotors zu überheizen.

Den genauen Wert von J_e, wenn es einige Verluste in dem Netz gibt, kann man graphisch erhalten, wie von dem Verfasser erwähnt worden ist. (S. Bekku: „Researches of the Electro-technical Laboratory", Nr. 129. Tokyo, Japan.)

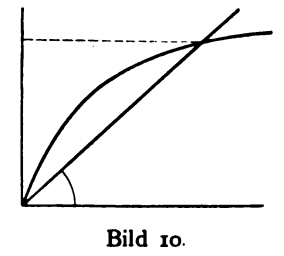


Bild 10.

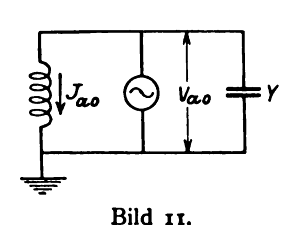


Bild 11.

Wenn die Null Phasensequenzimpedanz der Stromquelle konstant ist, wird der allgemeine Beweis ganz einfach. Dann benutzen wir (16′) anstatt (16). Aus (51) und (16′) erhalten wir

$$J_{a0}(1 + Z_0 Y) = J_e. \tag{58}$$

Das zeigt uns, daß man den Erdungslichtbogen unter folgender Löschbedingung vollkommen auslöschen kann:

$$1 + Z_0 Y = 0. \tag{59}$$

Diese Löschbedingung ist ganz unabhängig von der symmetrischen Belastung Y′, d. h. frei von jeder gewöhnlichen Belastung. Wenn Y von der Kapazität C herrührt, ist $Y = j\omega c$, wobei ω die Kreisfrequenz ist. Wenn die Erdungsspule die Induktivität L hat und die Impedanz des Generators vernachlässigt wird, haben wir aus (IX)

$$Z_0 = 3 Z_e + Z_0'$$
$$\doteq 3 j \omega L.$$

Dann wird (59) wie folgt:

$$3\,\omega\,2\,C L = 1. \tag{60}$$

(60) ist die Löschbedingung, wie sie zuerst von Petersen angegeben worden ist.

V. Die Spannungsresonanz verursacht durch Unsymmetrie der Belastung.

Die Spannungsresonanz, die durch die Erdschlußlöscheinrichtung (die Petersen-spule und den L.T.), sowie die unsymmetrische kapazitive Belastung verursacht wird, ist schon mehrmals erörtert worden. Der Verfasser glaubt, daß die bisherigen Erörterungen etwas mangelhaft sind. Wenn man jedoch die Methode der symmetrischen Koordinaten benutzt, wird die Behandlung sehr einfach und doch mathematisch streng.

Einfachheitshalber vernachlässigen wir die positive und negative Phasensequenzimpedanz der Stromquelle, dann haben wir:

$$\text{(XIV)} \quad \begin{cases} V_{a0} = -F(J_{a0}) \\ V_{a1} = E_a \\ V_{a2} = 0. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in (VII) ein, dann erhalten wir:

$$J_{a0} = Y_{a0} V_{a0} + Y_{a2} E_a \tag{61}$$

$$J_{a1} = Y_{a1} V_{a0} + (Y_{a0} + 3 Y_{a0}') E_a \tag{62}$$

$$J_{a2} = Y_{a2} V_{a0} + (Y_{a1} - 3 a^2 Y_{a1}') V_{a1}. \tag{63}$$

Aus (61) haben wir:

$$\frac{Y_{a2}}{Y_{a0}} E_a = \frac{J_{a0}}{Y_{a0}} + V_{a0}. \tag{64}$$

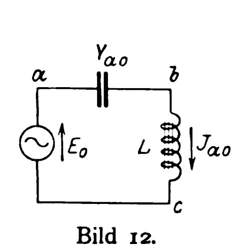


Bild 12.

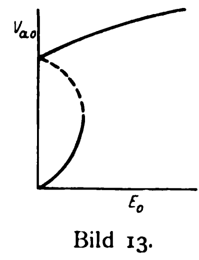


Bild 13.

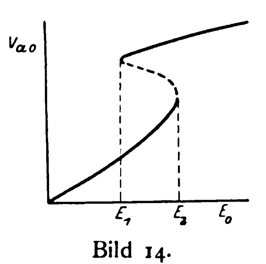


Bild 14.

Y_{a0} und Y_{a2} haben die Dimension der Admittanz, deshalb ist Y_{a2}/Y_{a0} eine komplexe Zahl, die man leicht berechnen kann. Damit ist

$$\frac{Y_{a2}}{Y_{a0}} E_a$$

eine EMK. Sei

$$\frac{Y_{a2}}{Y_{a0}} E_a = E_0,$$

dann wird (64):

$$E_0 = \frac{J_{a0}}{Y_{a0}} + V_{a0}. \tag{65}$$

Denken wir nun einen einfachen Resonanzkreis, wie in Bild 12 dargestellt, worin eine Admittanz Y_{a0} hintereinander mit einer eisenhaltigen Induktivität L, deren Charakteristik in Bild 5 gezeigt worden ist, an die Klemmen einer Wechselstromquelle mit konstanter EMK geschaltet ist. Die Gleichung in diesem Falle ist wie folgt:

$$E_0 = \frac{J_{a0}}{Y_{a0}} + (V_b - V_c). \tag{66}$$

Weil L die Charakteristik von Bild 5 hat, wenn es in dem Stromkreise einen Strom J_{a0} gibt, wird $V_b - V_c$ gleich V_{a0} sein.

Der Resonanzstromkreis, wie in Bild 12, ist von mehreren Autoren schon verschiedentlich behandelt worden. Wenn es gar keine Verluste in dem ganzen Stromkreise gibt, wird die Abhängigkeit zwischen der Größe von E_0 und V_{a0} wie in Bild 13 verlaufen.

Wenn E_0 kleiner als ein bestimmter Wert ist, gibt es drei Werte von V_{a0}, entsprechend dem einzelnen Werte von E_0. Zwei dieser Werte ergeben stabiles Gleichgewicht, der dritte dagegen ein labiles, das jedoch praktisch nie eintreten wird.

Wenn es einige Verluste im Stromkreise gibt, dann ändert sich die Abhängigkeit zwischen V_{a0} und E_0 wie in Bild 14. Ist E_0 kleiner als ein bestimmter Wert E_1, so gibt es nur einen Wert von V_{a0} entsprechend dem gegebenen Werte von E_0. In solchem Falle finden wir, daß es keine Spannungsresonanz gibt. Wenn E_0 zwischen E_1 und E_2 liegt, wie in Bild 14, dann gibt es drei Werte von V_{a0}, entsprechend dem einzelnen Werte von E_0, zwei von denen geben stabiles Gleichgewicht und der dritte ein labiles. In solchem Falle sehen wir, daß Spannungsresonanz möglich ist.

Wenn man (64) mit (66) vergleicht, kann man ganz leicht ersehen, daß V_{a0} in dem Drehstromnetze in ganz gleicher Weise von E_0 abhängt, wie die Klemmenspannung der Induktivität in dem Resonanzstromkreise. Aus dieser Überlegung können wir ersehen, daß, wenn es gar keine Verluste in dem ganzen Stromkreise gibt, eine Spannungsresonanz möglicherweise durch die Unsymmetrie der kapazitiven Belastung eintritt. In ähnlicher Weise finden wir, daß, wenn es Verluste in dem Stromkreise gibt und wenn ferner die Unsymmetrie klein genug ist, es keine Gefahr einer Spannungsresonanz gibt.

Das Verhalten der verschiedenen Erdschlußlöscheinrichtungen gegen die Spannungsresonanz ist, nach der Ansicht des Verfassers, ganz gleich. Wenn die Betriebserfahrungen mit einer Art von Erdschlußlöscheinrichtungen, die eine Sättigungscharakteristik hat, uns zeigen, daß es keine Störungen durch die Spannungsresonanz gegeben hat, so müssen wir diese Ursache der Anwesenheit von Verlusten und der Kleinheit der Unsymmetrie zuschreiben.

VI. Allgemeine Bemerkung.

Wie in den vorherigen Kapiteln erläutert worden ist, spielt bei der theoretischen Behandlung der Löschwirkung oder der Kipperscheinung nur die Null Phasensequenzimpedanz der Stromquelle eine wichtige Rolle, und die Kenntnis über die Einzelheiten der Einrichtung ist nicht nötig.

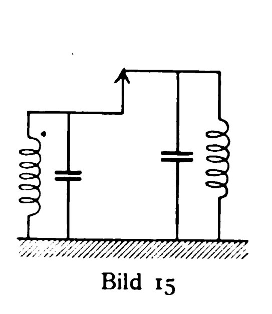


Bild 15

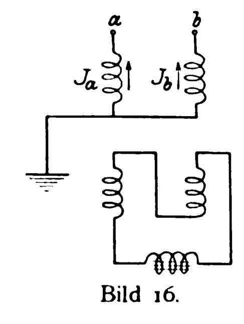


Bild 16.

In der bisherigen Behandlung haben wir uns nur auf den stationären Zustand beschränkt. Die freien Schwingungen, erzeugt durch verschiedene Erdschlußlöscheinrichtungen, sind etwas verschieden voneinander, aber, wenn die Null Phasensequenzimpedanz der Stromquelle mit der kapazitiven Null Phasensequenzadmittanz der Belastung in der Betriebsfrequenz abgestimmt ist, wie in (59), dann gibt es in jedem Falle neben anderen eine Schwingung, deren Frequenz der Betriebsfrequenz gleich ist.

Die Methode der symmetrischen Koordinaten ist auch für die Versuche der Ausgleichsvorgänge in dem Stromkreise, die die Erdschlußlöscheinrichtung hat, anwendbar, aber in diesem Falle sind Admittanzen und Impedanzen nicht mehr komplexe Zahlen, sondern Funktionen des differentialen Operators p $\left(p = \frac{d}{dt}\right)$.

Mit dieser Methode hat der Verfasser bewiesen (s. Bekku: „Researches of the Electrotechnical Laboratory", Nr. 129. Tokyo, Japan), daß es theoretisch möglich ist, mit passenden Erdschlußlöscheinrichtungen den Erdschlußlichtbogen auf irgend einem Punkte der symmetrischen Drehstromleitung beliebiger Länge, deren Kapazität und Induktivität gleichmäßig auf die Leitungslänge verteilt sind, zu erlöschen.

Prof. Noether hat seine theoretischen Versuche ausführlich beschrieben[1]) und er ist zu dem Ergebnis gekommen, daß es keine stabile Spannungsresonanz für den Löschtransformator gibt.

Leider kann der Verfasser seinem Ergebnis nicht beistimmen. Prof. Noether hat das Ersatzschema wie Bild 15 gebraucht, aber dieser Stromkreis ist keineswegs gleichwertig zu demselben für den L.T. In jedem Falle muß man, wenn man ein Ersatzschema brauchen will, zuerst beweisen, daß das Ersatzschema dem tatsächlichen Stromkreis gleichwertig ist.

Zwei Stromkreise sind nur dann gleichwertig, wenn die Gleichungen der EMK für die beiden ganz gleich sind.

Im Falle des einphasigen L.T. wie in Bild 16, gibt es, wenn die Ströme in den beiden Schenkeln in der Größe und Phase genau gleich sind, einen induzierten Strom in der Sekundärwicklung. Die wirksame Impedanz jedes Schenkels ist nicht allzugroß.

Dagegen gibt es, wenn die Ströme in den beiden Schenkeln gleich, in der Größe aber entgegengesetzt sind, keinen Strom in der Sekundärwicklung und die wirksame Impedanz ist sehr groß, es ist dies die Leerlaufimpedanz des Transformators.

Wenn die Ströme eine beliebige Größe und Phase haben, müssen wir sie vektoriell in zwei Komponenten zerlegen, $J_{a0} = \frac{1}{2}(J_a + J_b)$, und $J_{a1} = \frac{1}{2}(J_a - J_b)$. Die wirksame Impedanz jedes Schenkels ist sehr groß für J_{a1}, aber nicht so groß für J_{a0}. Es ist klar, daß es unmöglich ist, die wirksame Impedanz des L.T. mit bestimmter Impedanz darzustellen, wenn die Ströme beliebige Größe und Phase haben.

[1]) ETZ Heft 51/1921 und 12/1922.

Die elektrische Bremsung eines Reihenschlußgenerators.

Von

L. Fleischmann.

Bei elektrischen Bahnen macht man vielfach von der elektrischen Kurzschlußbremsung Gebrauch; bei solchen Bahnen, die mit Gleichstromreihenschlußmotoren ausgerüstet sind, gestaltet sich der Vorgang besonders einfach. Um von der Motorschaltung in die Generatorbremsschaltung überzugehen, schaltet man den Motor vom Netz ab, kehrt durch Änderung der Verbindung die Stromrichtung entweder im Anker oder im Feld um und schließt den Kreis auf einen Widerstand. Der Reihenschlußgenerator erregt sich dann selbst und setzt die lebendige Kraft der Massen in elektrische Energie um, wobei die Geschwindigkeit ständig abnimmt. Um die Berechnung des Vorganges zu ermöglichen, müssen wir einige Voraussetzungen machen. Wir vernachlässigen die Reibungsarbeit gegenüber den Jouleschen Verlusten und weiterhin ersetzen wir die Magnetisierungskurve des Generators durch eine Gleichung zwischen Strom und Fluß von der Form $J = \alpha \Phi + \beta \Phi^3$, wobei J die Stromstärke in Ampere, Φ den Fluß eines Poles bedeutet und α, β Konstante sind. Es bezeichne ferner

m das Trägheitsmoment in kgm^2,
n die Tourenzahl in der Minute,
N die Windungszahl des Feldes,
R den Widerstand des Generators in Ohm,
z die Gesamtzahl der Ankerleiter,
p die Polpaarzahl,
2a die Stromkreiszahl des Ankers,
t die Zeit in Sekunden.

Das Drehmoment des Ankers ist dann in mkg

$$\frac{p}{a} \frac{z \times 10^{-8}}{2\pi 9{,}81} \cdot \Phi J = K \Phi J$$

für die vom Anker erzeugte EMK haben wir $E = \frac{p z}{a 60} \cdot 10^{-8} \Phi n$.

Wenn es sich darum handelt, bei einem Fahrzeug die Vorgänge zu berechnen, treten an Stelle des Trägheitsmoments oder neben das Trägheitsmoment, falls die lebendige Kraft der rotierenden Massen gegenüber den übrigen nicht vernachlässigt werden, ein Ausdruck von der Form $\frac{W}{9{,}81} \frac{(\pi) R^2}{ü^2 \cdot 30}$, worin W das Gewicht in kg, R den Laufradhalbmesser und ü das Übersetzungsverhältnis zwischen Umdrehungszahl des Motors und Laufraddrehzahl bedeutet; ü ist im allgemeinen größer als 1.

Nach diesen Festlegungen können wir dazu übergehen, die Differentialgleichungen für den Vorgang der Bremsung aufzustellen. Von der Umdrehungszahl wissen wir, daß diese nur abnehmen kann, infolgedessen muß $\frac{dn}{dt}$ stets negativ sein und wir erhalten

$$-m \frac{dn}{dt} = K \Phi J. \tag{1}$$

Für den Anstieg des Stromes mit der Zeit haben wir die Bedingung, daß die durch den Anstieg des Flusses in den Feldwindungen induzierte EMK und der Ohmsche Abfall, der vom Anker induzierten EMK, das Gleichgewicht halten. (Wir sehen von der durch die Ankerrückwirkung bedingten Selbstinduktionswirkung ab; wo ihre Berücksichtigung nötig erscheint, kann man einen entsprechenden Zuschlag zu der Windungszahl des Feldes nehmen.) Wir erhalten die Gleichung



$$N \frac{d\Phi}{dt} 10^{-8} + J R = \frac{p z 10^{-8}}{a 60} \Phi n. \tag{2}$$

Wir könnten nun in den Gleichungen (1) und (2) aus der Gleichung $J = \alpha \Phi + \beta \Phi^3$ (3) J ersetzen und erhielten dann zwei simultane Differentialgleichungen zwischen Φ, n, t, deren Lösung erhebliche Schwierigkeiten bieten dürfte, wenn sie nicht in geschlossener Form überhaupt unlösbar ist.

Wir werden deswegen einen anderen Weg einschlagen. Wir dividieren Gleichung (2) durch Gleichung (1), es ergibt sich

$$-\frac{N x 10^{-8}}{m} \frac{d\Phi}{dn} = \frac{\frac{p z}{a 60} 10^{-8} \Phi n - J R}{K \Phi J}. \tag{4}$$

Nach einigen Umformungen und Zusammenfassung der Konstanten nimmt die Gleichung (4) schließlich folgende Form an:

$$\Phi d \Phi = - A \frac{\Phi}{J} n d n + B d n \tag{5}$$

unter Berücksichtigung von Gleichung (3) ist $\frac{\Phi}{J} = \frac{1}{\alpha + \beta \Phi^2}$. Ersetzt man dieses wiederum durch $\frac{1}{z}$, so wird $2 \beta \Phi d \Phi = d z$ und durch Substitution in Gleichung (5) geht diese über in $\frac{dz}{dn} = 2 A \beta \frac{n}{z} + 2 B \beta$. Setzt man

$$2 A \beta = C,$$
$$2 B \beta = D,$$

so handelt es sich um Integration der Gleichung $\frac{dz}{dn} = - C \frac{n}{z} + D$. Durch die Einsetzung von $z = v n$ erhält man schließlich $\frac{v d v}{v^2 - D v + C} = - \frac{dn}{n}$ und das Integral dieser Gleichung lautet $\frac{1}{2} \ln (v^2 - D v + C) + \frac{D}{2} \int \frac{v d}{v^2 - D v + C} = - \ln n + k$. Das Integral $\int \frac{v d}{v^2 - D v + C}$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen, je nachdem $C - \frac{D^2}{4} \gtrless 0$ ist. Im ersten Fall ist die Lösung $\frac{1}{\sqrt{C - \frac{D^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{-\frac{D}{2} + V}{\sqrt{C - \frac{D^2}{4}}} + k.$

Im zweiten Falle ist die Lösung $\frac{1}{2\sqrt{\frac{D^2}{4} - C}} \ln \frac{\sqrt{\frac{D^2}{4} - C} + \frac{D}{2} - v}{\sqrt{\frac{D^2}{4} - C} - \frac{D}{2} + V} + k.$

Zur Bestimmung der Konstanten muß man in folgender Weise vorgehen: Die Werte von v hängen mit Φ und n durch die Gleichung $v = \frac{\alpha + \beta \Phi^2}{n}$ zusammen.

Durch unseren Ansatz für die Magnetisierungskurvengleichung $J = \alpha \Phi + \beta \Phi^3$ haben wir uns insofern, abgesehen von der Abweichung der numerischen Werte, von den gegebenen Verhältnissen entfernt, als der Fluß mit dem Strom gleichzeitig verschwinden muß. Unter diesen Umständen könnte aber niemals Selbsterregung eintreten, denn sicherlich herrscht bei Beginn der Bremsperiode der Strom 0. Wir umgehen diese Schwierigkeit dadurch, daß wir einfach festsetzen, daß zur Zeit $t = 0$ bei der Umdrehungszahl n_0 der Fluß Φ_0 entsprechend dem Remanenzwert vorhanden



sein soll. Das hat allerdings den Fehler im Gefolge, daß gleich beim Einsetzen der Bremsung ein Verzögerungsmoment vorhanden ist; aber der Fehler ist gegenüber den sehr bald auftretenden außerordentlich großen Strömen vernachlässigbar klein. Durch diese Festlegung berechnet sich die Integrationskonstante aus den Bedingungen $v_0 = \frac{\alpha + \beta \Phi_0^2}{n_0}$ und Einsetzung der Werte von v_0 und n_0 in die Gleichung

$$\frac{1}{2} \ln (v^2 - D v + C) + \frac{D}{4\sqrt{\frac{D^2}{4} - C}} \ln \frac{\sqrt{\frac{D^2}{4} - C} + \frac{D}{2} - v}{\sqrt{\frac{D^2}{4} - C} - \frac{D}{2} + v} = -\ln n + k.$$

Wir haben nur die zweite Lösung berücksichtigt, weil diese voraussichtlich die allein vorkommende ist. Setzen wir $\sqrt{D^2 - 4C} = r$; $\frac{-D}{2r} = p$; $\frac{r + D - 2v}{r - D + 2v} = s$; $\frac{r + D - 2v_0}{r - D + 2v_0} = t$, so wird schließlich $n = n_0 \frac{\sqrt{v_0^2 - D v_0 + C}}{\sqrt{v^2 - D v + C}} \left(\frac{t}{s}\right)^p$.

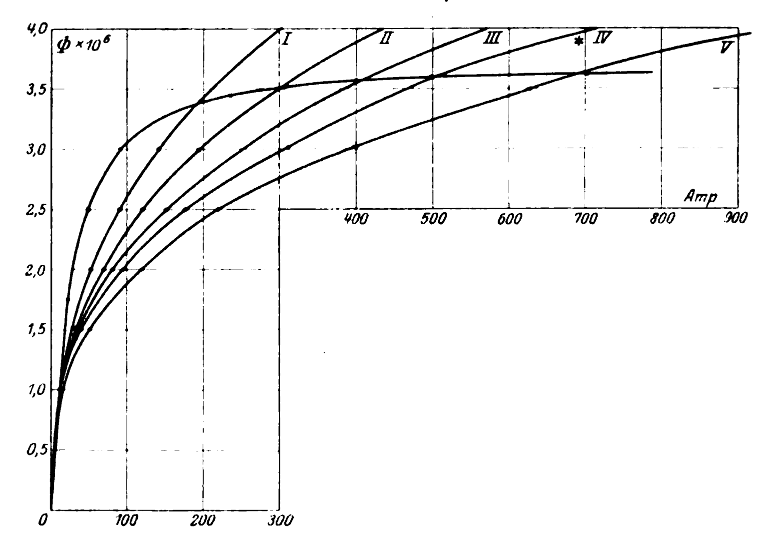


Bild 1. $J = \alpha \Phi + \beta \Phi^3$.

I [1]) $J = 10$ Amp, $\Phi = 0{,}8 \cdot 10^6$; [2]) $J = 200$ Amp., $\Phi = 3{,}42 \cdot 10^6$ } $\alpha = 4{,}15 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 9{,}85 \cdot 10^{-18}$,

II [1]) $J = 10$ Amp., $\Phi = 0{,}8 \cdot 10^6$; [2]) $J = 300$ Amp., $\Phi = 3{,}5 \cdot 10^6$ } $\alpha = 8{,}4 \cdot 10^{-}$, $\beta = 6{,}3 \cdot 10^{-18}$,

III [1]) $J = 10$ Amp., $\Phi = 0{,}8 \cdot 10^6$; [2]) $J = 400$ Amp., $\Phi = 3{,}55 \cdot 10^6$ } $\alpha = 7{,}1 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 8{,}4 \cdot 10^{-18}$,

*IV [1]) $J = 10$ Amp., $\Phi = 0{,}8 \cdot 10^6$; [2]) $J = 500$ Amp., $\Phi = 3{,}6 \cdot 10^6$ } $\alpha = 6 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 10{,}25 \cdot 10^{-18}$,

V [2]) $J = 10$ Amp., $\Phi = 0{,}8 \cdot 10^6$; [2]) $J = 700$ Amp, $\Phi = 3{,}62 \cdot 10^6$ } $\alpha = 3{,}2 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 14{,}6 \cdot 10^{-18}$.

Diese Gleichung gestattet, n in Abhängigkeit von v zu bestimmen. Setzt man die zusammengehörigen Werte von v und n in die Gleichung (8), so erhält man dadurch den Zusammenhang vom Fluß Φ und dem Strom J mit der Umdrehungszahl n. Weiter läßt sich dann mittels einer numerischen oder graphischen Integration der zu dem Strom und der Umdrehungszahl gehörige Zeitwert bestimmen. Falls man sehr genaue Resultate erhalten will, darf man nicht die Magnetisierungskurve in ihrem ganzen Verlauf durch die Gleichung $J = \alpha \Phi + \beta \Phi^3$ ersetzen, sondern man muß dieses abschnittsweise tun, dann nehmen in den verschiedenen Bereichen α und β verschiedene Werte an. Man muß dann selbstverständlich auch die Größen

C und D verändern, und ebenso nimmt v_0 an den Übergangsstellen von einer Magnetisierungskurvengleichung zur anderen verschiedene Werte an.

Die Berechnung wurde für folgende Verhältnisse durchgeführt: Zu beschleunigende Masse pro Motor $\frac{W}{g} = 6000$ kg, Radhalbmesser $R = 0{,}4$ m, Übersetzungsverhältnis $ü = 5{,}32$, Leiterzahl $z = 930$, Windungszahl des Feldes $N = 336$, Widerstand $R = 0{,}557$ Ohm.

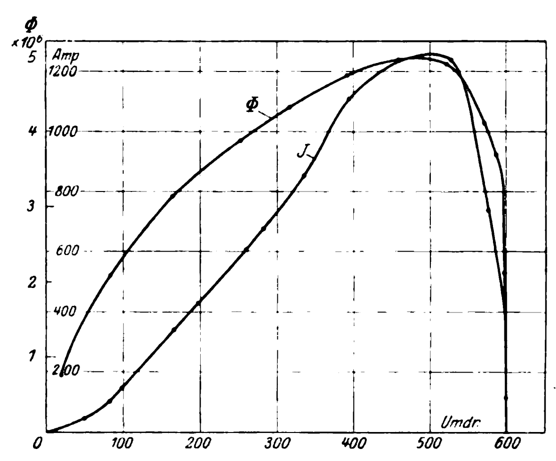


Bild 2. Fluß und Strom in Abhängigkeit von Umdrehung in der Minute.

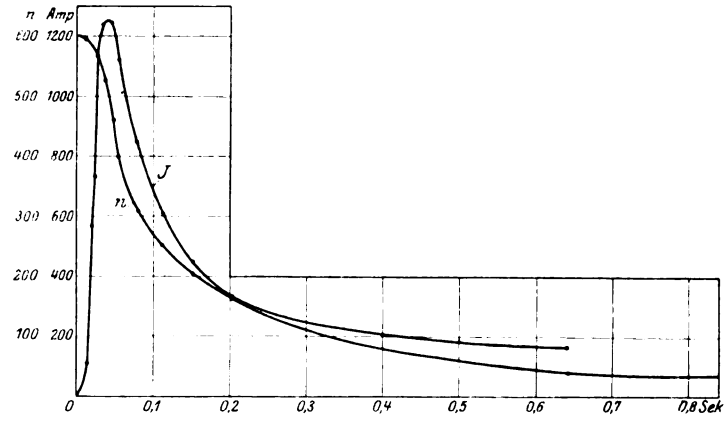


Bild 3. Strom und Umdrehung in der Minute in Abhängigkeit von der Zeit.

Dies ergibt die folgenden Gleichungen

$$-\frac{dn}{dt} = 0{,}8 \times 10^{-6}\,\Phi\,J.$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0{,}09\,\Phi\,n - 1{,}66 \times 10^{5}\,J.$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = -\frac{-0{,}09\,\Phi\,n + 1{,}66 \times 10^{5}\,J}{0{,}8 \times 10^{-6}\,\Phi\,J}.$$

Die Gleichung für die Magnetisierungskurve lautet

$$J = 6 \cdot 10^{-6}\,\Phi + 10{,}25 \cdot 10^{-18}\,\Phi^3.$$

Es ist aus Bild 1 die mit IV bezeichnete Kurve.

Die mittels dieser Konstanten berechneten Werte von Φ und n zeigt Bild 2, und Bild 3 gibt den Strom und die Tourenzahl in Abhängigkeit von der Zeit an.

Wechselstromkompensationsmessungen mit Lufttransformatoren.

Von

Wilhelm Geyger, Frankfurt a. M.

Eisenfreie Transformatoren (Lufttransformatoren) können bei Wechselstrom-Kompensationsmessungen zur Darstellung eines Phasenwinkels von 90° benutzt werden, wenn es sich darum handelt, eine zur Kompensation dienende Spannung zu erzeugen, welche gegen einen in der Meßanordnung wirksamen Strom um 90° in der Phase verschoben ist. Der Lufttransformator wird derart angeordnet, daß die primäre Spule von diesem Strome durchflossen wird, während die sekundäre Spule mit dem Nullinstrument in Reihe geschaltet ist. Bei Stromlosigkeit des Nullinstrumentes wirkt an den Klemmen der Sekundärspule eine EMK, die zu dem in der Primärspule fließenden Strome senkrecht steht und deren Größe dem Strom und der Kreisfrequenz proportional ist, andererseits aber von der gegenseitigen Induktivität des Transformators abhängt. Ist die gegenseitige Induktivität durch Ändern der gegenseitigen räumlichen Lage der Transformatorspulen kontinuierlich veränderbar, so kann die Größe der sekundären EMK nach Bedarf eingestellt und bequem reguliert werden. Zwecks Erreichung einer weitgehenden Unabhängigkeit von störenden Außenfeldern ist es vorteilhaft, einen astatisch gewickelten Lufttransformator zu benutzen, wie er von Déguisne[1]) unter dem Namen „Phasenschlitten" beschrieben worden ist. Die primäre und sekundäre Spule bestehen bei diesem Apparat aus je zwei dicht nebeneinander gelagerten Solenoiden, die so in Reihe geschaltet sind, daß die von äußeren magnetischen Wechselfeldern etwa induzierten EMKe gegeneinander wirken.

In einer früheren Arbeit[2]) ist vom Verfasser über ein einfaches Kompensationsmeßverfahren berichtet worden, bei welchem ein Lufttransformator in der beschriebenen Weise angewendet wird. Es ermöglicht Kapazität und dielektrischen Verlustwinkel von Kondensatoren und Kabeln ohne Zuhilfenahme eines Vergleichskondensators zu messen und kann auch zur Bestimmung von Induktivitäten und gegenseitigen Induktivitäten benutzt werden. Die angegebene Kompensationsschaltung stellt eine Stromverzweigung dar, deren Zweigströme bei abgeglichener Meßanordnung um 90° in der Phase gegeneinander verschoben sind. Wird die Schaltung in geeigneter Weise abgeändert, so ergeben sich neue Anwendungsmöglichkeiten und man gelangt zu interessanten Meßverfahren, welche gegenüber den bisher üblichen, ähnlichen Zwecken dienenden Methoden unter Umständen Vorteile bieten können.

Ausgehend von der ursprünglichen Anordnung sollen im folgenden weitere Schaltungen kritisch behandelt und ihre Anwendungen beschrieben werden.

Bei der Behandlung der verschiedenen Schaltungsmöglichkeiten sind die Schaltungsskizzen sowie die zugehörigen, bei Stromlosigkeit des Nullinstrumentes gültigen Vektorendiagramme (Drehsinn mit dem Uhrzeiger) mit gleichen Bezeichnungen versehen. An die Vektoren sind die in ihnen enthaltenen Widerstandsoperatoren und die entsprechenden Strom- und Spannungswerte angeschrieben. Da aus den einfachen Diagrammen die Endgleichungen fast unmittelbar entnommen werden können, ist im folgenden von der Wiedergabe der Zwischenrechnungen zum größten Teil abgesehen worden.

Der benutzte Wechselstrom sei sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω. Die einzelnen Schaltungsmöglichkeiten seien nunmehr der Reihe nach behandelt.

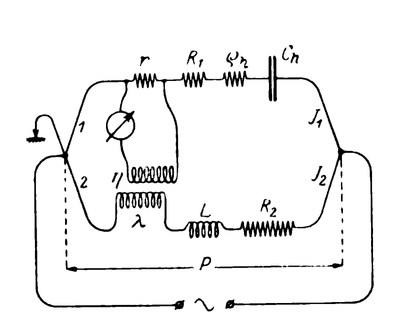
[1]) C. Déguisne, Arch. f. Elektrot. Bd. 5, S. 306, 1917.
[2]) W. Geyger, Arch. f. Elektrot. Bd. 12, S. 370, 1923.



Schaltung I. Bei der ursprünglichen, in Bild 1 dargestellten Meßanordnung ist die primäre Spule des Lufttransformators in Zweig 2 (Spulenzweig) der Stromverzweigung eingeschaltet, während die sekundäre Spule über das Nullinstrument an einen in Zweig 1 (Kondensatorzweig) liegenden Kompensationswiderstand angeschlossen ist.

Es wird bei den folgenden Betrachtungen stets vorausgesetzt, daß die im Spulenzweig enthaltenen Spulen eisenfrei sind, daß also in diesem Zweige nur Ohmsche Verluste auftreten.

Wir behandeln den allgemeinen Fall, daß der Kondensator dielektrische Energieverluste besitzt und denken uns zunächst in der bekannten Darstellungsweise den in Zweig 1 eingeschalteten, mit Verlusten behafteten Kondensator ersetzt durch einen idealen, verlustfreien Kondensator C_h, der mit einem Verlustwiderstand ϱ_h in Reihe geschaltet ist.



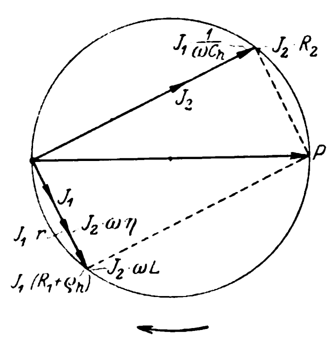


Bild 1.

Es bedeuten:

R_1 und R_2 die gesamten Ohmschen Widerstände der Zweige 1 und 2.
r den Kompensationswiderstand in Zweig 1.
L die gesamte Induktivität in Zweig 2.
λ die Induktivität der Primärspule des Lufttransformators.
η die gegenseitige Induktivität der primären auf die sekundäre Spule.
P die Betriebsspannung.
J_1 und J_2 die beiden Zweigströme.

Wie aus dem in Bild 1 wiedergegebenen Vektorendiagramm hervorgeht, ist bei abgeglichener Meßanordnung die Blindspannung des Kondensatorzweiges gleich der Wirkspannung des Spulenzweiges, und es ist umgekehrt die Wirkspannung des Kondensatorzweiges gleich der Blindspannung des Spulenzweiges:

$$J_1 \cdot \frac{1}{\omega C_h} = J_2 \cdot R_2,$$

$$J_1 \cdot (R_1 + \varrho_h) = J_2 \cdot \omega L.$$

Außerdem gilt

$$J_1 \cdot r = J_2 \cdot \omega \eta.$$

Hieraus folgt

$$L = C_h \cdot R_2 \cdot (R_1 + \varrho_h), \tag{1}$$

$$\eta = C_h \cdot R_2 \cdot r, \tag{2}$$

$$\frac{L}{\eta} = \frac{R_1 + \varrho_h}{r}. \tag{3}$$

Sind die Werte C_h und ϱ_h des benutzten Kondensators bekannt, so können die Induktivitäten L und η gemessen und miteinander verglichen werden. Ist der Kondensator verlustfrei ($\varrho_h = 0$), so ergeben sich besonders einfache und übersichtliche Versuchsverhältnisse. Die zu untersuchende Spule wird in Zweig 2 eingeschaltet.



Die gesamte Induktivität L dieses Zweiges setzt sich dann zusammen aus der zu messenden Induktivität L_x und aus der Induktivität λ der Primärspule des Lufttransformators und es ist $L_x = L - \lambda$.

Andererseits können Kapazität und Verlustwiderstand eines in Zweig 1 liegenden Kondensators oder Kabels sowie dessen dielektrischer Verlustwinkel in einfacher Weise gemessen werden, wenn die gesamte Induktivität des Spulenzweiges und die gegenseitige Induktivität des Lufttransformators bekannt sind. Zur Ausführung solcher Messungen werden zweckmäßig die Widerstandsverhältnisse im Kondensatorzweig so gewählt, daß r den gesamten Ohmschen Widerstand dieses Zweiges darstellt: $r = R_1$. Dies trifft dann zu, wenn der Widerstand der Zuleitungen zu Kompensationswiderstand und Kondensator gegen r vernachlässigbar klein ist. In diesem Falle gilt

$$C_h \cdot (r + \varrho_h) = \frac{L}{R_2}. \tag{4}$$

$$C_h = \frac{\eta}{R_2 \cdot r}. \tag{5}$$

$$\varrho_h = r \cdot \frac{L - \eta}{\eta}. \tag{6}$$

Für den Verlustwinkel δ des Kondensators gilt hiernach die Beziehung

$$\operatorname{tg} \delta = \varrho_h \cdot \omega \cdot C_h = \omega \cdot \frac{L - \eta}{R_2}. \tag{7}$$

Diese Gleichungen ermöglichen die Werte C_h, ϱ_h, $\operatorname{tg} \delta$ unabhängig voneinander zu berechnen. Bei Verlustmessungen ist es vorteilhaft, in Zweig 2 einen Induktivitätsvariator einzuschalten, so daß sich die gesamte Induktivität L dieses Zweiges zusammensetzt aus der Induktivität λ der Primärspule des Lufttransformators und der am Variator jeweilig eingestellten Induktivität L_v. Ist die gegenseitige Induktivität des Transformators gleich der Induktivität seiner primären Spule ($\eta = \lambda$), so kann der für die Bestimmung von ϱ_h und δ erforderliche Induktivitätswert $L_v = L - \eta$ am Variator ohne weiteres abgelesen werden. Sind die Werte ω und R_2 bei den Messungen konstant, so kann der Variator mit einer Skala versehen werden, an welcher der dielektrische Verlustwinkel unmittelbar abgelesen wird.

Denkt man sich in einer anderen Darstellungsweise den in Zweig 1 eingeschalteten, mit Verlusten behafteten Kondensator ersetzt durch einen idealen, verlustfreien Kondensator C_n, der mit einem Verlustwiderstand ϱ_n nebeneinandergeschaltet ist, so ergibt sich der Verlustwinkel δ aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\varrho_n \cdot \omega \cdot C_n}.$$

Die zwei Kondensatorersatzschaltungen sind dann gleichwertig, wenn ihre Kapazitäts- und Widerstandswerte so bemessen sind, daß bei beiden Schaltungen sich derselbe Wechselstromwiderstand und derselbe Verlustwinkel ergibt:

$$\sqrt{\varrho_h^2 + \left(\frac{1}{\omega C_h}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varrho_n}\right)^2 + (\omega C_n)^2}}$$

$$\varrho_h \cdot \omega \cdot C_h = \frac{1}{\varrho_n \cdot \omega \cdot C_n}.$$

Hieraus folgt

$$C_n = \frac{C_h}{1 + (\varrho_h \cdot \omega \cdot C_h)^2} = \frac{C_h}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}. \tag{8a}$$

$$\varrho_n = \frac{1 + (\varrho_h \cdot \omega \cdot C_h)^2}{\varrho_h \cdot (\omega C_h)^2} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg} \delta \cdot \omega C_h}. \tag{9a}$$

Zur Kennzeichnung des dielektrischen Energieverlustes benutzt man vielfach den reziproken Wert von ϱ_n, welcher „Ableitung" genannt wird. Für die Ableitung A gilt somit

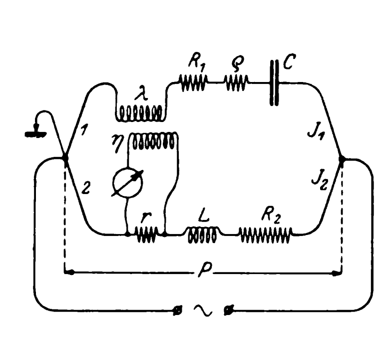
$$A = \frac{\varrho_h \cdot (\omega C_h)^2}{1 + (\varrho_h \cdot \omega \cdot C_h)^2} = \frac{\operatorname{tg} \delta \cdot \omega C_h}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}. \tag{10a}$$

Setzt man in Gleichung (8a) bis (10a) für C_h und $\operatorname{tg}\delta$ die entsprechenden Werte aus Gleichung (5) und (7) ein, so ergibt sich

$$C_n = \frac{\eta}{R_2 \cdot r \cdot \left(1 + \frac{\omega^2 \cdot (L - \eta)^2}{R_2^2}\right)}. \tag{8b}$$

$$\varrho_n = \frac{R_2^2 \cdot r \cdot \left(1 + \frac{\omega^2 \cdot (L - \eta)^2}{R_2^2}\right)}{\omega^2 \cdot \eta \cdot (L - \eta)}. \tag{9b}$$

$$A = \frac{\omega^2 \cdot \eta \cdot (L - \eta)}{R_2^2 \cdot r \cdot \left(1 + \frac{\omega^2 \cdot (L - \eta)^2}{R_2^2}\right)}. \tag{10b}$$



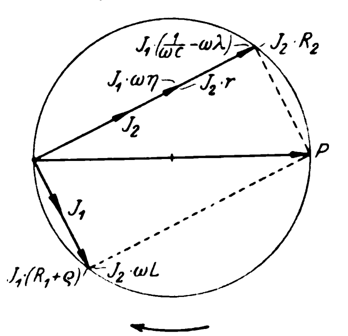


Bild 2.

Bei kleinen Werten von δ darf in diesen Gleichungen $\operatorname{tg}^2\delta$ gegen 1 vernachlässigt werden. Es wird dann

$$C_n \approx C_h \approx C \tag{8c}$$

und es gilt in erster Annäherung

$$\varrho_n = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta \cdot \omega C} = \frac{R_2^2 \cdot r}{\omega^2 \cdot \eta \cdot (L - \eta)}. \tag{9c}$$

$$A = \operatorname{tg}\delta \cdot \omega C = \frac{\omega^2 \cdot \eta \cdot (L - \eta)}{R_2^2 \cdot r}. \tag{10c}$$

Die vereinfachten Gleichungen geben das Resultat mit einer Genauigkeit von mindestens 1 Promille, wenn δ weniger als etwa 2 Winkelgrade beträgt.

Trifft die Voraussetzung zu, daß r den gesamten Ohmschen Widerstand des Kondensatorzweiges darstellt ($r = R_1$) und ist der Kondensator verlustfrei ($\varrho_h = 0$), so ist bei abgeglichener Meßanordnung, wie aus Gl. (4) bis (6) hervorgeht, die gesamte Induktivität des Spulenzweiges gleich der gegenseitigen Induktivität des Lufttransformators: $L = \eta$.

Bezüglich der Abhängigkeit der Nulleinstellung von der Frequenz läßt sich erkennen, daß die Nulleinstellung nur dann frequenzunabhängig ist, wenn der Kondensator verlustfrei ist oder auch, wenn $\operatorname{tg}\delta$ mit der Kreisfrequenz linear zunimmt. In diesen Fällen ist die Einstellung auch unabhängig von der Kurvenform der Wechselspannung, welche an der Meßanordnung wirksam ist. Eine Abhängigkeit der Nulleinstellung von der Höhe dieser Spannung ist nur dann vorhanden, wenn Kapazität oder Verlustwinkel des Kondensators von der angelegten Betriebsspannung abhängen.

Schaltung II. Schaltet man nach Bild 2 die Primärspule des Lufttransformators in den Kondensatorzweig, den Kompensationswiderstand in den Spulenzweig, so ergibt sich für die abgeglichene Meßanordnung das Diagramm in Bild 2. Den mit Verlusten behafteten Kondensator denken wir uns ersetzt durch einen verlustfreien Kondensator C, dem ein Verlustwiderstand ϱ vorgeschaltet ist. Die übrigen Bezeichnungen sind dieselben wie bei Schaltung 1. Aus dem Diagramm ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$J_1 \cdot \left(\frac{1}{\omega C} - \omega \lambda\right) = J_2 \cdot R_2,$$
$$J_1 \cdot (R_1 + \varrho) = J_2 \cdot \omega L,$$
$$J_1 \cdot \omega \eta = J_2 \cdot r.$$

Aus ihnen folgt

$$C = \frac{1}{\frac{R_2 \cdot (R_1 + \varrho)}{L} + \omega^2 \lambda} = \frac{1}{\omega^2 \cdot \left(\frac{R_2 \cdot \eta}{r} + \lambda\right)}. \tag{11a}$$

$$L = \frac{R_2 \cdot (R_1 + \varrho)}{\frac{1}{C} - \omega^2 \lambda} = \frac{r \cdot (R_1 + \varrho)}{\omega^2 \cdot \eta}. \tag{12a}$$

$$\eta = \frac{r\left(\frac{1}{\omega^2 C} - \lambda\right)}{R_2} = \frac{r \cdot (R_1 + \varrho)}{\omega^2 \cdot L}. \tag{13a}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{C} - \frac{R_2 \cdot (R_1 + \varrho)}{L}}{\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{C \cdot \left(\frac{R_2 \cdot \eta}{r} + \lambda\right)}} = \sqrt{\frac{r \cdot (R_1 + \varrho)}{L \cdot \eta}}. \tag{14a}$$

Nun darf in praktisch vorkommenden Fällen $\omega \lambda$ gegen $\frac{1}{\omega C}$ fast stets vernachlässigt werden. Dann gilt in erster Annäherung

$$C = \frac{L}{R_2 \cdot (R_1 + \varrho)} = \frac{r}{\omega^2 \cdot R_2 \cdot \eta}. \tag{11b}$$

$$L = C \cdot R_2 \cdot (R_1 + \varrho). \tag{12b}$$

$$\eta = \frac{r}{\omega^2 \cdot R_2 \cdot C}. \tag{13b}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{C \cdot R_2 \cdot \eta}}. \tag{14b}$$

Die Nulleinstellung ist frequenzabhängig. Zur Messung von Kapazitäten und Induktivitäten ist diese Schaltung weniger geeignet. Dagegen kann die Frequenz mit einer solchen Anordnung in einfacher Weise gemessen und bezüglich ihrer zeitlichen Konstanz kontrolliert werden.

Schaltung III. Die in Bild 3 wiedergegebene Schaltung unterscheidet sich von der ursprünglichen, in Bild 1 dargestellten Meßanordnung nur dadurch, daß der Spulenzweig nicht unmittelbar, sondern unter Zwischenschaltung eines Spannungswandlers mit der Stromquelle verbunden ist. Es bezeichne ü das Verhältnis zwischen Primärspannung P_1 und Sekundärspannung P_2, ε die Phasenabweichung dieser Spannungen von 180°. Den mit Verlusten behafteten Kondensator denken wir uns wieder ersetzt durch einen verlustfreien Kondensator C, dem der Verlustwiderstand ϱ vorgeschaltet ist.

Dann ergibt sich unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen das in Bild 3 wiedergegebene Diagramm, welches folgende Beziehungen erkennen läßt:

$$J_1 \cdot \sqrt{(R_1+\varrho)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \frac{1}{ü} = J_2 \cdot \sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}.$$

$$J_1 \cdot r = J_2 \cdot \omega \eta.$$

$$\alpha = \beta + \varepsilon, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega L}{R_2}, \qquad \operatorname{tg} \beta = (R_1 + \varrho) \cdot \omega C.$$

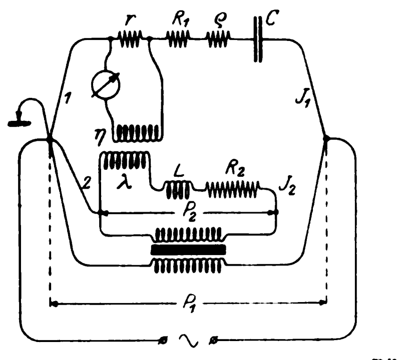
Bei den in Betracht kommenden kleinen Werten der Phasenwinkel α, β und ε kann man schreiben:

$$C \cdot ü = \frac{\eta}{R_2 \cdot r},$$

$$\frac{\omega L}{R_2} = R_1 \cdot \omega C + \varrho \cdot \omega C + \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Es besteht zunächst die Möglichkeit Kapazität und Verlustwinkel des Kondensators zu bestimmen, wenn Übersetzungsverhältnis und Phasenabweichung des Spannungswandlers bekannt sind. Stellt r den gesamten Ohmschen Widerstand des Kondensatorzweiges dar ($r = R_1$), so gelten folgende Gleichungen

$$C = \frac{\eta}{ü \cdot R_2 \cdot r}. \tag{15}$$



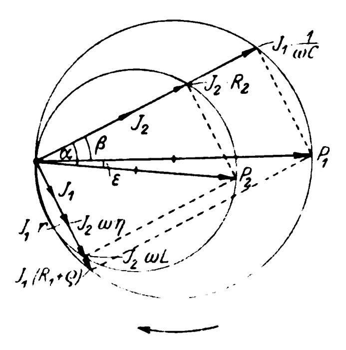


Bild 3.

$$\operatorname{tg} \delta = \varrho \cdot \omega C = \omega \cdot \frac{L - \frac{\eta}{ü}}{R_2} - \operatorname{tg} \varepsilon. \tag{16}$$

In praktisch vorkommenden Fällen ist $\frac{\eta}{ü}$ gegen L fast stets vernachlässigbar klein.

Andererseits können Übersetzungsverhältnis und Phasenabweichung des Spannungswandlers gemessen werden, wenn die elektrischen Eigenschaften des Kondensators bekannt sind:

$$ü = \frac{\eta}{C \cdot R_2 \cdot r}. \tag{17}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \omega \cdot \left(\frac{L}{R_2} - R_1 \cdot C - \varrho \cdot C\right). \tag{18}$$

Hierbei ist es vorteilhaft einen verlustfreien Kondensator zu benutzen.

Schaltung III bietet gegenüber Schaltung I den Vorteil, daß der Spulenzweig, auch bei hohen Betriebsspannungen des Kondensatorzweiges, für niedere Spannungen bemessen werden darf. Hierdurch werden Hochspannungswiderstände vermieden, welche übrigens bei sehr hohen Spannungen in der Schaltung nach Bild 1 überhaupt nicht mehr anwendbar sind. Außerdem ermöglicht die Schaltung nach Bild 3 mit

verhältnismäßig kleinen Induktivitätswerten des Spulenzweiges auszukommen. Für Spannungswandlerprüfungen ohne Zuhilfenahme von Hochspannungswiderständen ist diese Meßanordnung vorzüglich geeignet.

Schaltung IV. Schaltet man in Kapazitäts- und Spulenzweig die Primärspulen zweier Lufttransformatoren mit kontinuierlich veränderbarer gegenseitiger Induktivität, und sorgt man dafür, daß die beiden Zweigströme um 90^0 in der Phase gegeneinander verschoben sind, so gelangt man zu einem einfachen Wechselstromkompensator, welcher Amplitude und Phase von Wechselströmen und Wechselspannungen nach der Methode der komplexen Kompensation zu messen gestattet. Stromverzweigung und Meßobjekt werden entweder unmittelbar oder unter Zwischenschaltung von Transformatoren an die gemeinsame Wechselstromquelle angeschlossen, während die Sekundärspulen der Lufttransformatoren mit dem Nullinstrument in Reihe geschaltet und mit denjenigen Punkten des Meßobjektes verbunden sind, zwischen denen die zu untersuchende Wechselspannung wirksam ist.

Ist das Nullinstrument stromlos, so wirken an den Klemmen der Sekundärspulen zwei um 90^0 in der Phase gegeneinander verschobene EMKe, welche als Teilspannungen zur komplexen Kompensation benutzt werden. Um ohne Zuhilfenahme von Stromwendern Spannungsvektoren in allen Quadranten kompensieren zu können,

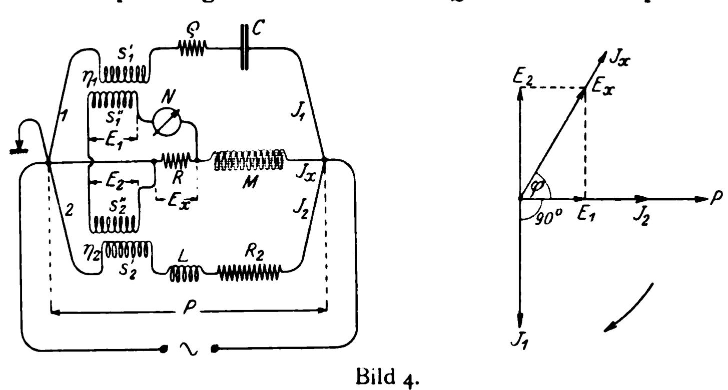


Bild 4.

verwendet man zweckmäßig als Lufttransformatoren zwei gleichartige Drehspul-Variatoren für gegenseitige Induktion, welche kontinuierlich veränderbare Teilspannungen positiven und negativen Vorzeichens zwischen Null und dem Höchstwert einzustellen ermöglichen. Bei der Messung werden durch Drehen der Variatorspulen die beiden Teilspannungen so lange geändert, bis das Nullinstrument Stromlosigkeit anzeigt.

Da die Sekundärspulen von der Stromquelle vollkommen isoliert sind, ist es ohne weiteres möglich, das Meßobjekt unmittelbar, also unter Vermeidung von Isoliertransformatoren mit den Verzweigungspunkten zu verbinden. Besonders günstig ist es, die Versuchsverhältnisse so zu wählen, daß der im Kondensatorzweig fließende Strom gegen die an den Verzweigungspunkten wirksame Spannung sehr angenähert um 90^0 in der Phase verschoben ist, während der im Spulenzweig fließende Strom mit dieser Spannung praktisch phasengleich ist.

Bild 4 zeigt als Beispiel eine derartige Meßanordnung. Das Meßobjekt M, eine Eisen enthaltende Spule, ist über einen induktions- und kapazitätsfreien Kompensationswiderstand R mit den Verzweigungspunkten unmittelbar verbunden. Die drehbaren Spulen S_1', S_2' zweier Drehspulvariatoren sind als Primärspulen geschaltet, während die fest angeordneten, als Sekundärspulen wirkenden Variatorspulen S_1'', S_2'' mit dem Nullinstrument N in Reihe geschaltet und an die Klemmen des Kompensationswiderstandes angeschlossen sind. Kapazitäts- und Spulenzweig sind so bemessen, daß in erster Annäherung die folgenden Beziehungen gelten:

$$\sphericalangle (P, J_1) = 90^0, \quad \sphericalangle (P, J_2) = 0.$$

Dann ist bei Stromlosigkeit des Nullinstrumentes

$$\sphericalangle (P, E_1) = 0, \quad \sphericalangle (P, E_2) = 90^0.$$

Hierbei bedeuten P, J_1, J_2, E_1, E_2 die in Bild 4 angedeuteten Ströme und Spannungen. Es bezeichne weiterhin E_x den am Kompensationswiderstand wirksamen Spannungsabfall, welcher mit dem Strom J_x im Meßobjekt in Phase ist.

Für die abgeglichene Meßanordnung ergibt sich das Diagramm in Bild 4. Es gilt also:

$$J_x = \frac{\sqrt{(J_1 \cdot \omega \eta_1)^2 + (J_2 \cdot \omega \eta_2)^2}}{R}. \tag{19a}$$

$$J_x \cdot \cos \varphi = \frac{J_1 \cdot \omega \eta_1}{R}. \tag{20a}$$

$$J_x \cdot \sin \varphi = \frac{J_2 \cdot \omega \eta_2}{R}. \tag{21a}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_2 \cdot \eta_2}{J_1 \cdot \eta_1}. \tag{22a}$$

Die Zweigströme J_1, J_2 ergeben sich aus der für Stromverzweigung und Meßobjekt gemeinsamen Betriebsspannung P und den Zweigwiderständen. Es ist zweckmäßig, die Zweigwiderstände gleich zu wählen; so daß J_1 und J_2 gleiche Stromstärke besitzen. Für $J_1 = J_2 = J$ gilt:

$$J = P \cdot \frac{1}{R_2} = P \cdot \omega C$$

und

$$J_x = P \cdot \frac{\omega \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}}{R_2 \cdot R}. \tag{19b}$$

$$J_x \cdot \cos \varphi = P \cdot \frac{\omega \eta_1}{R_2 \cdot R}. \tag{20b}$$

$$J_x \cdot \sin \varphi = P \cdot \frac{\omega \eta_2}{R_2 \cdot R}. \tag{21b}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta_2}{\eta_1}. \tag{22b}$$

Es können also der Strom im Meßobjekt, dessen Wirk- und Blindkomponente sowie der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung nach Gl. (19a) bis (22a) bzw. Gl. (19b) bis (22b) berechnet werden. Scheinleistung N_s, Wirkleistung N_w und Blindleistung N_b ergeben sich somit aus den Gleichungen

$$N_s = P^2 \cdot \frac{\omega \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}}{R_2 \cdot R}. \tag{23}$$

$$N_w = P^2 \cdot \frac{\omega \eta_1}{R_2 \cdot R}. \tag{24}$$

$$N_b = P^2 \cdot \frac{\omega \eta_2}{R_2 \cdot R}. \tag{25}$$

Die Werte η_1, η_2 werden an den Skalen der Drehspulvariatoren unmittelbar abgelesen. Als Variatoren kann man zweckmäßig sogenannte „Kugelvariometer" verwenden, wie sie in radiotelephonischen Empfangsapparaten gebräuchlich sind. Es hat sich gezeigt, daß die Genauigkeit solcher Kugelvariometer für technische Messungen vollständig ausreichend ist. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die beschriebenen Meßanordnungen in der aus den Schaltskizzen ersichtlichen Weise zu erden sind. Das Nullinstrument liegt in allen Fällen einpolig an Erde.



Zum Diagramm des Induktionsmotors.

(Vereinfachte Darstellung durch Gleichungen zwischen Diagrammvektoren[1]).

Von

Dipl.-Ing. **F. Stier** und Dipl.-Ing. **A. v. Timascheff**, Karlsruhe.

Die analytischen Ausdrücke für Kreis und Gerade in Parameterform erlauben eine einfache Ableitung der bekannten Gleichungen für relatives Drehmoment, Kippschlüpfung, übertragene und abgegebene Leistung eines Induktionsmotors.

Läßt man den Koordinatenursprung mit einem Kreispunkt zusammenfallen, so hat die Kreisgleichung die Form:

$$\dot{V}_z = \frac{1}{\dot{F}_z + \dot{G}_z \lambda_z}, \tag{1}$$

wobei, bei gegebenem Kreis, die Vektoren $\dot{F}_z$ und $\dot{G}_z$ und der reelle Parameter λ_z von der Wahl des Koordinatenanfangspunktes abhängig sind; d. h. der Kreis läßt sich als inverse Kurve einer beliebigen Geraden

$$\dot{V}_z' = \dot{F}_z + \dot{G}_z \lambda_z \tag{2}$$

auffassen. Das Inversionszentrum Z (Bild 1) liegt im Koordinatenursprung und ist der inverse Punkt zum unendlich fernen Punkt der Geraden (also $\lambda_z = \infty$). Ist M der Kreismittelpunkt, so ist bekanntlich das Spiegelbild $\dot{V}_z''$ der Geraden $\dot{V}_z'$ an der reellen Achse senkrecht zu ZM. Der Strahl ZO schneidet $\dot{V}_z''$ in C ($\lambda_z = 0$ im Kreispunkt O). Es ist dann $ZC = |\dot{F}_z| = F_z$ und für einen beliebigen Punkt P:

$$TC = G_z \lambda_z = \text{Const.}\, \lambda_z, \tag{3}$$

wobei T der Schnittpunkt der Geraden ZP und $\dot{V}_z''$ ist und λ_z der den Punkten P und T zugeordnete Parameter.

Man kann allgemein aussprechen: Wird für den Kreispunkt Z der Parameter $\lambda = \infty$, so schneiden Strahlen ZP (P ein beliebiger Kreispunkt) auf einer zu ZM senkrechten Geraden Strecken ab, welche dem Parameter (λ) des Punktes P proportional sind. Der Nullpunkt der Geraden ist der Schnittpunkt derselben mit ZO, wenn im Kreispunkt O $\lambda = 0$ ist.

Ist ein Kreis von allgemeiner Lage gegeben mit der Gleichung

$$\dot{W} = \frac{\dot{Q} + \dot{S} \lambda_z}{\dot{R} + \dot{T} \lambda_z}, \tag{4}$$

so läßt sich letztere auf die Form bringen

$$\dot{W} = \dot{K}_v + \frac{1}{\dot{F}_z + \dot{G}_z \lambda_z}, \tag{5}$$

woraus man ersieht, daß im allgemeinen Fall durch Verschiebung des Koordinatenursprunges um $\dot{K}_v$ alles auf den oben behandelten Sonderfall zurückgeführt wird.

Wir bezeichnen:

$\dot{U}_1$ = primäre Klemmenspannung,
$\dot{I}_1$ = Primärstrom,
$\dot{I}_2'$ = Sekundärstrom,

[1]) M. Schenkel gibt in der ETZ, 1901, S. 1043 („Geometrische Örter an Wechselstromdiagrammen") die erste Anregung; eine systematische Behandlung finden wir bei O. Bloch („Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik", Zürich, 1917).



$X_1 = X_{11}(1 + \sigma_1)$ = Gesamtreaktanz des Primärkreises (bei Netzfrequenz),
$X_2' = X_{11}(1 + \sigma_2)$ = Gesamtreaktanz des Sekundärkreises (bei Netzfrequenz),
X_{11} = Nutzreaktanz (bei Netzfrequenz),
R_1 = Wirkwiderstand des Primärkreises,
R_2' = Wirkwiderstand des Sekundärkreises.

(Sämtliche Werte sind auf einen Strang bezogen, die sekundären Größen sind auf den Primärkreis umgerechnet.)

s = Schlüpfung,

$\sigma = 1 - \frac{X_{11}^2}{X_1 X_2'} = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)}$ Blondelscher Koeffizient der Totalstreuung,

$\beta = \frac{R_1}{X_1}; \qquad \gamma = \frac{R_2'}{X_2'}.$

Eine Multiplikation mit j bedeutet Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinn der Mathematik.

Zur Bedeutung der Größen β und γ ist zu bemerken, daß die relativen Wirkspannungen im Leerlauf (die Eisenverluste sind durchwegs vernachlässigt) bei Speisung von der primären bzw. sekundären Seite aus dargestellt sind durch: $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 1}}$ bzw. $\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}$, in allen praktischen Fällen genügend genau durch β und γ.

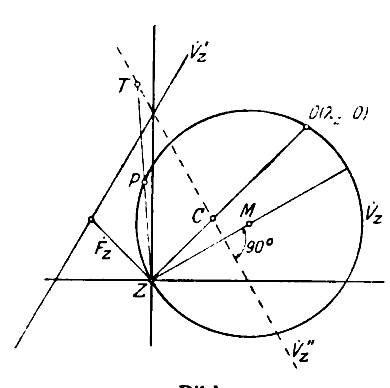


Bild 1.

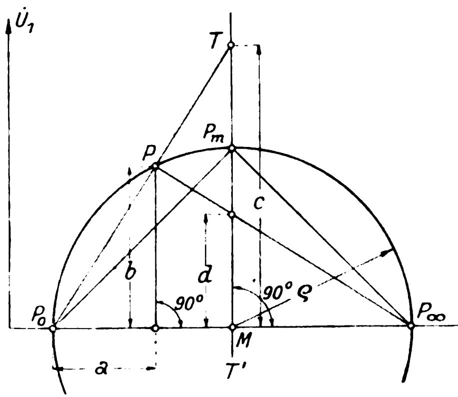


Bild 2.

Aus den Spannungsgleichungen der Induktionsmaschine:

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j X_1 \dot{I}_1 + j X_{11} \dot{I}_2', \tag{6}$$

$$0 = R_2' \dot{I}_2' + j s X_{11} \dot{I}_1 + j s X_2' \dot{I}_2' \tag{7}$$

erhalten wir die Stromgleichung

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \frac{R_2' + j X_2' s}{R_2'(R_1 + j X_1) + X_2'(-\sigma X_1 + j R_1) s} = \dot{U}_1 \frac{\gamma + j s}{X_1 \gamma (\beta + j) + X_1(-\sigma + j\beta) s}. \tag{8}$$

Diese Gleichung hat die Form der allgemeinen Kreisgleichung:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \frac{\dot{A} + \dot{B} s}{\dot{C} + \dot{D} s} = \dot{U}_1 \frac{\dot{B} + \dot{A}\frac{1}{s}}{\dot{D} + \dot{C}\frac{1}{s}}. \tag{9}$$

Für $R_1 = 0$ liegen die Punkte $P_0 \left(\frac{1}{s} = \infty\right)$, M und P_∞ $(s = \infty)$ auf der Abszissenachse, wenn der Vektor der Klemmenspannung $(\dot{U}_1)$ in die Ordinatenachse gelegt wird (Bild 2). Ist P ein beliebiger Punkt und T T' senkrecht zu $P_0 M P_\infty$, so

schneiden die Strahlen P_0P und $P_\infty P$ auf TT' Strecken ab, die $\frac{1}{s}$ bzw. s proportional sind. Aus Bild 2 gewinnt man die Proportionen:

$$\frac{2\varrho - a}{b} = \frac{\varrho}{d} = \frac{s_m}{s}, \tag{10}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\varrho}{c} = \frac{\frac{1}{s_m}}{\frac{1}{s}}. \tag{11}$$

Aus Gleichung (10) und (11):

$$\frac{2}{\frac{s_m}{s} + \frac{s}{s_m}} = \frac{b}{\varrho}. \tag{12}$$

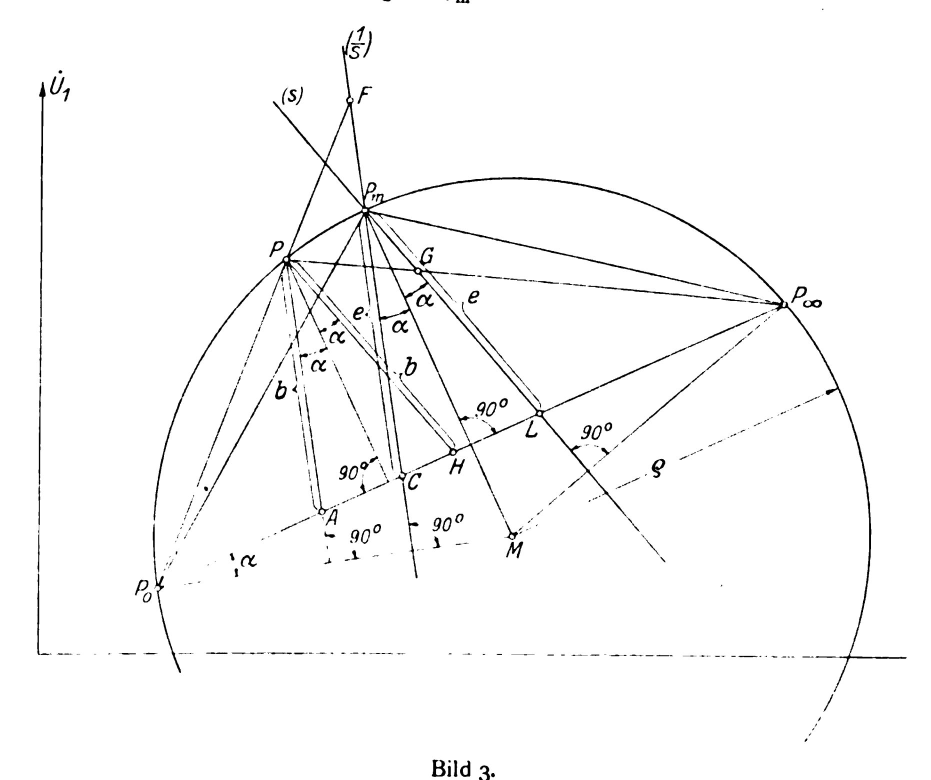


Bild 3.

Da die Strecken b und ϱ dem Drehmoment D im Punkte P bzw. dem Kippmoment D_M im Punkte P_M proportional sind, erhält man die interessante von Prof. Kloß[1]) angegebene Formel:

$$\frac{D}{D_m} = \frac{2}{\frac{s_m}{s} + \frac{s}{s_m}}. \tag{I}$$

Berücksichtigt man den Ständerwiderstand, der bei kleinen Motoren nicht vernachlässigt werden darf, so ergeben sich aus Bild 3 folgende Beziehungen:

[1]) Die Beziehungen (I) bis (IV) sind von M. Kloß im Arch. f. Elektrotechnik (Bd. V, S. 59) schon im Jahre 1916 abgeleitet und gleichzeitig ist daselbst ihre Anwendung diskutiert. Hier sind dieselben lediglich als Beispiel gewählt worden, um zu zeigen, wie sehr sich heute die Ableitung derselben bei singgemäßer Verwendung der allgemeinen Kreisgleichung vereinfacht.

$$P_0 C = P_\infty L = e,$$
$$e \cdot \cos\alpha = \varrho (1 - \sin\alpha), \tag{13}$$

$$\frac{P_0 A}{b} = \frac{P_0 C}{F C} = \frac{e}{F C} = \frac{\frac{1}{s_m}}{\frac{1}{s}}, \tag{14}$$

$$H P_\infty = 2 \varrho \cos\alpha - 2 b \sin\alpha - P_0 A. \tag{15}$$

Aus den Gleichungen (13) bis (15):

$$\frac{H P_\infty}{b} = 2 \frac{e}{b} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{(1 - \sin\alpha)} - 2 \sin\alpha - \frac{s}{s_m}, \tag{16}$$

$$\frac{H P_\infty}{b} = \frac{L P_\infty}{G L} = \frac{e}{G L} = \frac{s_m}{s}, \tag{17}$$

$$\frac{b}{e} = \frac{2 + 2 \sin\alpha}{\frac{s_m}{s} + \frac{s}{s_m} + 2 \sin\alpha}. \tag{18}$$

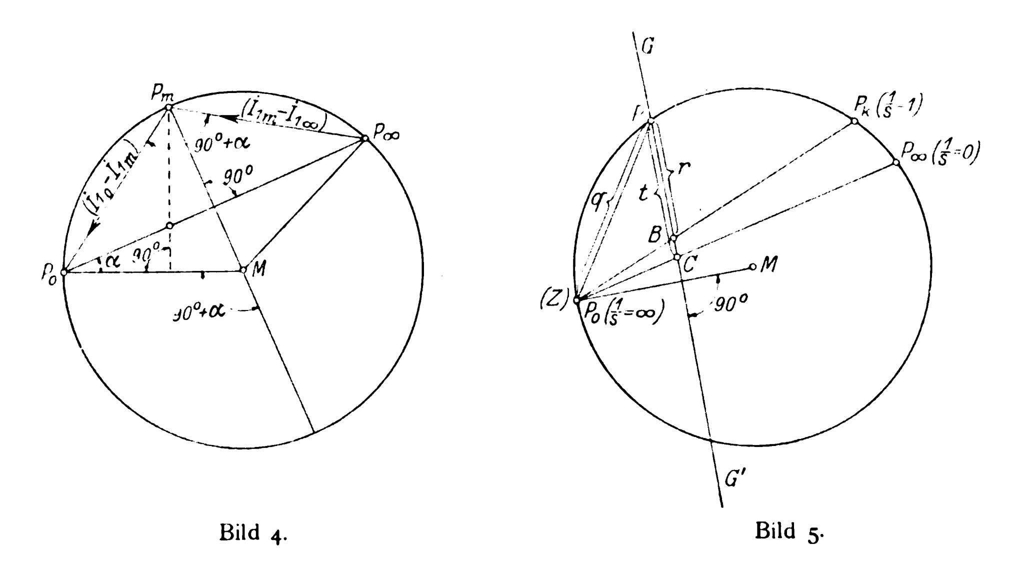


Bild 4. Bild 5.

Da die Strecken b und e proportional den Drehmomenten sind (hierfür wird am Schluß ebenfalls ein einfacher Beweis geliefert), so ist:

$$\frac{D}{D_m} = \frac{2 + 2 \sin\alpha}{\frac{s_m}{s} + \frac{s}{s_m} + 2 \sin\alpha}. \tag{II}$$

Für $R_1 = 0$ fällt der Mittelpunkt M in die Gerade $P_0 P_\infty$ ($\sin\alpha = 0$) und Gleichung (II) geht in Gleichung (I) über.

Ist das Diagramm eines Motors bekannt, so kann man $\sin\alpha$ aus demselben leicht ermitteln. Der analytische Ausdruck für $\sin\alpha$ durch die Konstanten der Maschine ergibt sich zwanglos bei der folgenden Berechnung der Kippschlüpfung (s_m).

Durch einfache Umformung der Stromgleichung ergibt sich:

$$s = \frac{\dot{A} \dot{U}_1 - \dot{C} \dot{I}_1}{\dot{D} \dot{I}_1 - \dot{B} \dot{U}_1} = \left(\frac{\dot{C}}{\dot{D}}\right) \frac{\frac{\dot{A}}{\dot{C}} \dot{U}_1 - \dot{I}_1}{\dot{I}_1 - \frac{\dot{B}}{\dot{D}} \dot{U}_1} = \left(\frac{\dot{C}}{\dot{D}}\right) \frac{\dot{I}_{10} - \dot{I}_1}{\dot{I}_1 - \dot{I}_{1\infty}}. \tag{19}$$

Für den Kippunkt (P_m) ist (Bild 4):

$$\left|\dot{I}_{10} - \dot{I}_{1m}\right| = \left|\dot{I}_{1m} - \dot{I}_{1\infty}\right| \tag{20}$$

also:

$$s_m = \left|\frac{\dot{C}}{\dot{D}}\right| = \frac{C}{D} = \gamma\sqrt{\frac{\beta^2 + 1}{\sigma^2 + \beta^2}}. \tag{III}$$

Die Schlüpfung:

$$s_m = \left(\frac{\dot{C}}{\dot{D}}\right)\frac{\dot{I}_{10} - \dot{I}_{1m}}{\dot{I}_{1m} - \dot{I}_{1\infty}} = \left|\frac{\dot{C}}{\dot{D}}\right| e^{j\Theta}\left|\frac{\dot{I}_{10} - \dot{I}_{1m}}{\dot{I}_{1m} - \dot{I}_{1\infty}}\right| e^{j(90^\circ - \alpha)} \tag{21}$$

ist eine reelle Zahl; also:

$$\Theta + 90^0 - \alpha = 0, \tag{22}$$

$$\sin\alpha = \cos\Theta. \tag{23}$$

Θ ist das Argument des komplexen Ausdruckes $\frac{\dot{C}}{\dot{D}}$. Wir erhalten also $\cos\Theta$ wie folgt:

$$\frac{\dot{C}}{\dot{D}} = \frac{\gamma(\beta + j)}{(-\sigma + j\beta)} = \frac{\gamma\beta(1-\sigma) - j\gamma(\sigma + \beta^2)}{\sigma^2 + \beta^2} = \left|\frac{\dot{C}}{\dot{D}}\right| e^{j\Theta} = s_m\{\cos\Theta + j\sin\Theta\}. \tag{24}$$

$$\sin\alpha = \cos\Theta = \frac{\gamma\beta(1-\sigma)}{s_m\cdot(\sigma^2 + \beta^2)} = \frac{\beta(1-\sigma)}{\sqrt{(1+\beta^2)(\sigma^2+\beta^2)}}. \tag{IV}$$

Die von dem Ständer auf den Läufer eines dreiphasigen Induktionsmotors übertragene Leistung ist

$$N = 3\frac{I_2'^2 \cdot R_2'}{s}. \tag{25}$$

Diese Form der Leistungsgleichung legt es nahe, von den zwei bekannten Darstellungen im Diagramm, durch Strecken senkrecht zur Abszissenachse oder solchen senkrecht zu P_0M, der letzteren den Vorzug zu geben. Denn dem Leerlaufpunkt P_0 als Inversionszentrum $\left(\frac{1}{s} = \infty\right)$ ist die Gerade mit dem Parameter $\frac{1}{s}$ zugeordnet, deren Spiegelbild GG' senkrecht zu P_0M ist (Bild 5).

Wir formen die Stromgleichung (9) um:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{A}}{\dot{C}}\dot{U}_1 + \frac{1}{\dfrac{\dot{D}}{\left(\dot{B} - \dfrac{\dot{A}}{\dot{C}}\dot{D}\right)\dot{U}_1} + \dfrac{\dot{C}\frac{1}{s}}{\left(\dot{B} - \dfrac{\dot{A}}{\dot{C}}\dot{D}\right)\dot{U}_1}}. \tag{26}$$

Die Gleichung der inversen Geraden lautet also:

$$\dot{V}' = \frac{\dot{C}\dot{D}}{(\dot{B}\dot{C} - \dot{A}\dot{D})\dot{U}_1} + \frac{\dot{C}^2\frac{1}{s}}{(\dot{B}\dot{C} - \dot{A}\dot{D})\dot{U}_1}. \tag{27}$$

Wir wählen die Inversionspotenz so, daß das Spiegelbild der inversen Geraden durch den beliebigen Kreispunkt P geht.

Die Strecken q, r und t (vgl. Bild 5) stellen im Strombild die Größen q', r' und t', im inversen Bild die Größen q'', r'' und t'' dar.



Es ist:

$$q'' = \frac{1}{q'} \tag{28}$$

(gegeben durch die Wahl der Inversionspotenz).

$$\frac{t'}{q'} = \frac{t''}{q''}, \tag{29}$$

$$t' = t'' \cdot q'^2. \tag{30}$$

Aus der Gleichung (27) geht hervor (vgl. Gleichung (3) und Bild 1), daß:

$$t'' = \left| \frac{\dot{C}^2 \frac{1}{s}}{(\dot{B}\dot{C} - \dot{A}\dot{D})\dot{U}_1} \right|.$$

Aus den Spannungsgleichungen (6) und (7) des Primärkreises angeschrieben für Leerlauf und Belastung finden wir:

$$-\dot{I}_2' = (\dot{I}_1 - \dot{I}_{10}) \frac{(\beta + j) X_1}{j X_{11}}, \tag{31}$$

$$q' = |\dot{I}_1 - \dot{I}_{10}| = I_2' \left| \frac{j X_{11}}{X_1 (\beta + j)} \right|. \tag{32}$$

$$\left. \begin{aligned} 3 U_1 \cdot t' &= 3 \frac{I_2'^2}{s} \left| \frac{-X_{11}^2}{X_1^2 (\beta + j)^2} \cdot \frac{X_1^2 \gamma^2 (\beta + j)^2}{[j X_1 \gamma (\beta + j) - \gamma X_1 (-\sigma + j\beta)]} \right| = \\ &= 3 \frac{I_2'^2}{s} \left| \frac{X_{11}^2 \cdot \gamma}{X_1 (1 - \sigma)} \right| = 3 \frac{I_2'^2}{s} \cdot X_2' \gamma = 3 \frac{I_2'^2}{s} R_2' = N. \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

Die abgegebene Leistung erhält man wie folgt:

$$\frac{r'}{t'} = \frac{r}{t} = \frac{\frac{1}{s} - 1}{\frac{1}{s}} = 1 - s, \tag{34}$$

$$3 U_1 r' = 3 \frac{I_2'^2 \cdot R_2'}{s} (1 - s) = N_m. \tag{35}$$

$$\left. \begin{aligned} N &= 3 U_1 \cdot t' \\ N_m &= 3 U_1 \cdot r' \end{aligned} \right\} \tag{V}$$

Zusätzliche Verluste in kleinen Drehstrommotoren.

Von

W. Rogowski und **V. Vieweg.**

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

1. Definition der zusätzlichen Verluste.

Die Ausdrucksweise „zusätzlicher Verlust" wird in der Literatur in doppelter Bedeutung gebraucht. Der Berechnungsingenieur versteht unter ihr die Abweichung zwischen berechnetem und wirklichem Verluste, also den Fehler seiner Berechnungsmethode. Der Prüffeldingenieur bezeichnet mit ihr die Abweichung zwischen gemessenem und wirklichem Verluste, also den Fehler seiner Meßmethode.

Die Verlustmessung bei kleinen Drehstrommotoren, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen, wird in der Praxis im allgemeinen nach dem Einzelverlustverfahren (Leerlaufmethode) ausgeführt; siehe auch Regeln für die Bewertung und Prüfung elektrischer Maschinen (R. E. M.) § 58, II. Im folgenden soll nun unter „zusätzlichen Verlusten" die Abweichung der nach der Leerlaufmethode gefundenen Verluste von den wirklichen Verlusten verstanden werden.

2. Die wirklichen Verluste.

Die zugeführte Leistung eines Motors übertrifft die abgegebene Leistung um die wirklichen Verluste. Der einzig einwandfreie Weg zur Bestimmung der wirklichen Verluste besteht daher in einer Messung der zu- und abgeführten Leistung (R. E. M. § 57). Nun sind bei Vollast die Verluste selbst klein im Verhältnis zu beiden Leistungen. Es lassen sich daher die wirklichen Verluste nur durch eine in der Meßtechnik gefürchtete Differenzmessung feststellen. Beträgt z. B. der Meßfehler bei zu- und abgeführter Leistung im ganzen 1%, so fallen die wirklichen Verluste bei einem Wirkungsgrad des Motors von etwa 85% bereits um rund 7% fehlerhaft aus. Die Fehler bei den Leistungsmessungen kommen daher mit stark erhöhtem Gewichte bei den Verlusten zur Geltung. Zu- und abgeführte Leistung müssen mit peinlicher Sorgfalt und weitgehender Genauigkeit bestimmt werden, wenn auf die Verlustmessung Verlaß sein soll.

Welche Genauigkeit ist nun unter günstigen Umständen erreichbar?

Die zugeführte Leistung kann bei kleinen Drehstrommotoren bestenfalls bis auf 2—3‰ gemessen werden. Die abgegebene Leistung wurde bei den von uns untersuchten kleinen Motoren mit Hilfe der Wirbelstrombremse gemessen. Deren Drehmoment dürfte bei genügend sorgfältiger Einstellung der Achsen von Motor und Bremse und bei genauer Berücksichtigung des Luftwiderstandes der Bremsscheibe bei maximalem Ausschlage auf etwa 1—2‰ genau bestimmbar sein. Die Drehzahl des Rotors, die wir außer dem Drehmoment für die Bestimmung der abgegebenen Leistung brauchen, ist von uns durch Messung der Frequenz und des Schlupfes gefunden worden. Der Schlupf ist stroboskopisch so genau festzustellen, daß er praktisch keinen Fehler der abgegebenen Leistung zur Folge hat. Die synchrone Tourenzahl n wurde von uns aus der gemessenen Frequenz f und der Polpaarzahl p nach der Formel $n = \frac{f \cdot 60}{p}$ berechnet.

Der Fehler bei Einstellung der Frequenz dürfte bei Benutzung eines geeichten, halbe Wechsel anzeigenden Frequenzmessers 1—2‰ nicht übersteigen. Die abgegebene Leistung kann daher ebenfalls auf 2—3‰ als richtig angesehen werden. Bei Normallast kann der Meßfehler beider Leistungen insgesamt somit unter den

allergünstigsten Umständen auf etwa 0,5% beschränkt werden. Für die wirklichen Verluste folgt hieraus für Normallast eine Genauigkeit von 3—4%.

Ein Beispiel der direkten Messung geht aus Tabelle 1 hervor. Die Messungen wurden erst vorgenommen, nachdem der mit der Nennlast belastete Motor den Beharrungszustand erreicht hatte.

Tabelle 1.
Direkte Methode. 380 Volt ⅄; 50~; 2,0 PS.

Zugeführte Leistung kW	Stromstärke Amp.	Leistungsfaktor cos φ	Drehzahl in der Minute	Schlüpfung in %	Abgegebene Leistung kW	Wirkungsgrad in %
1,964	3,50	0,85	1429	4,7	1,614	82,2
1,636	2,95	0,84	1441	3,9	1,361	83,2
1,318	2,50	0,80	1455	3,0	1,106	83,9
1,016	2,05	0,75	1467	2,2	0,845	83,2
0,716	1,70	0,64	1477	1,5	0,578	80,7
0,427	1,40	0,46	1488	0,8	0,307	71,9
0,108	1,20	0,14	1500	—	0	0

Man hat zu beachten, daß diese Genauigkeit nur unter günstigen Umständen zu erreichen ist, die Energiequelle muß konstant, auf die Instrumente und ihre Eichung muß sicherer Verlaß sein. Es muß auch die nötige Zeit zur Verfügung stehen, um Spannung, Frequenz und Bremse sorgfältig einzuregulieren. Außerdem müssen die drei Klemmenspannungen gleich sein und eine praktische sinusförmige Kurvenform haben. Diese Bedingungen waren bei unseren Messungen erfüllt. Die Abweichungen der Ströme sind dann durch den nicht völlig symmetrischen Bau der Motoren bedingt. Derartige Abweichungen traten selten und dann nur in den zulässigen Grenzen auf. Die Motoren wurden im allgemeinen in Sternschaltung untersucht. Irgendwelche Unterschiede der Zusatzverluste bei Stern- und bei Dreieckschaltung konnten nicht festgestellt werden. Treffen diese Vorbedingungen nicht alle zu, so können die durch Differenzmessung ermittelten Verluste mit großen Fehlern behaftet sein. Die direkte Verlustmessung ist daher eine Aufgabe für ein wissenschaftliches Laboratorium, aber nicht für die Praxis, der im allgemeinen weder konstante Energiequellen, noch sorgfältig behandelte Instrumente, noch Zeit für Feinmessungen zur Verfügung steht.

3. Die Verluste von Drehstrommotoren nach der Leerlaufmethode.

Die Verluste bestehen in Eisen- und Reibungsverlusten (Leerverlusten) und in Kupferverlusten im Stator und im Rotor (Lastverlusten). Vgl. R. E. M. § 58, II. Nach der Leerlaufmethode mißt man bei Leerlauf (Index $_0$) und irgendwelchen beliebig eingestellten Belastungspunkten (kein Index) die aufgenommene elektrische Leistung N (in Watt), den Statorstrom J (in Ampere) und die Schlüpfung s des Rotors (in % der synchronen Drehzahl). Außerdem hat man je Phase den Gleichstromwiderstand r der Statorwicklung zu bestimmen. Die Leerlaufmethode setzt nun:

I. die Statorkupferverluste: $V_s = 3\,J^2 r$,
II. die Eisen- und Reibungsverluste: $E + R = N_0 - 3\,J_0^2 r$,
III. die Rotorverluste: $V_r = s(N - 3\,J^2 r - E)$.

Die bei Leerlauf gemessenen Werte sind nach den Ansätzen I—III hauptsächlich ausschlaggebend für Eisen- und Reibungsverluste, die nach der Leerlaufmethode als unabhängig von der Belastung angesehen werden.



In untergeordnetem Maße beeinflussen die Meßwerte bei Leerlauf die Rotorverluste. Denn bei merklicher Last sind die Eisenverluste E klein gegen die gesamte aufgenommene Leistung N. Die Berechnung der Rotorverluste V_r verlangt strenggenommen eine Trennung der nach II. gemeinsam gefundenen Reibungs- und Eisenverluste E + R. Im allgemeinen kann aber davon abgesehen werden. Denn die Reibungsverluste sind wieder klein gegen die Eisenverluste und da diese schon nur ganz wenig die Rotorverluste beeinflussen, so kann man in III statt des genauen Wertes E den nach II gefundenen Wert E + R einsetzen. Wir haben in einer Reihe von Fällen diese Trennung durch die bekannte Messung der Leerlaufleistung bei sinkender Spannung durchgeführt und uns überzeugt, daß bei den üblichen Werten des Reibungsverlustes die durch obige Vereinfachung entstandenen Fehler des Gesamtverlustes noch nicht 1% betragen. Es hätte somit in III statt E auch E + R geschrieben werden können, wir haben aber allein die Eisenverluste E aufgeführt, um die physikalische Grundlage der Berechnung der Rotorverluste zum Ausdruck zu bringen. Sie besteht darin, daß auf Stator und Rotor dasselbe Drehmoment M einwirkt. Dieses Drehmoment M ergibt nach der üblichen Schlußweise, mit der synchronen Umlaufsgeschwindigkeit n multipliziert, die vom Stator auf den Rotor übertragene Leistung $M \cdot n = N - E - 3 J^2 r$. Mit der Umlaufsgeschwindigkeit n' des Rotors multipliziert ergibt es die vom Rotor abgegebene Nutzleistung $M \cdot n' = N - E - 3 J^2 r - V_r$. Beide Leistungen unterscheiden sich um die im Rotor verbleibenden Verluste V_r. Die Leerlaufmethode berechnet somit die Rotorverluste aus der auf den Rotor übertragenen Leistung und dem Schlupf. In der Tabelle 2 ist die Untersuchung desselben Motors wie in Tabelle 1 nach der Leerlaufmethode als Beispiel angegeben.

Tabelle 2.

Indirekte Methode. 380 Volt ⅄; 50 ~; 2,0 PS.

Zugeführte Leistung in kW	Meßbare Verluste in Watt				Stromstärke in Amp.	Schlüpfung in %	Abgegebene Leistung in kW	Wirkungsgrad in %	Zusatz-Verluste in W
	V_s	E + R	V_r	Σ					
1,964	113	95	83	291	3,50	4,7	1,673	85,2	59
1,636	80	95	59	232	2,95	3,9	1,404	85,8	43
1,318	58	95	36	188	2,50	3,0	1,130	85,7	24
1,016	39	95	19	153	2,05	2,2	0,863	84,9	18
0,716	27	95	9	131	1,70	1,5	0,585	81,7	7
0,427	18	95	3	116	1,40	0,8	0,311	72,8	4
0,108	13	95	—	108	1,20	—	0	0	0

Der Widerstand betrug in warmem Zustand 3,08 Ohm/Phase. In der letzten Spalte sind die Zusatsverluste angegeben, die sich als Differenz der abgegebenen Leistungen nach Tabelle 2 und 1 ergeben.

Bei der direkten Messung kommen die Meßfehler mit erhöhtem Gewichte beim Verlustwerte zur Geltung. Bei der Leerlaufmethode beeinflussen die Meßfehler nur mit demselben Gewicht die Verluste. Die Leerlaufmethode kann daher bei unruhigem Netze und bei Fehlern der Meßinstrumente selbst dann noch ein brauchbares Resultat geben, wenn die direkte Messung bereits ganz unbefriedigend ausfallen würde.

Man bezeichnet die Summe der nach den Vorschriften I—III bestimmbaren Motorverluste als „meßbare" Verluste. Gemeint ist, daß diese Verluste „leicht

meßbar" sind. Man will hierdurch die Verluste der Leerlaufmethode unterscheiden von den schwer meßbaren „wirklichen" Verlusten.

4. Über Größe und Abhängigkeit der zusätzlichen Verluste.

Bei einem Motor seien die wirklichen und die nach der Leerlaufmethode meßbaren Verluste mit idealer Genauigkeit bestimmt. Müssen beide Verlustmessungen übereinstimmen? Das braucht nach den verschiedenen Festsetzungen von wirklichem und meßbarem Verluste nicht zuzutreffen und trifft auch nicht zu.

Es herrscht die allgemeine Ansicht, daß die wirklichen Verluste wenigstens für Vollast größer sind als die meßbaren. Unsere Versuche zeigen, daß das gleiche bei kleinen Drehstrommotoren für jede praktisch in Betracht kommende Last gilt. Die zusätzlichen Verluste sind immer positiv.

Wie groß sind sie nun im Vergleich zu den meßbaren? Mit anderen Worten: Um wieviel % ist die Verlustmessung nach der Leerlaufmethode fehlerhaft?

In der Literatur ist wenig zuverlässiges Zahlenmaterial hierüber zu finden. Eine Schätzung des Durchschnittswertes der zusätzlichen Verluste geben die R. E. M. vom Jahre 1924 in § 63. Hiernach sind sie bei Drehstrommotoren mit 0,5% der Leistungsaufnahme bei Nennlast einzusetzen. Dieser Wert ist im Laufe der Zeit mehrfach abgeändert worden. Er wurde im Jahre 1908 mit 1—2%, 1911 mit 0,5—1% und 1914 mit 0,4 bis 1,2% angegeben.

Tabelle 3.
Zusammenstellung der Zusatzverluste verschiedener Motoren.

Lfd. Nr.	Motor-Leistung PS	Spannung Volt	Stromstärke Amp.	Drehzahl je Min.	Leistungsfaktor cos φ	Wirkungsgrad %		Differenz der Wirkungsgrade	Zusätzliche Verluste	
						direkt	indirekt		% der Ges.-Verl.	Watt
1	0,33	215	0,98	956	0,82	80,5	82,8	2,3	12	7
2	0,50	115	2,97	941	0,79	79,0	79,8	0,8	4	4
3	0,50	115	3.15	951	0,75	78,5	79,2	0,7	3	3
4	0,50	115	3,25	952	0,71	80,0	81,3	1,3	7	6
5	0,50	115	3,13	965	0,71	83,0	83,8	0,8	5	4
6	0,50	215	1,40	953	0,86	82,2	83,7	1,5	8	7
7	0,50	220	1,45	952	0,79	84,0	86,9	2,9	18	13
8	0,50	220	1,55	953	0,78	80,3	81,7	1,4	7	6
9	0,75	220	2.05	960	0,85	83,5	86,5	3,0	18	20
10	1,0	215	3,08	956	0,76	85,0	86,4	1,4	9	12
11	1,0	220	2,75	966	0,82	85,7	87,2	1,5	11	13
12	1,0	220	3,07	963	0,73	86,2	88,4	2,2	16	19
13	2,0	190	6,90	970	0,75	85,7	88,4	2,7	19	46
14	2,0	210	5,80	1428	0,83	83,6	86,1	2,5	15	44
15	2,0	220	5,25	1470	0,83	89,0	91,2	2,2	20	36
16	2,0	220	5,33	1467	0,85	86,5	89,9	3,4	25	58
17	2,0	220	5,30	1465	0,86	84,0	88,8	4,8	30	84
18	2,0	380	3,18	1436	0,85	82,7	85,5	2,8	16	50
19	2,7	210	8,05	958	0,80	84,9	86,4	1,5	10	35
20	3,0	220	11,0	1407	0,70	75,0	75,8	0,8	3	23
21	3,0	220	8,20	1439	0,85	82,7	84,2	1,5	10	40
22	4,0	220	11.1	1441	0,83	83,7	85,9	2.2	13	77
23	7,5	380	11,1	1438	0,89	84,7	86,4	1,7	11	115
24	15,0	380	22,4	1444	0,86	87,2	88,2	1,0	8	126
25	20,0	500	21,7	1453	0,90	87,5	89,6	2,1	17	350

In der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt sind nun in den letzten Jahren zur Erledigung von Prüfungsanträgen der Industrie vielfach kleine Drehstrommotoren abgebremst worden. Die Messungen wurden absichtlich so sorgfältig wie möglich ausgeführt, damit als Nebenprodukt Erfahrungen über die zusätzlichen Verluste abfielen. Bis jetzt sind uns die zusätzlichen Verluste bei etwa 100 Drehstrommotoren bekannt, die den verschiedensten deutschen Fabriken entstammen.

In der Tabelle 3 (S. 557) haben wir unsere Ergebnisse für 25 Motoren zusammengestellt. Man findet daselbst außer den Haupteigenschaften der Motoren, bezogen auf die Vollast, die Abweichung der nach Leerlaufmethode und Bremsung gefundenen Wirkungsgrade, das Verhältnis der zusätzlichen zu den Gesamtverlusten (meßbare Verluste + Zusatzverluste) und schließlich den Absolutwert der zusätzlichen Verluste.

a) Fehler des nach der Leerlaufmethode gemessenen Wirkungsgrades bei Vollast.

Im Durchschnitt liegt für die Vollast der Wirkungsgrad der Leerlaufmethode um etwa 2% höher als der wirkliche Wirkungsgrad. In Ausnahmefällen steigt dieser Betrag bis zu 4% an. Bei 5 in Tabelle 3 aufgeführten Motoren gibt die Leerlaufmethode den Wirkungsgrad um rund 1,0%, bei 8 um rund 1,5%, bei 15 um rund 2%, bei 6 Motoren um rund 3% und bei 1 Motor um rund 5% zu hoch an. Die Angabe der Verbandsnormalien vom Jahre 1924, R. E. M. § 63 über zusätzliche Verluste mit 0,5% ist daher für kleine Drehstrommotoren sicherlich zu niedrig. Will man hier einen Durchschnittswert angeben, so müßte dafür 2% geschrieben werden.

Es kann bei der Anschaffung von Motoren vorkommen, daß man Wirkungsgrad und Anschaffungskosten gegeneinander abzuwägen hat. Ein Motor mit hohem Wirkungsgrad ist naturgemäß teurer als ein Motor mit niedrigem Wirkungsgrad. Dafür werden aber bei ihm die Kosten für verbrauchte Energie kleiner. Ob man sich daher bei einer Anlage für billigere Motoren mit schlechtem Wirkungsgrad zu entscheiden hat oder für teuere Motoren mit gutem Wirkungsgrad, hängt von dem Ausfall einer Wirtschaftlichkeitsberechnung ab. Wird der Wirkungsgrad der Leerlaufmethode zugrunde gelegt, so muß man sich, namentlich wenn Motoren verschiedener Fabrikate miteinander verglichen werden, bewußt sein, daß diese Grundlage um die oben angegebenen Beträge unsicher ist. Es ist möglich, daß zwei Motoren verschiedener Fabrikate, deren Wirkungsgrade nach der Leerlaufmethode gleich sind, in Wirklichkeit einen um etwa 2% verschiedenen Wirkungsgrad haben können. In solchen Fällen kann es sich als notwendig herausstellen, wenigstens einige beliebig herausgegriffene Motoren abbremsen zu lassen.

b) Fehler der Leerlaufmethode.

Wir berechneten bei unseren Messungen für jeden beobachteten Belastungspunkt zusätzliche und meßbare Verluste und drückten erstere in Prozent der letzteren aus. Hierdurch erhalten wir in Prozent den Fehler, um den die Verluste der Leerlaufmethode zu korrigieren sind, um die wirklichen Verluste zu erhalten. Dieser ist, wie vorauszusehen, von der Größe der Last abhängig. Bei Leerlauf ist er nach Definition Null. Für die Vollast ist er z. B. der Tabelle 3 zu entnehmen. Tragen wir für weitere Belastungspunkte diesen Fehler graphisch auf, so ergibt sich die „Fehlerkurve" der Leerlaufmethode. Sie ist, wie wir experimentell fanden, für das normale Belastungsgebiet des Motors praktisch eine Gerade.

Bild 1 zeigt für einen 2-PS-Motor bei einer günstig ausgefallenen Bremsung, wie nahe die gemessenen Punkte in die Gerade hineinfallen. Der Anstieg der Geraden ist von Motor zu Motor verschieden. Ist der Fehler der Leerlaufmethode



bei einer gewissen Last — etwa bei Vollast — gegeben oder angenommen, so kann man mit Hilfe dieser Geraden die Messung bei beliebiger Last korrigieren.

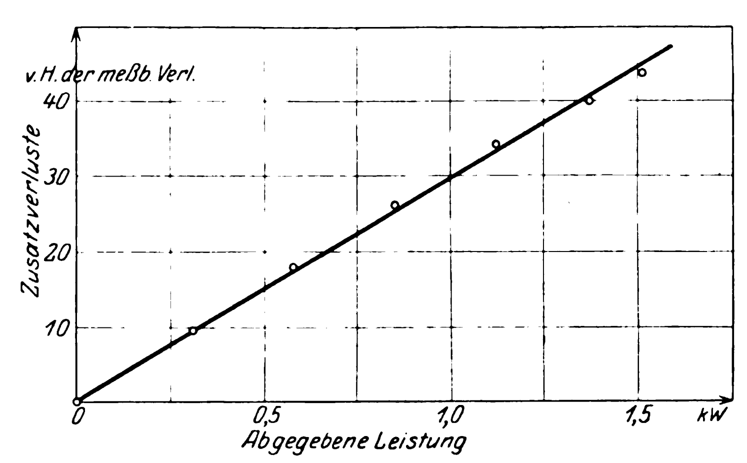


Bild 1. Fehlerkurve der Leerlaufmethode.

c) Zusätzliche Verluste und Stromstärke.

Trägt man den Absolutwert der zusätzlichen Verluste in Abhängigkeit vom Quadrate der Stromstärke auf, so erhält man ebenfalls eine Gerade. Naturgemäß schneidet diese auf der Abszissenachse das Quadrat des Leerlaufstromes J_0 ab. Unsere Versuche besagen somit, daß man für die zusätzlichen Verluste V_z den Ansatz

$$V_z = c\,(J^2 - J_0^2)$$

zu machen hat, wobei c eine Konstante bedeutet. Eine Angabe über die Richtungskonstante c der Geraden kann nicht gemacht werden; auch sie schwankt von Motor zu Motor.

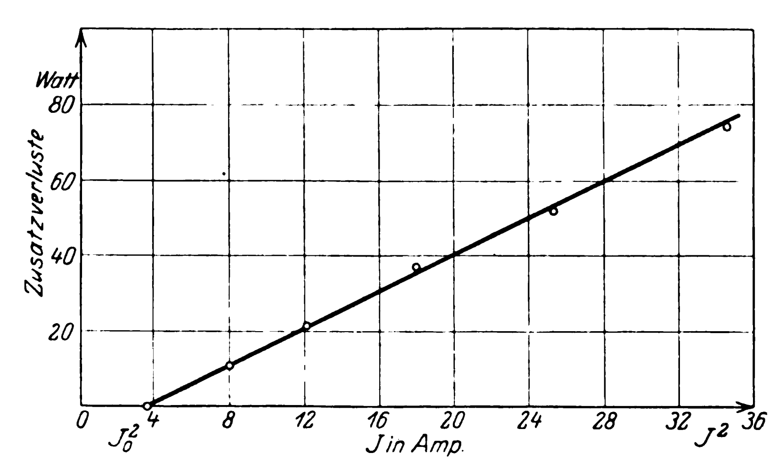


Bild 2. Abhängigkeit der Zusatzverluste von der Stromstärke.

Bild 2 gibt am Beispiel eines 2-PS-Motors Aufschluß über die Genauigkeit, mit welcher der gradlinige Anstieg erfüllt ist. Natürlich hat man sowohl die „Fehlergerade“ wie auch die hier gefundene „Verlustgerade“ als erfahrungsgemäß gefundene Annäherungsgesetze zu betrachten.

d) Unabhängigkeit der zusätzlichen Verluste von der Induktion der Grundmagnetisierung.

Es lag die Vermutung nahe, daß die zusätzlichen Verluste von der Magnetisierung des Eisens abhängig seien. Um hierüber Gewißheit zu erlangen, wurde ein und derselbe Motor bei den Spannungen 220, 380 und 500 Volt abgebremst. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 zusammengestellt. Die maximalen Induktionen verhalten sich bei diesen Versuchen wie 2,2 : 3,8 : 5,0.

Tabelle 4.
Zusatzverluste in Abhängigkeit von Spannung und Frequenz.

Zugeführte Leistung Watt	Abgegebene Leistung Watt	Meßbare Verluste Watt	Zusatz-Verluste Watt	Schlupf %	Strom Amp.	cos φ
1. 220 Volt, 50 Per.						
438	295	96	47	8,6	1,37	0,84
346	254	59	33	6,5	1.05	0,86
272	207	46	19	5,8	0,84	0,85
203	161	33	9	4,1	0,63	0,84
143	113	26	4	2,8	0,48	0,78
20	—	20	—	—	0,28	0,18
2. 380 Volt, 50 Per.						
1177	847	231	99	9,6	2,10	0,85
918	700	153	65	6,9	1,64	0,85
680	538	105	37	5,2	1,23	0,84
463	370	73	20	3,2	0,91	0,77
253	195	55	3	1,6	0,65	0,59
49	—	49	—	—	0,51	0,15
3. 500 Volt, 50 Per.						
1105	892	164	49	4,7	1,57	0,81
891	725	132	34	3,6	1.33	0,77
681	552	109	20	2,6	1,12	0,70
481	376	94	11	1,7	0,94	0,59
281	196	85	0	0,9	0,81	0,40
81	—	81	—	—	0,74	0,13
4. 300 Volt, 39,5 Per.						
932	656	204	72	10,9	2,10	0,85
768	560	153	55	9,6	1,72	0,85
648	493	114	41	7,3	1,47	0,85
500	391	83	26	5,8	1,17	0,82
327	257	58	12	3,4	0,85	0,74
36	—	36	—	—	0,52	0,13
5. 456 Volt, 60 Per.						
1102	855	161	86	5,6	1,62	0,86
877	697	122	58	4,3	1,31	0,85
664	535	95	34	3,1	1,05	0,80
459	367	76	16	2,0	0,81	0,72
263	196	65	2	1,1	0,63	0,53
61	—	61	—	—	0,51	0,15

In Bild 3 ist nun der Absolutwert der zusätzlichen Verluste in Abhängigkeit von der Belastung aufgetragen worden. Da der Leerlaufstrom bei den einzelnen Spannungen verschieden ausfällt und die zusätzlichen Verluste definitionsgemäß beim Leerlaufstrom J_0 gleich Null sein müssen, so ist als Abszisse der Wert $J^2 - J_0^2$ aufgetragen worden. Hierdurch erleichtern wir den Vergleich, da nun alle drei Verlustgeraden vom Nullpunkte ausgehen müssen. Die gemessenen zusätzlichen Verluste bei allen drei Spannungen fallen so nahe zusammen, daß es keinen Zweck hatte, im Bild 3 verschiedene Gerade zu zeichnen. Die ausgezogene Linie gibt mit befriedigender Genauigkeit das Meßresultat bei allen drei Spannungen wieder und ist praktisch eine Gerade.

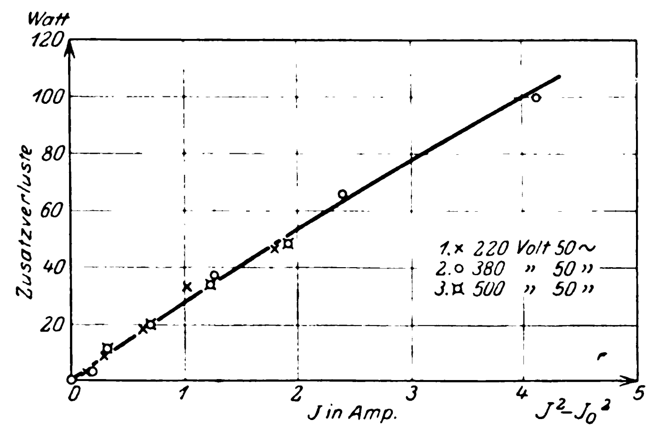


Bild 3. Abhängigkeit der Zusatzverluste von der Spannung.

Wir erhalten somit das überraschende Resultat, daß die zusätzlichen Verluste von der Höhe der Induktion, also von der Spannung — wenigstens in dem bei Drehstrommotoren vorkommenden Magnetisierungsbereich — unabhängig sind.

Die Versuche wurden an verschiedenen Motoren wiederholt und ergaben die gleichen Resultate.

e) Abhängigkeit der zusätzlichen Verluste von der Frequenz.

Der gleiche Motor wie bei den Versuchen mit verschiedener Spannung wurde mit den Frequenzen 40, 50 und 60 Per/s betrieben. Damit bei diesen Versuchen

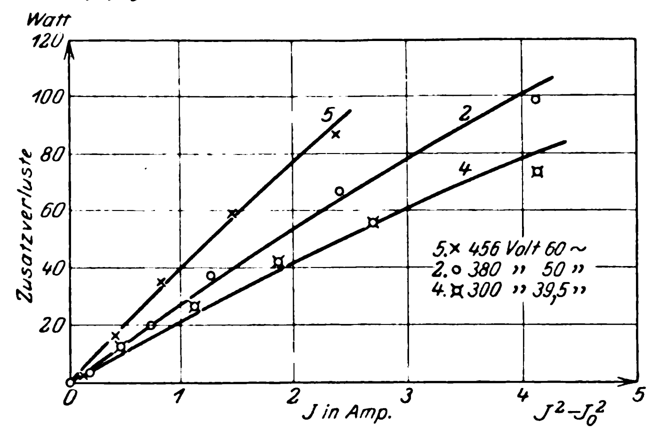


Bild 4. Abhängigkeit der Zusatzverluste von der Frequenz.

dieselbe mittlere Induktion vorhanden war, wurde die Klemmenspannung auf 300, 380 und 456 Volt einreguliert. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 4 für

einen 0,75-PS-Motor (380 Volt $\downarrow_\lambda$) zusammengestellt. Auch in diesem Falle sind in Bild 4 wie vorhin die zusätzlichen Verluste in Abhängigkeit von der Differenz der Quadrate $J^2 - J_0^2$ (J = Belastungsstrom, J_0 = Leerlaufstrom) aufgetragen worden.

Unsere Versuche ergaben nun einen deutlichen Anstieg der zusätzlichen Verluste mit der Frequenz. Z. B. findet man für gleiche Belastung

bei der Frequenz 40 die zusätzlichen Verluste zu 51 Watt,
" " " 50 " " " " 66 "
" " " 60 " " " " 90 " .

Aus diesen Zahlenwerten geht hervor, daß die zusätzlichen Verluste rascher als proportional aber langsamer als quadratisch mit der Frequenz wachsen. Auch dieses Resultat wurde an mehreren Motoren bestätigt.

5. Sitz und Ursache der zusätzlichen Verluste.

Wo stecken nun die zusätzlichen Verluste, deren Größe und Eigenschaften wir eben kennen gelernt haben? Durch welche physikalischen Vorgänge werden sie hervorgerufen?

a) Verluste in Lagerschilden.

Wir vermuteten, daß die Zusatzverluste zum Teil in Verlusten in den Lagerschilden zu suchen seien. Die Wickelköpfe kommen bei der geschlossenen Bauart den Maschinenschilden sehr nahe. Es ist denkbar, daß ihre magnetischen Felder in die Lagerschilde hineinreichen und dort merkbar mit der Belastung ansteigende Verluste verursachen.

Führt man bei Stillstand des Rotors eine Leistungsmessung mit oder ohne Lagerschilde aus, so erhält man jedoch bei gleicher Statorstromstärke praktisch dieselben Werte. Wir maßen auch die Leistung, die bei herausgenommenem Rotor vom Stator, einmal bei entfernten, einmal bei aufgeschraubten Maschinenschilden aufgenommen wurde. Bei gleicher Statorstromstärke ergaben sich auch hierbei keine Unterschiede. Im Einklang mit diesen Versuchen steht eine Bremsung eines kleinen Drehstrommotors offener Bauart, bei dem der Kranz des Maschinenschildes so weit vom Wickelkopf entfernt war, daß nur ein schwaches magnetisches Feld in ihm entstehen konnte. Die zusätzlichen Verluste dieses Motors offener Bauart waren von derselben Größenordnung wie bei der geschlossenen Bauart. In den Maschinenschilden stecken daher die zusätzlichen Verluste nicht.

Wir wollen nun zusehen, ob und inwieweit die Ansätze I—III der Leerlaufmethode mangelhaft sind.

b) Stromwärmeverluste im Stator.

Nach Ansatz I werden die Statorkupferverluste V_s aus dem Gleichstromwiderstand r und dem Statorstrom J berechnet. $V_s = 3\,r\,J^2$. Der Drehstrommotor wird aber mit Wechselstrom gespeist. Es ist somit richtiger, den Wechselstromwiderstand und nicht den Gleichstromwiderstand einzusetzen. Die Leerlaufmethode vernachlässigt grundsätzlich die durch Stromverdrängung hervorgerufenen Statorkupferverluste. Dies mag bei großen Drehstrommotoren und großen Kupferquerschnitten bedenklich sein. Bei den kleinen, von uns untersuchten Motoren mit kleinen Kupferquerschnitten ist es ohne Belang. Nach den Formeln von Field-Emde-Sommerfeld würden beispielsweise die Statorkupferverluste bei Vernachlässigung der Stromverdrängung nur um etwa 1—2 ‰ fehlerhaft sein.

c) Reibungsverluste.

Der Ansatz II bestimmt streng nur bei Leerlauf die Reibungs- und Eisenverluste. Ist nun die Annahme der Leerlaufmethode, daß sich beide mit der

hinzutretenden Belastung nicht ändern sollen, berechtigt? Diese Frage ist sicher für die Reibungsverluste zu bejahen. Nach den Versuchen von Dettmar sind diese unabhängig vom Lagerdruck. Sollte sich daher der Lagerdruck mit der Belastung ändern, etwa durch den Riemenzug, so hat dies auf die Reibungsverluste keinen Einfluß.

Die Reibungsverluste ändern sich aber mit der Temperatur und mit der Drehzahl. Die erhöhte Lagertemperatur infolge der Zunahme der Erwärmung bei Belastung und die infolge der Schlüpfung abnehmende Drehzahl bewirken eine kleine Abnahme, jedenfalls keine Erhöhung der Reibungsverluste und damit auch keine positiven Zusatzverluste. Man hat daher darauf zu achten, daß beim Leerlaufversuch die Lager dieselbe Temperatur haben wie bei Belastung. Der Ansatz II kann daher für die Reibungsverluste als einwandfrei angesehen werden.

d) Eisenverluste.

Nicht so einfach läßt sich die Frage beantworten, ob die Eisenverluste bei Leerlauf und Belastung dieselben sind. Auf den ersten Blick scheint man auch sie bejahen zu müssen. Der Spannungsabfall durch Widerstand und Streuung ist klein. Der Induktionsfluß sinkt daher mit steigender Belastung des Hauptfeldes nur wenig herab. Die mit ihm verbundenen Eisenverluste tun das gleiche. Die kleinen Eisenverluste des kleinen Streufeldes steigen dagegen mit der Belastung an. Der gesamte Eisenverlust sollte hiernach praktisch konstant bleiben.

Diese Schlußweise ist jedoch lückenhaft. Sie berücksichtigt nicht, daß sich in den Zähnen Felder hoher Frequenz ausbilden, die mit der Belastung anwachsen. Wenn bei Leerlauf die Zähne des Rotors am Stator vorbeigleiten, steht einem Statorzahne bald ein Rotorzahn, bald eine Rotornut gegenüber. Es muß daher der magnetische Widerstand des durch den Statorzahn gehenden magnetischen Flusses zwischen einem größten und kleinsten Werte schwanken. Die Frequenz der Schwankung ist durch die Zahl der Rotorzähne gegeben, die in der Sekunde an einer Statorstelle vorbeigleiten. Sie ist offenbar

$$\nu = z \cdot \frac{n}{60}.$$

wenn z = Zähnezahl des Rotors; n = Umdrehungszahl bedeutet.

Dies ist eine Ursache für die Zahnpulsationen. Bei Belastung tritt eine weitere hinzu.

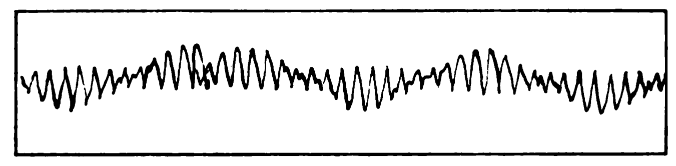
Die auf einen Statorzahn wirkende magnetomotorische Kraft stammt aus der gemeinsamen magnetischen Wirkung des Stator- und Rotorstromes. Nun ändert sich aber die gegenseitige Lage von Stator- und Rotorleitern. Wir wählen irgendeine Anfangsstellung von Stator- und Rotorleitern aus. Erst wenn der Rotor um eine Zahnteilung des Stators vorwärts geschoben worden ist, erhalten wir wieder dieselbe räumliche Kupferverteilung. Diese Schwankungen in der räumlichen Anordnung der Kupferverteilung müssen mit entsprechenden Schwankungen der magnetomotorischen Kraft verknüpft sein. Die Frequenz ist auch hier wieder durch den Ausdruck $\nu = z \cdot \frac{n}{60}$ gegeben.

Ein Beispiel möge das Zustandekommen dieser Feldschwankungen noch verdeutlichen. Solange zwei Spulen, die transformatorisch aufeinander einwirken, gegeneinander nicht bewegt werden (räumliche Kupferverteilung konstant), hat die magnetomotorische Kraft überall die Frequenz des aufgedrückten Wechselstromes. Sobald aber das induzierte System periodisch hin- und herbewegt wird (räumliche Verteilung des Kupfers veränderlich), lagert sich über die „durchschnittliche“ bereits bekannte magnetomotorische Kraft eine solche anderer Frequenz. Diese ist durch die mechanisch hervorgerufene Änderung der Kupferverteilung bestimmt.

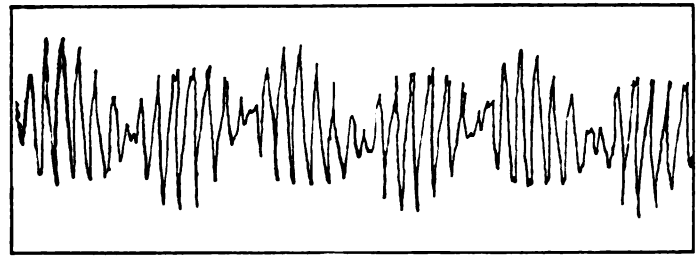


α) Induktionsschwankungen.

Die Oszillogramme Bild 5a u. b zeigen die Induktionsschwankungen eines Zahnes bei Leerlauf und bei Vollast. Sie sind dadurch aufgenommen worden, daß um eine Zahnkrone eines Statorzahnes einige Windungen dünnen Drahtes gewickelt und mit dem Oszillographen verbunden wurden. Im Einklang mit unseren Überlegungen steigen die Oberschwingungen mit der Belastung an. Sie lagern sich über die viel langsamere Grundschwingung der Induktion. Diese ist im Oszillogramm bedeutend kleiner als die Oberwelle. Das kommt daher, daß im Oszillogramm nicht unmittelbar die Induktion, sondern die induzierte EMK aufgezeichnet wird. Bei dieser wird die n-te Oberwelle mit dem n-fachen Gewichte herausgehoben. Unsere Oszillogramme vergrößern also die Oberwellen der Induktion auf das n-fache. Wir erhalten daher erst einen richtigen Vergleich der Schwankung der Grund- und Obermagnetisierung, wenn wir die Wellen der letzteren auf den n-ten Teil verkleinern.



a Leerlauf.



b Vollast.

Bild 5a und b. **Induktionsschwankungen in einem Statorzahn bei offenen Rotornuten.**

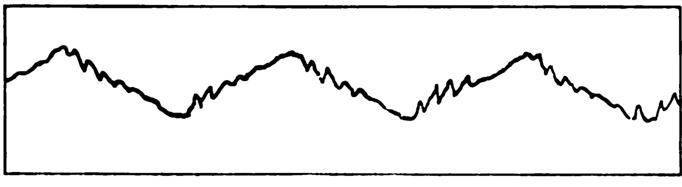
Für andere Zähne ergeben sich ganz ähnliche Oszillogramme, wie die hier gezeigten. Wir fanden bei 6 benachbarten Zähnen eines Motors die in Tabelle 5 angegebenen Werte für das Amplitudenverhältnis der Ober- und Grundschwingung.

Tabelle 5.

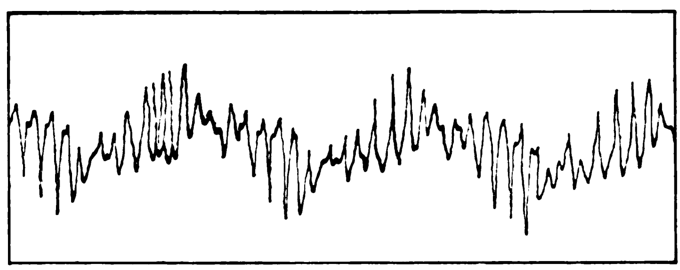
Motor 1. **Amplitudenverhältnis bei offenen Rotornuten.**

Zahn	Amplitudenverhältnis in %		
	Leerlauf	Vollast	Überlast von 50%
1	13	25	39
2	16	28	42
3	20	31	43
4	21	33	47
5	14	26	39
6	13	23	34
Mittel:	16	28	41

Die maximale Zahninduktion betrug dabei 3600 CGS-Einheiten. Die Oszillogramme Bild 5a u. b gelten für einen Motor mit Nutenschlitzen in Rotor. Die Oszillogramme Bild 6a u. b sind an einem Motor mit geschlossenen Rotornuten aufgenommen. Der Rotor ist hier ganz glatt. Infolge davon sind die Induktionsschwankungen bei Leerlauf, die wesentlich durch Änderungen des magnetischen Widerstandes hervor gerufen werden, beinahe vollkommen unterdrückt. Bei Belastung, wo sie durch Änderungen der magnetomotorischen Kraft verursacht werden, bilden sie sich wieder kräftig aus.



a Leerlauf.



b Vollast.

Bild 6a und b. Induktionsschwankungen in einem Statorzahn bei geschlossenen Rotornuten.

Durch Verwendung völlig geschlossener Nuten im Rotor kann man wohl die Zahnpulsationen bei Leerlauf, aber nicht bei Belastung vermeiden. Bei 6 benachbarten Zähnen fanden wir für das Amplitudenverhältnis der Ober- und Grundschwingung die in Tabelle 6 angegebenen Werte.

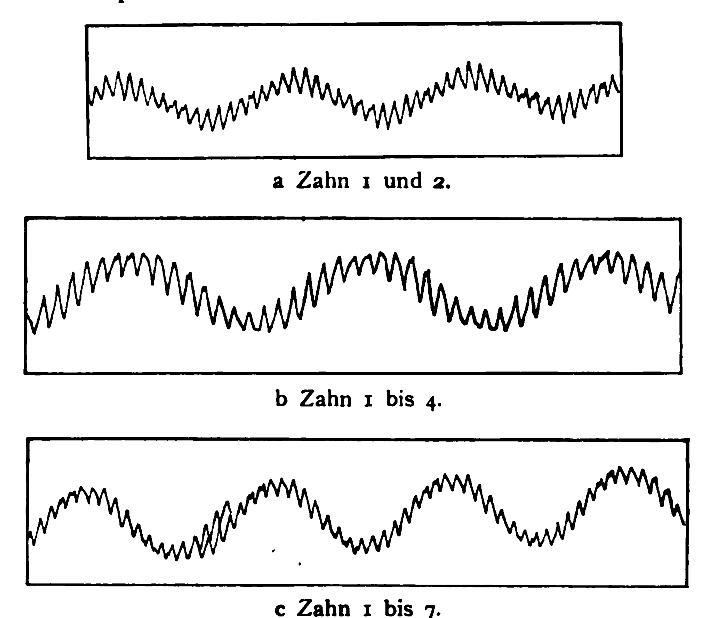
Tabelle 6.

Motor 2. Amplitudenverhältnis bei geschlossenen Rotornuten.

Zahn	Amplitudenverhältnis in %		
	Leerlauf	Vollast	Überlast von 50%
1	2	7	11
2	2	5	7
3	2	7	10
4	2	7	10
5	2	6	9
6	2	7	10
Mittel:	2	7	10

Wenn auch der Induktionsfluß der einzelnen Kraftröhre, die durch einen Statorzahn geht, schwankt, so braucht das gleiche noch nicht von den gesamten Induktionsflusse eines Poles zu gelten. Es kann die Verstärkung des Flusses eines Zahnes durch die Schwächung des Flusses eines anderen Zahnes ausgeglichen werden. Wir

haben es alsdann mit einer flackernden Kraftlinienverteilung zu tun. Dies trifft bei unseren Motoren in der Tat zu. Beweise hierfür sind die Oszillogramme Bild 7a b u. c, in denen der Gesamtfluß der Zähne 1 und 2, 1, 2, 3 und 4; 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 aufgenommen ist. Mit wachsender Zähnezahl flachen sich die Oberwellen immer mehr ab. Die Grundwelle tritt stärker hervor. Schließlich müssen die Oszillogramme in die Phasenspannung übergehen, in der von den Oberwellen der Zahninduktion keine Spur mehr zu erkennen ist.



a Zahn 1 und 2.

b Zahn 1 bis 4.

c Zahn 1 bis 7.

Bild 7a, b und c. Induktionsverteilung in mehreren Statorzähnen bei Leerlauf.

Wir wollen die Größe der durch Zahnpulsationen verursachten Verluste roh abschätzen. Dabei beschränken wir uns auf die Wirbelstromverluste. Diese mögen für die Grundmagnetisierung G, für die Obermagnetisierung g heißen. Für eine erste Annäherung sei es erlaubt, g proportional dem Quadrate der Induktionsschwankung und der Frequenz zu setzen. Diese Annahme führt auf den Ausdruck:

$$g = G \cdot \lambda^2 \left(\frac{\nu}{f}\right)^2,$$

$\lambda =$ Verhältnis der Amplitude der Oberwelle zur Grundwelle,

$\nu =$ Frequenz der Oberwelle,

$f =$ Frequenz der Grundwelle.

Für den Motor 1 ist nach Tabelle 5 im Mittel für Leerlauf $\lambda = 0{,}16$, für Vollast $\lambda = 0{,}28$ und $\frac{\nu}{f} = 16$ zu setzen. Die Wirbelstromverluste g wachsen daher von Leerlauf bis Vollast um den Betrag

$$\Delta g = G \cdot (0{,}28^2 - 0{,}16^2) \cdot 16^2 = G \cdot 13,$$

also um den 13fachen Betrag der Wirbelstromverluste der Grundwelle. Die Oberwellen können daher in den Zähnen größere Verluste als die Grundwelle verursachen.

Die Verluste der Zahnpulsationen sind gegen die bei Leerlauf gemessenen Eisenverluste nicht zu vernachlässigen. Die gesamten Eisenverluste steigen mit der Belastung an.

Der Ansatz II der Leerlaufmethode auf S. 555 ist daher nicht richtig, wenn wir ihn für die gesamten Eisenverluste gelten lassen. Er trifft nur zu für den Teil der Eisenverluste, der durch die Magnetisierung der Grundwelle verursacht wird. Für diesen ist auch die Beweisführung auf S. 556 zugeschnitten.

Wir teilen nun die gesamten Eisenverluste in drei Teile:

1. in den Eisenverlust E_1 der Grundmagnetisierung,
2. in die Pulsationsverluste E_2 bei Leerlauf,
3. in den Zuwachs E_3 den die Pulsationsverluste bei Belastung erfahren.

Beim Leerlaufversuch wird die Summe $E_1 + E_2 = E$ gemessen. Der Teil E_2 bleibt unbestimmt.

Die Eisenverluste E_1 werden unmittelbar von der elektrischen Energie gedeckt, die den Klemmen des Drehstrommotors zufließt. Dagegen entnehmen die Eisenverluste E_2 und E_3 ihre Energie unmittelbar der lebendigen Kraft des Rotors und nur mittelbar der Klemmenenergie. Wir sahen, daß sich die Flußschwankungen im einzelnen Zahn stark ausbilden, daß sie aber für mehrere benachbarte Zähne durch gegenseitigen Ausgleich schwächer ausfallen und daß von ihr in der Phasenspannung nichts mehr zu entdecken ist. Vgl. Bild 7. Die Phasenspannung merkt nichts von den Zahnschwankungen und hat daher keinen Anlaß, auf direktem elektrischem Wege Energie zur Deckung der Zahnpulsationsverluste zur Verfügung zu stellen. Es bleibt daher nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß die durch die Oberwellen hervorgerufenen Pulsationsverluste aus der Energie des Rotors stammen, dem seinerseits die Energie von den Klemmen des Motors aus zuströmt.

Ein Beispiel möge diese Aussage stützen: Wir schichten aus U-förmigen Blechen ein Blechpaket auf. Die Stirnseiten versehen wir mit einer Zahnung, den Bügel mit einer Magnetisierungswicklung.

Der magnetische Kreis soll durch einen ebenfalls U-förmig gebogenen, schmalen Blechbügel geschlossen werden, der mit seiner Stirnseite gerade eine Zahnteilung überdeckt. Wir beschicken die Magnetisierungswicklung mit Wechselstrom. Solange der Bügel in mäßigen Grenzen hin- und herbewegt wird, ändern wir den Fluß der Spule nicht. Die Spule wird daher von Änderungen der Lage des Bügels nichts merken. Dagegen ändert sich wohl die Feldverteilung in den Zähnen. Hierdurch werden Verluste verursacht. Augenscheinlich müssen diese durch die mechanischen Kräfte am Bügel bestritten werden. Auch hiermit werden somit nur die mit der Frequenz des Magnetisierungsstromes der Spule verbundenen Verluste von der Spule aus gedeckt. Die durch Magnetisierung mit einer anderen Frequenz entstehenden Verluste werden mechanisch bestritten.

Die Verluste E_3 werden in Ansatz II der Leerlaufmethode unterdrückt. Wir sind deshalb so ausführlich auf ihre Herkunft eingegangen, weil die Möglichkeit bestehen könnte, daß sie als vom Rotor aus gedeckte Verluste im Ansatz III der Leerlaufmethode auf S. 555 enthalten sind. Es ist daher der Ansatz III, der auf die Bestimmung der Rotorverluste abzielt, einer Kritik zu unterziehen.

Die Verluste des Ansatzes III sind definiert als das Produkt aus übertragener Leistung und Schlupf. Welche physikalischen Verluste werden durch ihn getroffen?

Wie bereits früher mitgeteilt, ist der Ansatz III aus der Überlegung entstanden, daß am Stator und Rotor dasselbe Drehmoment angreift, daß dieses Drehmoment am Stator mit der synchronen, am Rotor mit der wirklichen Drehzahl wandert, daß Leistungsabgabe des Stators und Leistungsabgabe des Rotors sich daher wie synchrone und asynchrone Drehzahl verhalten müssen. Hieraus folgt dann für die Differenz beider Leistungen, also für den Rotorverlust, der Ausdruck III. Auf den ersten Blick erscheint diese Überlegung einwandfrei. Wir sehen auch nicht, daß sie irgendwo in der Literatur angezweifelt worden ist. Dennoch ist sie mit Vorsicht zu benutzen, wie der folgende Gedanke zeigt.



Wir bringen fest am Stator eine Kupferscheibe an. Vor ihr lassen wir einen mit dem Rotor verbundenen Elektromagneten rotieren, der nach Belieben erregt wird. Dadurch kommen in der Kupferscheibe Wirbelströme und eine Bremsung des Rotors zustande. Wir erhalten somit künstlich in der Scheibe und damit im Stator Verluste, die vom Rotor aus gedeckt werden. Diese beliebig veränderlichen Verluste werden sicherlich nicht durch den Ansatz III berücksichtigt. Trotzdem sind auch jetzt noch die Drehmomente, die auf Stator und Rotor wirken, einander gleich, weil das Drehmoment der Scheibe (Stator) dem des Elektromagneten (Rotor) gleich ist.

Weshalb fallen die Wirbelstromverluste der Kupferscheibe nicht unter den Ansatz III? Der Grund besteht darin, daß die zweite Hauptvoraussetzung des Ansatzes III, daß die Kräfte an der mit dem Stator fest verbundenen Bremsscheibe mit der synchronen Drehzahl umlaufen sollen, nicht erfüllt ist. Diese Kräfte drehen sich vielmehr im vorliegenden Fall mit der Rotorgeschwindigkeit, also asynchroner Drehzahl.

Der Mangel des Ansatzes III liegt nun klar zutage. Er setzt voraus, daß am Stator nur solche Kräfte angreifen, die mit synchroner Geschwindigkeit umlaufen. Das ist aber nicht der Fall, denn die durch die Rotorbewegung hervorgerufenen Schwankungen der Induktion sind mit Kräften verbunden, die am Stator mit asynchroner Geschwindigkeit entlanggleiten. Gerade diese decken aber die Zahnpulsationsverluste. Der Ansatz III kann daher die Zahnpulsationsverluste nicht mit enthalten. Wir wollen annehmen, wir könnten in jedem Augenblick die am Stator angreifenden Kräfte angeben und hätten jede Kraft durch einen Pfeil dargestellt. Am Rotor haben wir dann genau das entsprechende Pfeilbündel zu zeichnen. Ein Teil der Pfeile des Stators würde mit synchroner Geschwindigkeit wandern. Nur die Verluste, die durch dieses Kräftesystem gegeben sind, werden durch den Ansatz III erfaßt. Die Verluste, die durch den Rest der Kräftepfeile gegeben werden, kommen dagegen in der Leerlaufmethode überhaupt nicht zum Ausdruck.

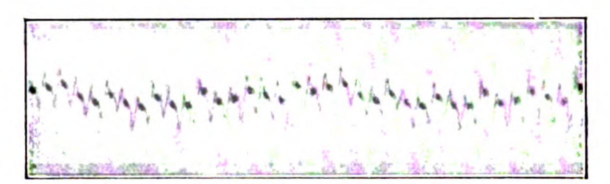
β) Stromschwankungen im Rotor.

Mit den Induktionsschwankungen der Zähne müssen Stromschwankungen in den Stäben von Käfigankern verknüpft sein. Die Oszillogramme in Bild 8 und 9 zeigen die Stromschwankungen für die bereits auf Induktionsschwankungen untersuchten Motoren 1 mit Rotornuten und 2 ohne Rotornuten.

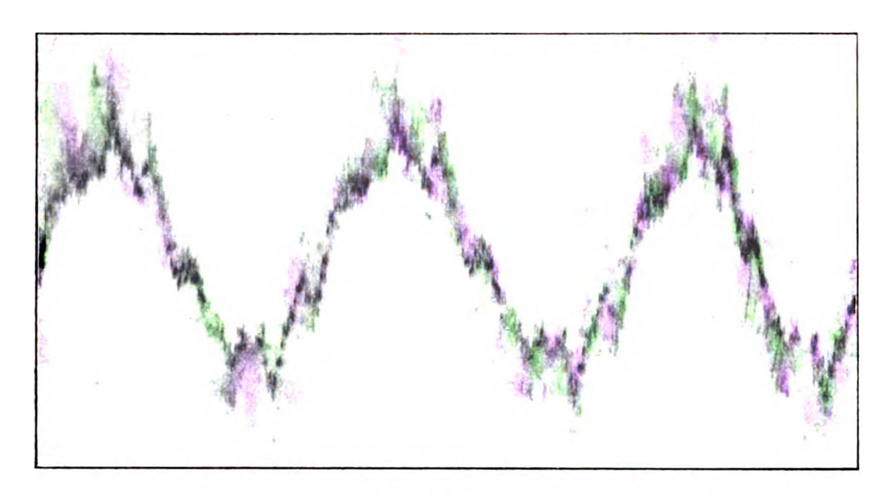
Sie sind auf folgendem Wege aufgenommen worden. Ein beliebiger Rotorstab wurde mit einer Bohrung von 2 mm versehen, in die zur Isolierung ein dünnes Glasröhrchen gesteckt wurde. An beiden Enden des Stabes wurden Hilfsdrähte angeschraubt. Der eine wurde durch das Glasröhrchen hindurchgesteckt und nach sorgfältiger Verdrillung mit dem anderen Hilfsdraht durch eine weitere Bohrung in der Rotorwelle gezogen. Beide Drähte wurden zu zwei Schleifringen geführt und dort angeschraubt. Die Schleifringe besaßen Rillen, in die an einem Klemmbrett befestigte weiche Kupferdrähte hineingelegt wurden. Der Auflagedruck wurde durch Anspannen geregelt. Vom Klemmbrett führte eine Leitung zum Oszillographen. Durch besondere Versuche haben wir uns davon überzeugt, daß der Kontakt an den Schleifringen so gut war, daß durch ihn keine Ausschläge des Oszillographen hervorgerufen wurden.

Die Schwingungen der Stromoberwellen erfolgen rasch und sind im Vergleich zur Stromgrundwelle nicht klein. Ihre Amplitude beträgt beim Oszillogramm in Bild 8 etwa 0,7, beim Oszillogramm in Bild 9 etwa 0,3 der Grundwelle. Es müssen daher die Verluste der Oberwellen etwa nur $^1/_5$ bis $^1/_9$ der Jouleschen Verluste der Grundwelle betragen, die wiederum durch die Schlupfverluste gegeben sind.



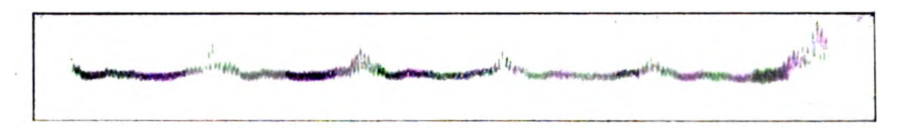


a Leerlauf.

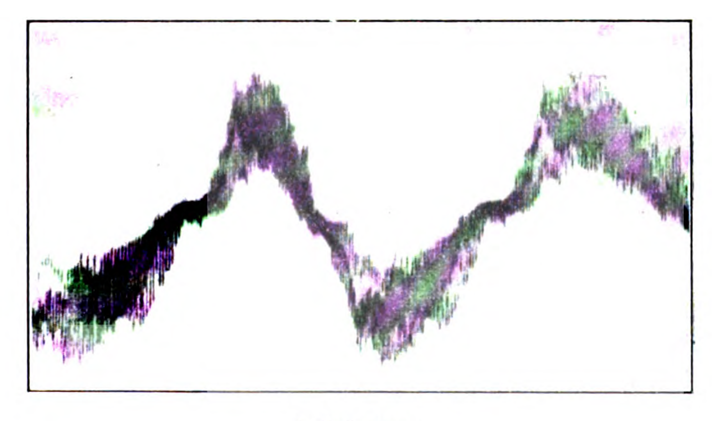


b Belastung.

Bild 8a und b. Stromschwankungen im Rotor mit Nuten.



a Leerlauf.



b Belastung.

Bild 9a und b. Stromschwankungen im Rotor ohne Nuten.

Die Jouleschen Verluste der Stromoberwellen werden durch die Drehung des Rotors hervorgerufen. Auch sie werden ebensowenig wie die Zahnpulsationsverluste durch den Ansatz III der Leerlaufmethode berücksichtigt. Sie sind zusätzliche Verluste.



In welchem Verhältnis stehen sie zu den gesamten zusätzlichen Verlusten? Bei dem Motor 1 betragen die Schlupfverluste bei Vollast 28 Watt, die zusätzlichen Verluste 37 Watt, die Verluste der Stromoberwellen $28 \cdot {}^1/_5 = 5—6$ Watt. Dies ist etwa der 6. Teil der gesamten zusätzlichen Verluste. Die entsprechende Rechnung beim Motor 2 ergab, daß die Jouleschen Verluste der Stromoberwellen etwa den 4. Teil der gesamten zusätzlichen Verluste ausmachen.

Wir sind nun am Ziel und fassen unser Urteil über die Leerlaufmethode, wie folgt, zusammen: Alle durch die Bewegung des Rotors hervorgerufenen Verluste durch Oberwellen der Magnetisierung und des Rotorstromes, soweit sie nicht im Leerlauf bereits vorhanden sind, werden von der Leerlaufmethode nicht berücksichtigt und sind zusätzliche Verluste. Die zusätzlichen Verluste der Oberströme sind klein im Vergleich zu denen der Obermagnetisierung. In Annäherung bestehen die zusätzlichen Verluste in erhöhten Eisenverlusten der Stator- und Rotorzähne.

Setzt man die Verluste der Obermagnetisierung proportional dem Quadrat der Oberwelle der Magnetisierung und die Oberwelle ihrerseits proportional dem Statorstrom, so folgt, daß die zusätzlichen Verluste quadratisch mit dem Statorstrome ansteigen müssen. Unter diesen naheliegenden Voraussetzungen erhalten wir die unter 4c gefundene Abhängigkeit bestätigt.

Die Grundwelle allein würde eine Magnetisierungsschleife von der bekannten Doppel-S-Form hervorrufen. Die Oberwellen ändern sie, kleine Zusatzschleifen hinzufügend, ab. Wenn wir die Grundmagnetisierung, wie dies bei unseren Verlusten der Fall war, in relativ kleinen Grenzen ändern, in denen sich Sättigungserscheinungen des Eisens noch nicht wesentlich bemerkbar machen, so ist anzunehmen, daß bei vorgegebener Amplitude der magnetomotorischen Kraft Höhe und Fläche der Zusatzschleifen von der Höhe der Grundmagnetisierung ziemlich unabhängig ausfallen. Mit dieser Voraussetzung erhalten wir die unter 4d bei den Motoren beobachtete Unabhängigkeit der zusätzlichen Verluste von der Induktion bzw. Klemmenspannung des Motors.

Die zusätzlichen Eisenverluste bestehen in Hysterese- und Wirbelstromverlusten. Die ersten wachsen proportional, die anderen höchstens quadratisch mit der Frequenz an. Die zusätzlichen Verluste sollten somit langsamer als quadratisch mit der Frequenz ansteigen. Nun treten die Hystereseverluste bei den Frequenzen der Oberwellen hinter den Wirbelstromverlusten sicherlich bedeutend zurück. Soll daher die beobachtete Abhängigkeit der zusätzlichen Verluste von der Frequenz erklärbar sein, so müssen bereits die Wirbelstromverluste allein rascher als proportional, langsamer als quadratisch ansteigen. Dies ist — wie wir jetzt zeigen wollen — nach der Theorie bei den Frequenzen der Oberwellen zu erwarten. Nach Thomson kann man für die Wirbelstromverluste Q in einem Zentimeterwürfel einer Platte von der Dicke δ/cm schreiben

$$Q = \frac{\mathfrak{H}^2 \cdot \psi(\xi)}{\varrho \cdot \delta^2 \cdot 0{,}4\,\pi^2},$$

wobei

$$\xi = \gamma \sqrt{\frac{n}{50} \cdot \frac{\varrho_K}{\varrho} \cdot \mu}$$

gesetzt ist.

Ferner bedeuten

$\mathfrak{H}$ = magnetische Feldstärke,
ϱ = spezifischer Widerstand des Eisens,
ϱ_K = spezifischer Widerstand des Kupfers,
μ = Permeabilität.

Die Funktion $\psi(\xi)$ ist dieselbe, die bei der Berechnung von Wirbelstromverlusten in Stäben von Nutenankern vorkommt. Ihr mathematischer Ausdruck lautet:

$$\psi(\xi) = 2\,\xi\,\frac{\operatorname{Sin}\xi - \sin\xi}{\operatorname{Cos}\xi + \cos\xi}\,.$$

Für kleine Werte von ξ ($\xi < 0{,}75$) gilt $\psi(\xi) = \frac{\xi^4}{3}$. In diesem Gebiet steigen die Wirbelstromverluste proportional dem Quadrat der Frequenz an. Für große Werte ($\xi > 2$) lautet die Näherungsformel: $\psi(\xi) = 2\,\xi$. In diesem Gebiet wachsen die Wirbelstromverluste mit der Wurzel aus der Frequenz, also bereits langsamer als proportional. Wir müssen aber zur Erklärung der von uns beobachteten Gesetzmäßigkeit zeigen, daß für die reduzierte Blechstärke ξ Werte etwas oberhalb 0,8 und unterhalb 2 zu erwarten sind.

Die Blechstärke sei 0,05 cm, die Frequenz beträgt etwa 16×50, die Leitfähigkeit normalen (schwach legierten) Dynamoblechs etwa $^1/_{16}$ von der des Kupfers. Recht unsicher ist die Permeabilität μ. Sie ist für die Zusatzschleifen auf den steil abfallenden Seiten groß. Wählen wir zur Probe den Wert $\mu = 500$, so erhalten wir

$$\xi = 0{,}05 \cdot \sqrt{500} = 1{,}1.$$

Bei diesem Wert der reduzierten Blechstärke fallen somit auch der Theorie nach die Wirbelstromverluste in den durch unsere Versuche abgedeckten Bereich hinein. indem der Anstieg rascher als proportional und langsamer als quadratisch erfolgt.

Unsere Versuche sind an kleinen Drehstrommotoren ausgeführt worden. Die Aussagen gelten daher zunächst nur für diese. Dürfen wir sie auf größere Motoren mit Phasenankern übertragen?

Es liegt kein Grund vor anzunehmen, daß die Induktionsschwankungen und mit ihnen die zusätzlichen Zahnverluste bei größeren Motoren und solchen mit Phasenankern kleiner ausfallen sollten als bei den untersuchten. Dagegen ist ein glatteres Aussehen der Rotorstromkurve und kleinere zusätzliche Stromwärme in der Rotorwicklung wahrscheinlich. Beim Kurzschlußanker kann der Fluß jedes einzelnen Zahnes auf benachbarte Stäbe induzierend einwirken. Bei Phasenwicklung kommt für den Induktionsvorgang der gesamte von einer Phasenwicklung umspannte Fluß zur Geltung. Und dieser zeigt nach unseren Erfahrungen viel kleinere Oberwellen als der Fluß eines einzelnen Zahnes. Aber die zusätzlichen Verluste im Rotorkupfer sind an und für sich klein, so daß ihre Verminderung nur unbedeutend ins Gewicht fällt.

Bei größeren Motoren kann eine weitere Quelle zusätzlicher Verluste von Einfluß werden, die bei kleinen Motoren unerheblich war. Die Wicklung des Stators kann so großen Kupferquerschnitt erhalten, daß daselbst zusätzliche Stromwärme entsteht. Diese ist namentlich bei Motoren niedriger Spannung und somit großer Stromstärke zu fürchten.

Wir schließen, bei größeren Motoren und solchen mit Phasenankern sind mindestens die gleichen, wenn nicht höhere zusätzliche Verluste zu erwarten. Im Einklang hiermit steht die Abbremsung eines Motors von 20 PS, 500 V, 1500 Umdrehungen. Sie wurde von uns mittels Torsionsdynamometer und Bremsdynamo unter größter Sorgfalt ausgeführt. Die Angaben beider Meßgeräte stimmten bei allen Belastungen bis auf einen praktisch konstanten Betrag, der der Kugellagerreibung der Bremsdynamo entsprach, überein. Die Messung verdient daher alles Zutrauen. Es betragen die zusätzlichen Verluste bei Vollast etwa 20% der meßbaren, der Wirkungsgrad liegt nach der Bremsung 2% tiefer als nach der Leerlaufmethode. Der bei kleinen Motoren gefundene Anstieg mit dem Quadrate des Statorstromes zeigte sich auch hier.

Unser Aufsatz handelt über zusätzliche Verluste und nicht über die Leerlaufmethode. Die zusätzlichen Verluste bilden die Schwäche der Leerlaufmethode. Unser Aufsatz enthält eine einseitige Behandlung der Leerlaufmethode, bei der nur ihre Schattenseite sichtbar wird, ihre Lichtseite verdeckt bleibt. Wir müssen dies



betonen, damit nicht bei flüchtigem Lesen der Eindruck erweckt werde als zielten wir darauf ab, den Glauben an die Leerlaufmethode zu erschüttern. Durch ihre bequeme Ausführbarkeit, durch ihre geringe Empfindlichkeit gegen Meßfehler ist die Leerlaufmethode für laufende Prüfungen in der Fabrik der direkten Bremsung weit überlegen. Trotz ihrer aufgedeckten Mängel wird sie daher im allgemeinen die vom Praktiker bevorzugte Methode bleiben. Im allgemeinen wird auch die durch sie erzielte Genauigkeit dem Praktiker genügen. Wo das nicht zutrifft, bietet die vorliegende Arbeit wenigstens für eine Maschinenart einen gewissen Anhalt zur Abschätzung ihres Fehlers. Freilich wird man sich auch nicht auf die Dauer mit dem jetzigen Stande unseres Einblicks in die Fehler der Leerlaufmethode begnügen wollen. Man wird darauf hinzielen, die Verluste durch Zahnpulsationen auf bequeme Weise getrennt zu messen. Gelingt dies, so würde hierdurch ein nicht unbeträchtlicher, meßtechnischer Fortschritt erzielt werden[1]).

Vergleicht man bei Vollast die Leerlauf-Eisenverluste und die zusätzlichen Verluste, so zeigt sich, daß die letzteren die ersteren übertreffen. Beim Motor 1 z. B. betragen die Leerlaufverluste durch Eisen etwa ebensoviel wie die zusätzlichen Verluste bei Vollast. Für die Beurteilung der Gesamtverluste eines Motors ist es daher ebenso wichtig, die Verluste einer Eisensorte bei einer gemischten Magnetisierung durch eine Grundwelle (Frequenz 50) und eine Oberwelle (Frequenz etwa 700) wie nur bei der üblichen einwelligen Magnetisierung (Frequenz 50) zu kennen.

Eine derartige Verlustmessung wurde auf unsere Anregung im Maschinenlaboratorium der Reichsanstalt ausgeführt[2]). Es ergab sich, daß hiernach der Hauptwert auf Verringerung der Wirbelstromverluste im Eisen zu legen ist, da die durch Oberwellen hervorgerufenen Verluste diejenigen der Grundwelle unter Umständen stark übersteigen können. Den größten Teil dieser Verluste bilden aber infolge der hohen Frequenz die Wirbelstromverluste.

Zusammenfassung.

Für das Nachstehende sind die zusätzlichen Verluste als Differenz zwischen den nach der Leerlaufmethode gefundenen, den sogenannten „meßbaren" Verlusten, und den wirklichen Verlusten zu verstehen. Nach der Leerlaufmethode setzen sich die meßbaren Verluste zusammen aus:

1. den Statorkupferverlusten,
2. den Eisen- und Reibungsverlusten,
3. den Rotorverlusten.

Hierbei wird nach den Vorschriften des VDE die Änderung der Eisen- und Reibungsverluste mit der Belastung nicht berücksichtigt. Die Verluste im Sekundäranker wurden durch Messung der Schlüpfung bestimmt.

Die Versuche haben nun ergeben, daß innerhalb der zulässigen Belastung bei allen Motoren die wirklichen Verluste immer größer sind als die meßbaren, d. h. die zusätzlichen Verluste sind stets positiv. Im Mittel wurde der nach der oben angegebenen Leerlaufmethode indirekt gemessene Wirkungsgrad bei Nennlast um 2% höher gefunden als der direkt gemessene Wirkungsgrad. Nach den Angaben der Regeln für Bewertung und Prüfung von elektrischen Maschinen (R. E. M.) vom Jahre 1924 sind die Zusatzverluste bei Drehstrommotoren mit 0,5% der Leistungsaufnahme bei Nennlast einzusetzen. Die Angabe der R. E. M. ist daher für kleine Drehstrommotoren sicherlich zu niedrig. Als Durchschnittswert müßte 2% angegeben werden.

[1]) Eine Untersuchung hierüber ist im Maschinenlaboratorium der Reichsanstalt im Gange.

[2]) F. Schröter, Eisenverluste durch gleichzeitige Magnetisierung bei zwei verschiedenen Frequenzen. Arch. f. Elektrot. Bd. 13, S. 30, 1924.

Über die Abhängigkeit der Zusatzverluste von Belastung, Stromstärke, Spannung und Frequenz hat sich folgendes ergeben:

Bei einer Reihe von Messungen wurden für jeden beobachteten Belastungspunkt die zusätzlichen Verluste in % der meßbaren Verluste berechnet und als Funktion der angegebenen Leistung aufgetragen. Die so erhaltene „Fehlerkurve" der Leerlaufmethode stellt die Abhängigkeit der zusätzlichen Verluste von der Belastung dar. Es wurde für das normale Belastungsgebiet der Motoren praktisch eine durch den Nullpunkt gehende Gerade gefunden. Die Neigung der Geraden ist von Motor zu Motor verschieden.

Trägt man den Absolutwert der Zusatzverluste in Abhängigkeit vom Quadrat der Stromstärke J auf, so erhält man für die „Verlustkurve" ebenfalls eine Gerade, die auf der Abszissenachse das Quadrat des Leerlaufstromes J_0 abschneidet. Die Versuche bestätigen somit, daß für die Zusatzverluste V_z der Ansatz gilt:

$$V_z = c\,(J^2 - J_0^2).$$

Die Richtungskonstante c der Geraden schwankt ebenfalls von Motor zu Motor.

Bei mehreren Motoren wurden Versuche über die Abhängigkeit der zusätzlichen Verluste von der Spannung ausgeführt. Es zeigte sich überraschenderweise, daß die Zusatzverluste von der Höhe der Induktion -- wenigstens in dem bei Drehstrommotoren vorkommenden Magnetisierungsbereich — unabhängig sind. Über den Einfluß der Frequenz auf die zusätzlichen Verluste ergaben die Versuche, daß die Zusatzverluste rascher als proportional, aber langsamer als quadratisch mit der Frequenz ansteigen.

Die experimentell bestimmten Abhängigkeiten der zusätzlichen Verluste von Stromstärke, Spannung und Frequenz konnten auf Grund von oszillographischen Aufnahmen rechnerisch bestätigt werden.

Weitere Versuche galten der Aufklärung von Sitz und Ursache der zusätzlichen Verluste. Durch verschiedene Versuche an Motoren offener und geschlossener Bauart wurde festgestellt, daß die zusätzlichen Verluste nicht in den Maschinenschilden stecken. Es wurde nun weiter diskutiert, ob die zusätzlichen Verluste von vornherein durch die Ansätze der Leerlaufmethode bedingt sind. Die Leerlaufmethode vernachlässigt grundsätzlich die durch Stromverdrängung hervorgerufenen Statorkupferverluste und berücksichtigt nur den Gleichstromwiderstand. Eine Nachrechnung ergab, daß bei den kleinen Motoren die Stromverdrängung vollkommen zu vernachlässigen ist.

Die Leerlaufmethode nimmt weiterhin an, daß die Reibungs- und Eisenverluste sich mit der Belastung nicht ändern. Dies trifft sicher für die Reibungsverluste zu, die unabhängig von der Belastung sind. Anders jedoch steht es mit der nach der Leerlaufmethode angenommenen Konstanz der Eisenverluste. Der Spannungsabfall infolge Widerstand und Streuung ändert die Eisenverluste mit der Belastung nur unwesentlich. Dagegen bilden sich in den Zähnen von Stator und Rotor durch die Änderung des magnetischen Widerstandes Felder hoher Frequenz aus, die mit der Belastung anwachsen. Zu dieser Ursache der Zahnpulsion tritt noch eine weitere, nämlich die Schwankung der magnetomotorischen Kraft infolge Änderung der räumlichen Kupferverteilung. Beide Schwankungen haben dieselbe Frequenz. Die Zahnpulsationen wurden an je einem Motor mit offenen und mit geschlossenen Rotornuten oszillographisch bei Leerlauf und bei Belastung aufgenommen und die Ergebnisse rechnerisch verfolgt; es ergibt sich, daß die Verluste durch Zahnpulsationen gegen die bei Leerlauf gemessenen Eisenverluste nicht zu vernachlässigen sind. Die gesamten Eisenverluste steigen deshalb mit der Belastung an. Sie bestehen aus drei Teilen:



1. Eisenverluste E_1 der Grundmagnetisierung,
2. Pulsationsverluste E_2 bei Leerlauf,
3. Zuwachs E_3 der Pulsationsverluste unter 2. bei Belastung.

Beim Leerlaufversuch wird nur der 1. und 2. Teil der Eisenverluste gemessen, der 3. Teil bleibt unberücksichtigt. Die Eisenverluste E_1 werden unmittelbar von der zugeführten elektrischen Energie gedeckt. Die Eisenverluste E_2 und E_3 dagegen entnehmen ihre Energie dem Rotor, also erst mittelbar dem Netz. Die oben unter III. angegebenen Rotorverluste wurden mittels Schlupfmessungen bestimmt. Dieses Verfahren wurde einer eingehenden Kritik unterzogen. Es hat zur Voraussetzung, daß am Stator und am Rotor dasselbe Drehmoment angreift, und daß dieses am Stator mit synchroner, am Rotor mit der wirklichen asynchronen Drehzahl wandert. Die Differenz der beiden Leistungen ist der Rotorverlust. Die Zahnpulsationsverluste sind aber mit Kräften verbunden, die sich am Stator mit Rotorgeschwindigkeit vorüberbewegen, und können daher nicht in den obigen Rotorverlusten enthalten sein. Mit den Induktionsschwankungen der Zähne sind erhebliche Stromschwankungen in den Ankerstäben verknüpft. Diese wurden ebenfalls an je einem Motor mit geschlitztem und mit glattem Rotor oszillographisch aufgenommen. Die Stromwärmeverluste dieser Stromoberwellen werden ebensowenig wie die Zahnpulsationsverluste durch den Teil III der Leerlaufmethode berücksichtigt, sind daher unter die zusätzlichen Verluste zu rechnen. Die Nachrechnung ergibt aber, daß sie klein sind im Vergleich zu den Zahnpulsationsverlusten.

Das Ergebnis kann dahin zusammengefaßt werden, daß die zusätzlichen Verluste im wesentlichen in erhöhten Eisenverlusten der Stator- und Rotorzähne bestehen.

Mehrere Versuche wurden angestellt, um auch ein Urteil über den Betrag der zusätzlichen Verluste größerer Motoren bis zu 20 kW-Leistung zu erhalten. Es zeigte sich, daß auch hier die gleichen, wenn nicht höhere zusätzliche Verluste auftreten. Der oben angegebene Mittelwert für die zusätzlichen Verluste, 2 % der Aufnahme bei Nennlast, ist auch hier zutreffend.

Über den Einfluß blinder Spulen bei Wellenwicklungen auf die Breite der Wendezone.

Von

Dipl.-Ing. **E. Stumpp**, Karlsruhe.

Inhalt: Es wird der Einfluß festgestellt, den bei Wellenwicklungen die sehr oft nicht zu umgehende Ausführung mit blinden Spulen auf die Lage und Breite der Wendezone hat. Zur Berechnung der Wendezonenbreite in solchen Fällen wird eine Formel hergeleitet.

I. Zweck und Ziel der Untersuchung.

1. Nachweis und Besprechung des Vorhandenen. Die bekannten Methoden zur Feststellung der Breite der Wendezonen, d. h. derjenigen Zonen am Umfange von Kommutatorankern, in denen sich die von Bürsten kurzgeschlossenen Spulenseiten bewegen[1]), beschränken sich auf Wicklungen, bei denen die Zahl der

[1]) Dabei ist als Ort aller Spulenseiten einer Nut am Ankerumfange die Mitte des Nutenschlitzes zu betrachten. Vgl. Richter, Ankerwicklungen, S. 41.



Kommutatorsegmente durch die Zahl der Nuten des Ankers teilbar ist. Insbesondere sind Wellenwicklungen mit blinden Spulen, d. h. Spulen, die man nur einlegt, um den Ankerschwerpunkt in der Wellenachse zu erhalten, die aber nicht an Kommutatorsegmente angeschlossen werden, nicht behandelt. Im folgenden wird für diesen technisch wichtigen Fall die Breite der Wendezone berechnet. Das Endresultat schließt sich eng an die von R. Richter in seinen Büchern über „Ankerwicklungen"[1]) und „Elektrische Maschinen"[2]) veröffentlichten Formeln an und kann als eine Verallgemeinerung derselben angesehen werden.

Richter[2]) definiert die Wendezone als diejenige Zone, die die Mittellinie des Schlitzes einer Nut am Ankerumfang bestreicht, während Spulenseiten dieser Nut von Bürsten kurzgeschlossen sind. Zur Ermittlung dieser Zone, die wir im folgenden als den Kommutierungsweg einer Nut bezeichnen, hat man nur auf dem Ankerumfange die beiden Punkte zu markieren, an denen die erste Spulenseite der Nut in den Kurzschluß eintritt und die letzte Spulenseite derselben Nut aus dem Kurzschluß austritt, und die Entfernung beider Punkte auszumessen. Die Länge dieser Strecke ergibt sich aus der an erwähnter Stelle zu findenden Formel (587) für eine beliebige Wicklung, bei der, wie gesagt, der Kommutator so viele Segmente besitzt, als der Anker Spulen trägt, und alle Spulenseiten an Kommutatorsegmente angeschlossen sind. Bei solchen Wicklungen sind in bezug auf die Stromwendung folgende beiden Kennzeichen hervorzuheben:

1. die Kommutierungswege aller Nuten haben dieselbe Länge,
2. ihre Lage relativ zu einem und demselben Wendepole ist so, daß sie sich alle vollkommen überdecken. Der nach Gleichung (587) bestimmte Kommutierungsweg einer Nut ist also zugleich die Wendezone überhaupt.

Beides trifft aber nicht mehr zu bei Wellenwicklungen mit blinden Spulen.

2. Notwendigkeit einer erweiterten Definition der Wendezone. Die Ausführung einer Wellenwicklung mit blinden Spulen wird nötig, wenn die Zahl k der Kommutatorsegmente durch die Zahl u der in der Nut nebeneinander liegenden Spulenseiten nicht teilbar ist. Man muß dann mit der nächst höheren Spulenzahl $k+\varrho$ am ganzen Ankerumfang rechnen, die durch u teilbar ist, so daß

$$\frac{k+\varrho}{u} = N \tag{1}$$

eine ganze Zahl von Nuten ergibt. ϱ Spulen können dann nicht an Kommutatorsegmente angeschlossen werden, sie müssen blind eingelegt werden.

Wir bezeichnen mit t_N die Nutteilung und mit t_K die am Ankerumfang abgemessene Kommutatorteilung. Aus der Gleichung

$$N\, t_N = k\, t_K \tag{2}$$

und der Ungleichung

$$N > \frac{k}{u}$$

folgt

$$u\, t_K - t_N > 0.$$

Diese Ungleichung bedeutet, daß der Kommutierungsweg jeder Ober- oder Unterschicht einer Nut, also auch der Kommutierungsweg jeder Nut selbst, im Raume an einer anderen Stelle beginnt. Man kommt also für die Bestimmung der Wendezone, wie sie eingangs definiert ist, nicht mehr damit aus, daß man nur für eine Nut den Kommutierungsweg bestimmt, sondern man muß relativ zu einem betrachteten Wendepol die Lage der Kommutierungswege aller Nuten während einer Ankerumdrehung festlegen. Erst dann erhält man die äußersten Begrenzungen der Wendezone unter diesem betrachteten Wendepol.

[1]) R. Richter, Ankerwicklungen für Gleich- und Wechselstrommaschinen, S. 110.
[2]) R. Richter, Elektrische Maschinen, Bd. I, S. 404.

II. Die allgemeinen Lagegleichungen der Kommutierungswege.

1. Kommutierungsweg einer Spule. Wir wenden uns zunächst der Bestimmung dieser Begrenzungen und ihres gegenseitigen Abstandes b_{WZ} auf rechnerischem Wege zu und betrachten einen Anker mit beliebig getreppter Wellenwicklung, bei dem alle 2 p-Bürstensätze aufgelegt sind. Die Bürsten seien gleich breit und jeweils genau um die Polteilung τ gegeneinander versetzt. Das Wicklungsschema wollen wir so angeben, daß wir bei der fortlaufenden Bezeichnung der Spulenseiten in den Oberschichten der Nuten die blinden Spulen übergehen, so daß wir es durchgehend mit einem resultierenden Kommutatorschritt y aufzeichnen können.

Wenn die Bürstenbreite unendlich klein wäre, so befände sich eine Spule auf dem Wege

$$\sigma = t_K - |2\tau - y\, t_K|^{1)} \tag{3}$$

im Kurzschluß über 2 benachbarte gleichnamige Bürsten. Es ist

$$|2\tau - y\, t_K| = \left|\frac{k}{p} - \frac{k \mp a}{p}\right| t_K = \frac{a}{p} t_K$$

diejenige auf den Umfang des Ankers reduzierte Strecke, um die die Kante der benachbarten gleichnamigen Bürste schon auf das Kommutatorsegment s + y aufgelaufen ist, wenn die betrachtete Bürste vor dem Segment s steht (Bild 1), bezw. diejenige Strecke, um welche jene Bürstenkante noch verschoben werden muß, um vor das Segment s + y zu stehen zu kommen, wenn die betrachtete Bürste vor dem Segment s steht. Infolge der Breite b_B der Bürste verbleibt die Spule auch noch auf dem Wege

$$b = b_B \frac{D}{D_K}$$

im Kurzschluß. (D = Durchmesser des Ankers, D_K = Durchmesser des Kommutators). Der Kommutierungsweg einer Spule hat also die Länge:

$$\psi = b + \left(1 - \frac{a}{p}\right) t_K. \tag{4}$$

2. Kommutierungsweg einer Schicht. Der Kommutierungsweg einer Schicht (Ober- oder Unterschicht) in einer Nut mit u nebeneinander liegenden Spulenseiten, die alle an Kommutatorlamellen angeschlossen sind, hat die Länge

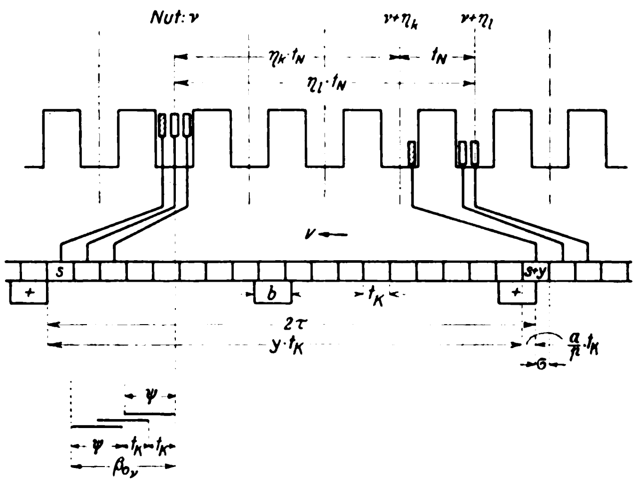


Bild 1. Zur Erläuterung der Gleichungen (3) bis (5).

[1]) | | bedeutet wie üblich, daß eine in den Strichen stehende Größe unbekümmert um ihr Vorzeichen immer positiv einzusetzen ist.

$$(u - 1)\,t_K + \psi = b + \left(u - \frac{a}{p}\right) t_K.$$

Solche Nutenschichten aber, die blinde Spulenseiten enthalten, haben Kommutierungswege, die um eben so viele Kommutatorteilungen t_K verkürzt sind, als in der Schicht blinde Spulenseiten vorhanden sind.

Es wird im allgemeinen genügen, nur diejenigen Nuten besonders kenntlich zu machen, die in der Oberschicht blinde Spulenseiten beherbergen, weil durch die Spulenweite die Unterschichten den Oberschichten eindeutig zugeordnet sind. Wir drücken zunächst die Länge des Kommutierungsweges irgendeiner Nutenoberschicht ν allgemein aus durch die Gleichung

$$\beta_{O_\nu} = b + \left(u - \varrho_\nu - \frac{a}{p}\right) t_K. \tag{5}$$

Darin bedeutet ϱ_ν die Zahl der blinden Spulenseiten der Oberschicht ν. Numerieren wir die Nutenoberschichten und die Unterschichten gleichlautend mit den Nuten selbst und unterscheiden wir kurze und lange Spulen, also Spulen der Weite $\eta_k t_N$ und der Weite $\eta_l t_N$ (Bild 1), so liegen die zu der Oberschicht ν zugehörigen Unterschichten teils in der Nut $\nu + \eta_k$ teils in der Nut $\nu + \eta_l$. Von den ϱ_ν blinden Spulenseiten einer Oberschicht ν sollen ϱ_{k_ν} Spulenseiten zu kurzen und ϱ_{l_ν} Spulenseiten zu langen blinden Spulen gehören. Mit Rücksicht auf diese Bezeichnung hat allgemein der Kommutierungsweg einer Unterschicht $\nu + \eta_l$, da immer $\eta_l = \eta_k + 1$ ist, die Länge

$$\beta_{U_{\nu+\eta_l}} = b + \left(u - \varrho_{l_\nu} - \varrho_{k_{\nu+1}} - \frac{a}{p}\right) t_K. \tag{5a}$$

Die Treppung legen wir für den Gebrauch an späterer Stelle fest dadurch, daß wir uns merken, daß von den u nebeneinander liegenden Spulenseiten einer Oberschicht u_k Spulenseiten zu kurzen, u_l Spulenseiten zu langen Spulen gehören.

3. Lagegleichungen für die Oberschichten. Die Lage aller Kommutierungswege β_{O_ν} bezw. $\beta_{U_{\nu+\eta_l}}$ der Unter- oder Oberschichten aller Nuten wird in einem im Raume festen Koordinatensystem dadurch festgehalten, daß die Abszissen ihrer Anfänge bezw. ihrer Enden in bezug auf dieses Koordinatensystem definiert werden. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Nuten und damit die darin liegenden Ober- und Unterschichten fortlaufend mit den Nummern 1, 2, 3 ... N und merken uns, daß in den Oberschichten der Nuten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varrho_\alpha, \varrho_\beta, \varrho_\gamma \ldots$ blinde Spulenseiten untergebracht sind. Wenn wir dann noch eine bestimmte der 2p Wendezonen ins Auge fassen als Zone I und alle gegen den Drehsinn des Ankers (in den Bildern durch einen Geschwindigkeitspfeil festgelegt) folgenden Zonen fortlaufend numerieren, so können wir z. B. durch die Festsetzung

$$x = a^{I}_{O_1} = 0 \tag{6}$$

die Nullstelle festlegen, von der aus wir alle Entfernungen zählen. Die obige Gleichung soll bedeuten: diejenige Stelle im Raum, an welcher die Oberschicht O der Nut 1 in der Zone I zu kommutieren anfängt, d. h. also wo die erste Spulenseite dieser Schicht in den Kurzschluß eintritt, ist die Nullstelle des Koordinatensystems. Irgendeine andere Gleichung $a^{z}_{O_\nu}$ drückt aus, in welcher Entfernung von der Stelle $x = 0$ die Oberschicht der Nut ν in der Zone z zu kommutieren beginnt, und entsprechende Bedeutung hat eine Gleichung $e^{z}_{U_\mu}$ für das Ende des Kommutierungsweges der Unterschicht U der Nut μ in der Zone z, d. h. für diejenige Stelle, an welcher die letzte Spulenseite dieser Schicht in der Zone z den Kurzschluß verläßt. Zwischen Anfangspunkt und Endpunkt des Kommutierungsweges einer Nutenschicht besteht die Gleichung

$$e^z_{O\nu} = a^z_{O\nu} + \beta_{O\nu} \tag{7}$$

bzw.

$$e^z_{U\mu} = a^z_{U\mu} + \beta_{U\mu}. \tag{7a}$$

Wir leiten im folgenden die Lagegleichungen $a^I_{O\nu}$ für alle Oberschichten der Zone I ausführlich ab und definieren alle übrigen Lagegleichungen mit Hilfe der Gleichungen $a^I_{O\nu}$ so, daß wir uns darauf beschränken können, sie im allgemeinen Symbol zu beschreiben, so daß ihr System dem ausführlich abgeleiteten jederzeit nachgebildet werden kann. Für die Zone I gilt:

$$a^I_{O1} = 0$$

festsetzungsgemäß, für die folgenden Oberschichten:

$$a^I_{O2} = u\,t_K - t_N\text{ [1]},$$
$$a^I_{O3} = 2(u\,t_K - t_N),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a^I_{O\alpha} = (\alpha - 1)(u\,t_K - t_N),$$

nach der Schicht α:

$$a^I_{O\alpha+1} = \alpha(u\,t_K - t_N) - \varrho_\alpha t_K,$$
$$a^I_{O\alpha+2} = (\alpha + 1)(u\,t_K - t_N) - \varrho_\alpha t_K,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a^I_{O\beta+1} = \beta(u\,t_K - t_N) - (\varrho_\alpha + \varrho_\beta)\,t_K,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a^I_{ON+1} = N(u\,t_K - t_N) - \varrho\,t_K, \tag{8}$$

in der letzten Gleichung ist

$$\varrho = \varrho_\alpha + \varrho_\beta + \varrho_\gamma + \cdots\cdots$$

Die letzte der Gleichungen (8) ist mit der ersten identisch, was man erkennt, wenn man aus den Gleichungen (1) und (2) $\varrho\,t_K$ bestimmt. Man erhält

$$\varrho\,t_K = N(u\,t_K - t_N). \tag{9}$$

Die Gleichungen (8) zeigen, daß die Kommutierungszone jeder Nutenoberschicht an einer anderen Stelle im Raume ihren Anfang nimmt, weil bei Wicklungen mit blinden Spulen nicht mehr wie bei vollständig symmetrischen Wicklungen $t_N = u\,t_K$ ist. Das Gleichungssystem für die Enden der Kommutierungswege aller Oberschichten in Zone I geht nach Gleichung (7) aus den Gleichungen (8) hervor:

$$e^I_{O\nu} = a^I_{O\nu} + \beta_{O\nu}. \tag{10}$$

Für eine beliebige Zone z und eine beliebige Nut ν lauten die Gleichungen (8) und (10):

$$a^z_{O\nu} = a^I_{O\nu} - (z - 1)\,\tau, \tag{11}$$

$$e^z_{O\nu} = a^I_{O\nu} - (z - 1)\,\tau + \beta_{O\nu}. \tag{12}$$

[1] Zwischen den Anfängen des Kommutierungsvorganges in zwei aufeinander folgenden Oberschichten ν und $\nu + 1$ liegt immer ein Weg $(u - \varrho_\nu)\,t_K$ eines Punktes des Ankerumfanges in dem Sinne vorwärts, in dem hier x positiv gezählt ist. Im ruhenden Koordinatensystem hat aber die Oberschicht $\nu + 1$ eine um t_N kleinere Abszisse als die Oberschicht ν. Die relative Lage der Anfänge des Kommutierungsvorganges in zwei aufeinander folgenden Oberschichten ν und $\nu + 1$ ist also immer definiert in der Gleichung:

$$a^I_{O\nu+1} = a^I_{O\nu} + (u - \varrho_\nu)\,t_K - t_N.$$

4. Lagegleichungen für die Unterschichten. Wenn in der Zone z die erste zu einer langen Spule gehörige Spulenseite der Oberschicht ν in den Kurzschluß eintritt, so tritt die erste Spulenseite der Unterschicht $\nu + \eta_l$ in der Zone $z + 1$ mit in den Kurzschluß (Bild 2). Auf Grund dieser Überlegung können wir in einer beliebigen Zone z die Lagegleichungen für die Unterschichten sofort in allgemeiner Form anschreiben:

$$a^{z+1}_{U\nu+\eta_l} = a^{z}_{O\nu} + (u_k - \varrho_{k\nu})\, t_K - \eta_l\, t_N,$$

oder mit Hilfe von Gleichung (11) und der Beziehung $a^{z+1}_{U\nu+\eta_l} + \tau = a^{z}_{U\nu+\eta_l}$

$$a^{z}_{U\nu+\eta_l} = a^{I}_{O\nu} - (z-2)\,\tau - \eta_l\, t_N + (u_k - \varrho_{k\nu})\, t_K, \qquad (13)$$

und durch Anwendung der Gleichung (7a) wird

$$e^{z}_{U\nu+\eta_l} = a^{I}_{O\nu} - (z-2)\,\tau - \eta_l\, t_N + (u_k - \varrho_{k\nu})\, t_K + \beta_{U\nu+\eta_l}. \qquad (14)$$

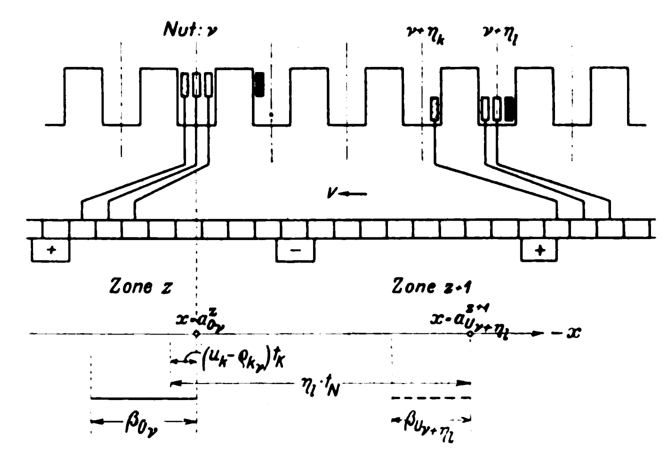


Bild 2. Zur Ableitung der Lagegleichungen für die Unterschichten.

5. Zusammenfassung und allgemeine Anwendung. Die Gleichungen (11) bis (14) ergeben mit Hilfe der Gleichungen (5) und (5a) das folgende System:

$$a^{z}_{O\nu} = a^{I}_{O\nu} - (z-1)\,\tau, \qquad (A)$$

$$a^{z}_{U\nu+\eta_l} = a^{I}_{O\nu} - (z-1)\,\tau + \tau - \eta_l\, t_N + (u_k - \varrho_{k\nu})\, t_K, \qquad (B)$$

$$e^{z}_{O\nu} = a^{I}_{O\nu} - (z-1)\,\tau + b + \left(u - \varrho_\nu - \frac{a}{p}\right) t_K, \qquad (C)$$

$$e^{z}_{U\nu+\eta_l} = a^{I}_{O\nu} - (z-1)\,\tau + b + \left(u - \varrho_\nu - \frac{a}{p}\right) t_K + \tau - \eta_l\, t_N + (u_k - \varrho_{k\nu+1})\, t_K. \qquad (D)$$

Dieses und die Gl. (8) gestatten, in jeder beliebigen Zone z die Kommutierungswege der Ober- und Unterschichten aller Nuten in ihrer räumlichen Lage festzuhalten. Mit Hilfe dieser Lagegleichungen ist das Beispiel in Bild 3 ausgeführt und die Orientierung aller Kommutierungswege in der Zone II vorgenommen. Man erkennt aus diesem Bild auch sofort, wie die praktische Anwendung dieser Gleichungen auf eine bestimmte Zone sich sehr einfach gestaltet. Für den eigentlichen Zweck unserer Aufgabe, die Länge der Strecke b_{wz} (Bild 3) zu berechnen, ist es vollkommen belanglos, in welcher Reihenfolge wir die Kommutierungswege der einzelnen Nutenschichten hinlegen. Im Bild 3a ist es so geschehen, daß ihrer zeitlichen Reihenfolge Rechnung getragen wurde derart, daß auf die Unterschicht je einer Nut (gestrichelte Strecke), deren erste Spulenseite den Kommutierungsvorgang in dieser Nut einleitet, unmittelbar ihre Oberschicht (ausgezogene Strecke) folgt, deren erste Spulenseite einen Augenblick später in den Kurzschluß eintritt. Es können aus diesem Bild die

Kommutierungswege der einzelnen Nuten abgegriffen werden. Man sieht daraus aber, daß, wie gesagt, der Kommutierungsweg einer Nut bei der Bestimmung der Wendezone bwz nicht mehr den Ausschlag gibt. Im Bild 3b sind die Kommutierungswege der Nutenschichten für dieselbe Zone in **numerisch** geordneter Reihenfolge aufgetragen. Zusammenfassend läßt sich aus diesem Bild von vornherein

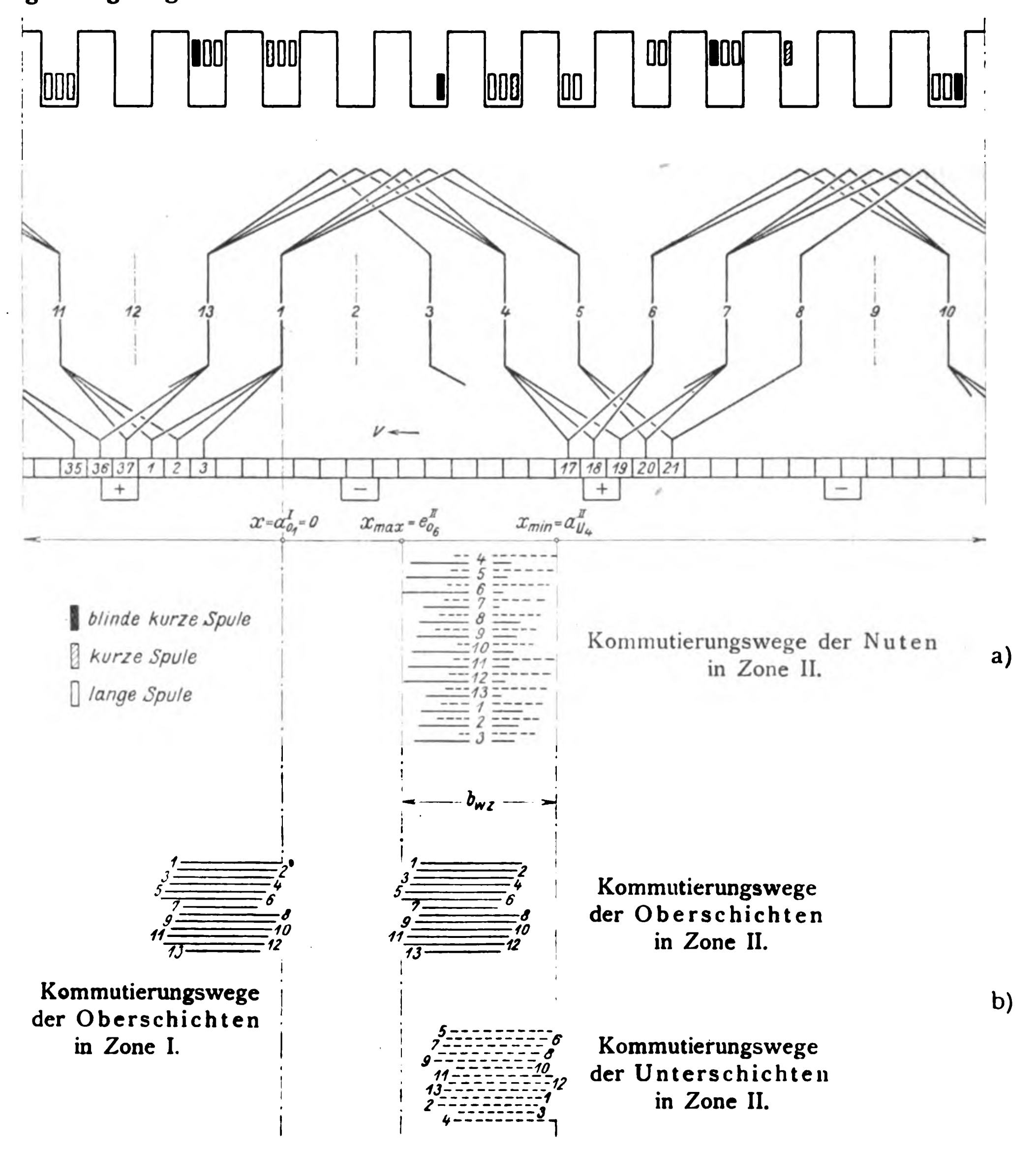


Bild 3. Zur Erläuterung der Anwendung der Gleichungen (A) bis (D) und der Gleichungen (8).

erkennen, daß es darauf ankommt, in den Gl. (A) und (B) nach derjenigen zu suchen, die die **kleinste Abszisse** a ergibt, und in den Gl. (C) und (D) nach derjenigen, die die **größte Abszisse** e liefert. Die Differenz dieser beiden Werte, des Minimalwertes a vom Maximalwert e, bestimmt das genaue Gebiet am Ankerumfang, in dem sich in der betrachteten Zone bei einem Umlauf des Ankers Spulenseiten im Kurzschluß befinden.

Das Bild 3b lehrt zugleich, daß sich das Suchen nach diesem Minimal- bezw. Maximalwert bei weitem nicht so zeitraubend gestaltet, wie es auf den ersten Blick

den Anschein hat. Aus dem Bild 3b wie auch aus den Gl. (8) geht hervor, daß

1. der Kleinstwert $a^z_{O_\nu}$ nur unter den Gleichungen für die Nutenschichten $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$, ... vorkommen kann, d. h. unter den Gleichungen für die Oberschichten derjenigen Nuten, die auf Nuten folgen, welche in der Oberschicht blinde Spulen beherbergen.

2. der Größtwert $e^z_{O_\nu}$ nur unter den Gleichungen für die Nutenoberschichten $\alpha - 1$, $\beta - 1$, $\gamma - 1$ ...., d. h. unter den Gleichungen für die Oberschichten derjenigen Nuten, die Nuten vorhergehen, welche in der Oberschicht blinde Spulen beherbergen.

III. Die praktische Forderung und die allgemeinen Formeln für bwz.

Wir können von hier ab unsere Untersuchungen, die wir bisher auf einer möglichst allgemeinen Basis gehalten haben, mehr für den praktischen Fall zuschneiden. Aus den Gl. (8) und den Gl. (A) bis (D) läßt sich ohne weiteres die Forderung ablesen, daß man in den Fällen, wo nicht nur eine, sondern mehrere blinde Spulen einzubetten sind, diese einzeln und möglichst gleichmäßig in die Nuten des Ankerumfangs verteilen muß, um die kleinstmögliche Wendezone zu erhalten. Wir wollen im folgenden annehmen, daß diese Forderung eingehalten ist, und haben zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Die Oberseite je einer langen blinden Spule sei in die Nuten α, β, γ, ... eingebettet. ($\varrho_{k_\nu} = 0$).

Für einen Kleinstwert $a^z_{O_\nu}$ in den Gl. (A), der z. B. für die Nut $\nu = \alpha + 1$ zutreffen möge, trifft ein Kleinstwert $a^z_{U_{\nu+\eta_l}}$ in den Gl. (B) für die Nut $\nu = \alpha + 1 + \eta$ zu. Liefern die Gl. (C) einen Größtwert für die Nut $\beta - 1$, so folgt aus den Gl. (D) ein Größtwert für die Nut $\beta - 1 + \eta_l$. In die engere Entscheidung sind also die folgenden vier Gleichungen zu ziehen:

$$a^z_{O\alpha+1} = a^z_{O\alpha+1} = \text{min.},$$
$$a^z_{U\alpha+1+\eta_l} = a^z_{O\alpha+1} + \tau + u_k t_K - \eta_l t_N,$$
$$e^z_{O\beta-1} = e^z_{O\beta-1} = \text{max.},$$
$$e^z_{U\beta-1+\eta_l} = e^z_{O\beta-1} + \tau + u_k t_K - \eta_l t_N.$$

Ist $\eta_l t_N > \tau + u_k t_K$, so ist $a^z_{U\alpha+1+\eta_l}$ die kleinste und $e^z_{O\beta-1}$ die größte Abszisse, und es ist

$$bwz = e^z_{O\beta-1} - a^z_{O\alpha+1} - (\tau - \eta_l t_N + u_k t_K).$$

Ist $\eta_l t_N < \tau + u_k t_K$, so ist $a^z_{O\alpha+1}$ der kleinste und $e^z_{U\beta-1+\eta_l}$ der größte Wert; daher

$$bwz = e^z_{O\beta-1} - a^z_{O\alpha+1} + (\tau - \eta_l t_N + u_k t_K).$$

Beide Fälle lassen sich vereinigen zu der Formel:

$$bwz = e^z_{O\beta-1} - a^z_{O\alpha+1} + |\tau - \eta_l t_N + u_k t_K|,$$

die mit Hilfe der Gl. (5), (11) und (12) am besten in die Form

$$bwz = a^I_{O\beta-1} - a^I_{U\alpha+1} + b + \left(u - \frac{a}{p}\right) t_K + |\tau - \eta_l t_N + u_k t_K| \qquad (15a)$$

gebracht wird, die vor allem auch zeigt, daß alle 2p Wendezonen gleich breit sind.

2. Die Oberseite je einer kurzen blinden Spule sei in den Nuten α, β, γ, ... untergebracht ($\varrho_{l_\nu} = 0$).

Wenn für die Nut $\alpha + 1$ ein Kleinstwert in den Gleichungen (A) zutrifft, so folgt nun in den Gleichungen (B) ein Kleinstwert für die Nut $\alpha + \eta_l = \alpha + 1 + \eta_k$. Das läßt sich durch einen Vergleich in allgemeiner Form aus den Gleichungen (A) nachweisen. Nach Gleichung (A) ist



$$a^z_{U\alpha+1+\eta_l} = a^z_{O\alpha+1} + \tau - \eta_l t_N + u_k t_K, \quad (\varrho_{k\alpha+1} = 0),$$
$$a^z_{U\alpha+\eta_l} = a^z_{O\alpha} + \tau - \eta_l t_N + (u_k - \varrho_{k\alpha}) t_K.$$

Nach den Gleichungen (8) und (11) kann man einführen:

$$a^z_{O\alpha} = a^z_{O\alpha+1} - (u t_K - t_N) + \varrho_\alpha t_K$$

und erhält

$$a^z_{U\alpha+\eta_l} = a^z_{O\alpha+1} + \tau - \eta_l t_N + u_k t_K - (u t_K - t_N),$$

da $\varrho_\alpha = \varrho_{k\alpha}$. Wir schreiben diese Gleichung, da $\eta_l - 1 = \eta_k$ und $u - u_k = u_l$:

$$a^z_{U\alpha+1+\eta_k} = a^z_{O\alpha+1} + \tau - \eta_k t_N - u_l t_K.$$

Wenn ferner für die Nut $\beta - 1$ ein Größtwert in den Gleichungen (C) zutrifft, so folgt in diesem Falle ein Größtwert in den Gleichungen (D) für die Nut $\beta - 2 + \eta_l = \beta - 1 + \eta_k$. Der Beweis ist analog dem vorigen. Für diesen Fall hat man also folgende vier Gleichungen in engerer Wahl:

$$a^z_{O\alpha+1} = a^z_{O\alpha+1} = \text{min.},$$
$$a^z_{U\alpha+1+\eta_k} = a^z_{O\alpha+1} + \tau - \eta_k t_N - u_l t_K,$$
$$e^z_{O\beta-1} = e^z_{O\beta-1} = \text{max.},$$
$$e^z_{U\beta-1+\eta_k} = e^z_{O\beta-1} + \tau - \eta_k t_N - u_l t_K,$$

und die Wendezone hat in diesem Falle die Breite

$$b_{wz} = e^z_{O\beta-1} - a^z_{O\alpha+1} + |\tau - \eta_k t_N - u_l t_K|$$

oder nach Gleichungen (5), (11) und (12):

$$b_{wz} = a^I_{O\beta-1} - a^I_{O\alpha+1} + b + \left(u - \frac{a}{p}\right) t_K + |\tau - \eta_k t_N - u_l t_K|. \qquad (15\text{b})$$

IV. Die vorkommenden Fälle.

Die gleichmäßige Verteilung der blinden Spulen am Ankerumfang kann am vollkommensten geschehen, wenn $\frac{N}{\varrho}$ eine ganze Zahl ist. Die Nuten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, welche zur Unterbringung je einer blinden Spulenoberseite bestimmt werden, sind dann um vollkommen gleiche (in Nutteilungen gemessene) Schritte $\frac{N}{\varrho}$ voneinander entfernt. Für diesen Fall erhält man für die Breite der Wendezone eine übersichtliche Formel. Die die blinden Spulen in der Oberschicht beherbergenden Nuten seien die Nuten $\frac{N}{\varrho}, 2\frac{N}{\varrho}, 3\frac{N}{\varrho} \ldots N$. Der Fall der kleinsten Abszisse $a^z_{O\nu}$ trifft dann zu für $\nu = 1$, der Fall der größten Abszisse $e^z_{O\nu}$ für $\nu = \frac{N}{\varrho} - 1$; infolgedessen wird:

1. für einen Entwurf mit blinden langen Spulen

$$b_{wz} = \left(\frac{N}{\varrho} - 2\right)(u t_K - t_N) + b + \left(u - \frac{a}{p}\right) t_K + |\tau - \eta_l t_N + u_k t_K|, \qquad (16\text{a})$$

2. für einen Entwurf mit blinden kurzen Spulen

$$b_{wz} = \left(\frac{N}{\varrho} - 2\right)(u t_K - t_N) + b + \left(u - \frac{a}{p}\right) t_K + |\tau - \eta_k t_N - u_l t_K|. \qquad (16\text{b})$$

Die für den Rechenschieber unbequeme kleine Differenz $u t_K - t_N$ können wir vermeiden, wenn wir sie nach Gleichung (9) ausdrücken und erhalten dann

$$b_{wz} = b + \left(\lambda + u - \frac{a}{p}\right) t_K + |\tau - \eta_l t_N + u_k t_K| \qquad (17\text{a})$$

für einen Entwurf mit langen blinden Spulen, und



$$b_{wz} = b + \left(\lambda + u - \frac{a}{p}\right) t_K + |\tau - \eta_k t_N - u_1 t_K| \qquad (17b)$$

für einen Entwurf mit **kurzen** blinden Spulen. Darin ist

$$\lambda = \frac{N - 2\varrho}{N}. \qquad (17c)$$

Für den Fall, daß $\frac{N}{\varrho}$ **keine ganze Zahl** ist, haben wir in der Zahlentafel I für die Fälle, die noch im Bereich des praktischen Vorkommens liegen können, eine Vorschrift ausgerechnet[1]. wie die blinden Spulen einzubetten sind, damit man die kleinste Wendezone erhält. Die Spalte 1 enthält die Zahl der blinden Spulen. In Spalte 2 stehen die Nutzahlen ausgedrückt in ganzen Vielfachen ($\varkappa$) der Zahl ϱ der blinden Spulen und einem Rest ($N = \varrho \cdot \varkappa + \xi$). Die Spalten 3 und 4 enthalten die Vorschrift über die Unterbringung der blinden Spulen: Spalte 3 enthält die Nummern der Nuten, in denen in der Oberschicht je eine blinde Spule einzulegen ist, und in Spalte 4 steht zwischen den Nummern je zweier Nuten mit blinden Spulen die Entfernung beider Nuten in Nutteilungen. Die Spalte 5 enthält den Wert für λ, der in

Zahlentafel I.

1	2	3	4	5
Zahl der blinden Spulen ϱ	Zahl der Nuten N =	Nuten mit je einer blinden Spule	Schritt zwischen Nuten mit blinden Spulen	λ
2	$2\varkappa + 1$	(N) $\varkappa + 1$ N	$\varkappa + 1$ $\varkappa$	$\frac{N-3}{N}$
3	$3\varkappa + 1$	(N) $\varkappa + 1$ $2\varkappa + 1$ N	$\varkappa + 1$ $\varkappa$ $\varkappa$	$\frac{N-4}{N}$
3	$3\varkappa + 2$	(N) $\varkappa + 1$ $2\varkappa + 1$ N	$\varkappa + 1$ $\varkappa$ $\varkappa + 1$	$\frac{N-4}{N}$
4	$4\varkappa + 1$	(N) $\varkappa + 1$ $2\varkappa + 1$ $3\varkappa + 1$ N	$\varkappa + 1$ $\varkappa$ $\varkappa$ $\varkappa$	$\frac{N-5}{N}$
4	$4\varkappa + 2$	(N) $\varkappa + 1$ $2\varkappa + 1$ $3\varkappa + 2$ N	$\varkappa + 1$ $\varkappa$ $\varkappa + 1$ $\varkappa$	$\frac{N-6}{N}$
4	$4\varkappa + 3$	(N) $\varkappa + 1$ $2\varkappa + 2$ $3\varkappa + 3$ N	$\varkappa + 1$ $\varkappa + 1$ $\varkappa + 1$ $\varkappa$	$\frac{N-5}{N}$

[1]) Über den Gang dieser Rechnung vgl. das erste Beispiel in Abschnitt V.

jedem Falle an die Stelle des Wertes $\lambda = \frac{N - 2\varrho}{N}$ in den Gleichungen (17a) und (17b) zu treten hat.

Die Gleichungen (15a) und (15b) im allgemeinsten Falle und die Gleichungen (17a) und (17b) in den speziellen Fällen $N = \varkappa\varrho$ ($\xi = 0$) und in den Fällen der Zahlentafel I ergeben die genaue Wendezone für eine beliebige Gleichstromankerwicklung. Aus ihnen geht als spezieller Fall für $u\,t_K - t_N = 0$ die einzige Formel

$$b_{wz} = b + \left(u - \frac{a}{p}\right) t_K + |\tau - \eta_k t_N - u_l t_K|$$

hervor, die, wie leicht nachzuweisen ist[1]), vollkommen identisch ist mit der von Richter an erwähnter Stelle angegebenen Formel.

Der Vollständigkeit wegen ist noch anzugeben, daß man zur genauen Berechnung der Wendezonenbreite einer ungetreppten Wellenwicklung mit blinden Spulen bei beliebiger Einbettung der blinden Spulen eine der Gleichungen (15a) oder (15b) verwenden kann, indem man in Gleichung (15a) $\eta_l = \eta$ und $u_k = 0$ oder in Gleichung (15b) $\eta_k = \eta$ und $u_l = 0$ setzt, in den speziellen Fällen $N = \varrho \cdot \varkappa$ bei gleichmäßiger Verteilung der blinden Spulen und in den Fällen der Zahlentafel I eine der Gleichungen (17a) oder (17b), indem man in Gleichung (17a) $\eta_l = \eta$ und $u_k = 0$ oder in Gleichung (17b) $\eta_k = \eta$ und $u_l = 0$ setzt.

Für den Praktiker hinreichend genau und am geeignetsten dürfte eine Näherungsformel sein, die aus dieser Untersuchung das wesentliche Resultat entnimmt, daß eine blinde Spule [Gleichung (17c)] oder mehrere blinde Spulen, möglichst gleichmäßig eingebettet, (Tafel I) eine resultierende Wendezonenbreite ergeben, die um etwa eine auf den Ankerumfang reduzierte Kommutatorteilung t_K größer ist als die nach der Richterschen Formel (587) in „Elektrische Maschinen“, Bd. I berechnete.

V. Beispiele.

Um die sehr einfache Anwendung der Gleichungen (15a) und (15b) zu zeigen, wollen wir für eine Wicklung $\varrho = 4$, $N = 4\varkappa + 2$ die Wendezone berechnen, für den Fall, daß wir, abweichend von der Vorschrift der Tafel I, die Oberseiten der blinden Spulen nach folgendem Plan in die Nutenoberschichten einbetten wollten:

Nut:	(N),		$\varkappa + 1$,		$2\varkappa + 2$,		$3\varkappa + 2$,		N
Schritt:		$\varkappa + 1$,		$\varkappa + 1$,		$\varkappa$,		$\varkappa$	

Wir erhalten nach den Gleichungen (8) für die Abszissen, unter denen der Größtwert bzw. der Kleinstwert zu suchen ist, die Werte:

$$a^I_{O\varkappa} = \frac{N-6}{N} t_K \text{ [2]}, \qquad a^I_{O\varkappa+2} = \frac{2}{N} t_K,$$

$$a^I_{O2\varkappa+1} = \frac{N-4}{N} t_K, \qquad a^I_{O2\varkappa+3} = \frac{4}{N} t_K,$$

$$a^I_{O3\varkappa+1} = \frac{N-6}{N} t_K, \qquad a^I_{O3\varkappa+3} = \frac{2}{N} t_K,$$

$$a^I_{ON-1} = \frac{N-8}{N} t_K, \qquad a^I_{ON+1} = 0.$$

[1]) Vgl. Richter, Ankerwicklungen, Gleichung (33) und (33a).

[2]) Die Entwicklung zu dieser übersichtlichen Form der Gleichungen (8) geschieht mit Hilfe der Gleichung (9); z. B.:

$$a^I_{O2\varkappa+1} = 2\varkappa(u\,t_K - t_N) - t_K = \left(2\varkappa \cdot \frac{4}{N} - 1\right) t_K = \frac{N-4}{N} t_K.$$



Also

$$a^{I}_{O_{2x+1}} - a^{I}_{O_{N+1}} = \lambda t_K = \frac{N-4}{N} t_K .$$

In dem Beispiel, das wir für unsere Abbildungen gewählt haben, handelt es sich um eine Wicklung mit 2 kurzen blinden Spulen.

$$N = 13, \quad u = 3, \quad u_l = 2, \quad \eta_k = 3, \quad k = 37, \quad a = 1,$$
$$p = 2, \quad t_N = 2{,}0 \text{ cm}, \quad \tau = 6{,}5 \text{ cm}, \quad b = 1{,}0 \text{ cm}.$$

Wir berechnen nach Zahlentafel I und Gleichung (17b):

$$\lambda = \frac{10}{13}, \quad \left(\lambda + u - \frac{a}{p}\right) t_K = 3{,}27\, t_K = 2{,}3 \text{ cm}, \quad |\tau - \eta_k t_N - u_l t_K| = 0{,}9 \text{ cm},$$
$$b_{WZ} = 4{,}2 \text{ cm}.$$

Wir haben mit voller Absicht diesen ungünstigen Entwurf gewählt, weil wir in erster Linie die geometrischen Beziehungen, die durch die Lagegleichnngen definiert sind, betonen wollten. Der günstigste Entwurf geht aus folgender Zahlentafel II hervor.

Zahlentafel II.

	$u_l = 3$	$u_l = 2$		$u_l = 1$		$u_l = 0$
	blinde Spule lang	blinde Spule		blinde Spule		blinde Spule kurz
		lang	kurz	lang	kurz	
b_{wz} =	4,8 cm	4,1 cm	4,2 cm	3,4 cm	3,5 cm	3,8 cm

In welchen praktischen Größen sich der Einfluß einer blinden Spule auswirkt, zeigen wir an einer für eine 45-kW-Maschine entworfenen eingängigen, ungetreppten Wellenwicklung mit folgenden Daten:

$$N = 47, \quad u = 2, \quad \eta = 12, \quad k = 93, \quad a = 1, \quad p = 2,$$
$$t_N = 2{,}0 \text{ cm}, \quad \tau = 23{,}56 \text{ cm}, \quad b = 2{,}045 \text{ cm}.$$

Wir berechnen nach Gleichung (17c) und (17a) oder (17b):

$$\lambda = \frac{45}{47}, \quad \left(\lambda + u - \frac{a}{p}\right) t_K = 2{,}49 \text{ cm}, \quad |\tau - \eta t_N| = 0{,}44 \text{ cm}, \quad b_{wz} = 4{,}975 \text{ cm}.$$

Dieses Beispiel einer Maschine mittlerer Leistung, bei der die vierpolige Ausführung mit eingängiger Wellenwicklung, $u = 2$ und blinder Spule sehr häufig ist, zeigt, daß der Einfluß der blinden Spule auf die Breite der Wendezone nicht vernachlässigbar ist, weil die Wendezone immer um fast eine ganze reduzierte Segmentbreite t_K vergrößert wird.

Das Verhalten von Drehstromasynchronmotoren bei verzerrter Klemmenspannung.

Von

Dr. Victor Paschkis,
AEG-Schweißmaschinenfabrik Hennigsdorf bei Berlin.

Zusammenfassung.

a) Aufgabe. Die gewöhnlich verwendeten Kreisdiagramme haben sinusförmige Klemmenspannung zur Voraussetzung, während die tatsächlich vorkommenden Spannungskurven von Generatoren und Transformatoren mehr oder weniger stark verzerrt sind. Es sollte nun untersucht werden, welchen Einfluß diese Verzerrungen auf das Verhalten der Motoren haben.

b) Weg. Zur Lösung der Aufgabe wurde — da die allgemeinen Formeln sehr undurchsichtig sind — das Verhalten eines Vergleichsmotors bei verzerrter Klemmenspannung untersucht und an Hand dieses Motors das Verfahren zur Ermittlung der Einflüsse abgeleitet.

Das Verfahren besteht in Zerlegung der verzerrten Spannungskurve in einzelne sinusförmige Spannungen verschiedener Frequenz nach Fourier und Superposition der einzelnen Erscheinungen und Einflüsse.

Im zweiten Teil werden die gewonnenen Erkenntnisse verallgemeinert.

c) Ergebnisse. Die Ergebnisse der Untersuchungen sind kurz zusammengefaßt die folgenden:

1. Der Strom ist von der Form der Spannungskurve sehr stark abhängig; seine Beeinflussung ist bei jedem einzelnen Motor verschieden und durch dessen elektrische Konstanten (Widerstand, Streuung usw.) bedingt.

2. Der Leistungsfaktor ist nur vom Leistungsfaktor der Grundharmonischen und der Form der Spannungskurve abhängig.

3. Drehmoment und mechanisch abgegebene Leistung sind entsprechend dem geringeren Wert der Grundharmonischen gegenüber sinusförmiger Klemmenspannung vermindert, während das gegenläufige Drehmoment, bzw. negative Leistung der Oberschwingung vernachlässigbar ist.

4. Der Wirkungsgrad ist bei verzerrter Klemmenspannung nur unwesentlich kleiner als bei sinusförmiger; der Unterschied ist von der Belastung stark abhängig.

Teil I.

Allgemeines über die Änderung des Verhaltens der Motoren bei verzerrter Klemmenspannung.

1. Einleitung.

In den allgemein verwendeten Stromdiagrammen für Asynchronmotoren ist stets die Voraussetzung gemacht, daß die Klemmenspannung sinusförmig ist. Diese Voraussetzung trifft in der Regel nicht zu, vielmehr ist die Klemmenspannung mehr oder weniger verzerrt. Nach Fourier ist es möglich, jede periodische Funktion in eine Reihe von Sinusfunktionen von verschiedener Amplitude und Frequenz zu zerlegen. — Ist die negative Halbwelle eine Wiederholung der positiven, mit entgegengesetzten Vorzeichen, so verschwinden die Glieder gerader Ordnung.

In den folgenden Betrachtungen wurde nur die dritte und fünfte Harmonische berücksichtigt; eine Verallgemeinerung auf Oberschwingungen höherer Periodenzahl



ist ohne weiteres möglich, unterblieb aber mit Rücksicht darauf, daß der Effektivwert der Spannung bei höheren Harmonischen in der Regel rasch abnimmt. Der verzerrten Klemmenspannung wird auch bei einer idealen Maschine ein verzerrter Strom entsprechen; außerdem wird aber der Strom durch die Magnetisierungserscheinungen usw. deformiert. Der Einfachheit halber bleiben aber alle diese Erscheinungen unberücksichtigt, so daß der Arbeit die Voraussetzung zugrunde liegt, daß einer sinusförmigen Klemmenspannung auch ein sinusförmiger Strom entspricht.

Die dritte Spannungsharmonische bildet sich nur aus, wenn Transformator (bzw. Generator) und Motor in Stern geschaltet und beide Nullpunkte geerdet sind. Fällt diese Erdung weg, so ist das System in bezug auf die dritte Harmonische wie ein auf offene Klemmen arbeitender Generator aufzufassen: die Sternpunkte weisen gegen Erde eine Spannung der dreifachen Periodenzahl auf. Sind die Nullpunkte aber irgendwie verbunden, so kann sich trotzdem ein Drehfeld nicht ausbilden, da die Ströme in den drei Phasen wohl räumlich, aber nicht zeitlich, um 120° verschoben sind. Der Strom, den die dritte Spannungsharmonische erzeugt, verursacht in der Ständerwicklung Verluste.

Um den Einfluß der Oberschwingungen zu verfolgen, kann man sich zwei Ströme von verschiedener Periodenzahl übereinander gelagert denken, die zusammengesetzt die Ausgangskurvenform ergeben. Hierbei ist der Stromkreis für die dritte Harmonische nur durch den Ständerscheinwiderstand Z_1 gegeben; für die fünfte kommt die vollkommene Motorersatzschaltung in Betracht (Bild 1). Sämtliche induktiven Widerstände erscheinen gegenüber der Grundperiodenzahl drei- bzw. fünffach vergrößert.

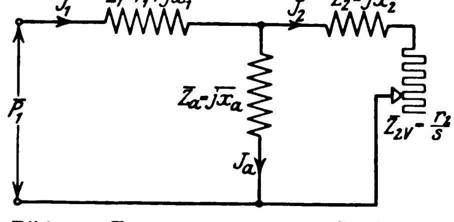


Bild 1. Ersatzschaltung für Drehstromasynchronmotoren (Eisenverluste vernachlässigt).

Die Untersuchungen müssen sich jeweils auf gleiche Rotorumdrehungszahl für Grund- und Oberschwingung beziehen. Dem entsprechen dann für die Grundharmonische und die m. Oberschwingung Schlüpfungen s_1 bzw. s_m.

$$s_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1}. \tag{1}$$

$$s_m = \frac{m \cdot n_1 \pm n_2}{m \cdot n_1}. \tag{2}$$

Darin bedeutet n_1 die Drehfelddrehzahl, n_2 die Läuferdrehzahl. Das obere Vorzeichen gilt für eine Harmonische, deren Drehfeld entgegengesetzt dem Läufer sich umdreht, während das untere für gleichsinnige Felder gilt.

Setzt man aus (1) für n_2 in (2) ein, so erhält man:

$$s_m = \frac{m \pm (1 - s_1)}{m}. \tag{2a}$$

Die fünfte Harmonische erzeugt ein gegenläufiges Drehfeld, es gilt somit das obere Vorzeichen; und es wird $s_5 = \frac{6 - s_1}{5}$. Ändert sich s_1 von 0 bis 1, so sinkt s_5 nur von 1,2 auf 1,0. Innerhalb des engeren Motorbereiches ist daher die Schlüpfung der fünften Harmonischen als annähernd konstant anzusehen. (Zwischen $s_1 = 0$ und $s_1 = 0{,}2$ ändert sich s_5 von 1,2 auf 1,16, d. s. etwa 3,5%.)

Da die allgemeinen Formeln sehr unübersichtlich sind, wurden sämtliche Rechnungen an einem Beispiel durchgeführt. Als Vergleichsmotor diente der in Arnold, Wechselstromtechnik, Bd. V, 1. Auflage 1909, Manualdruck 1922, auf S. 365 ff. als Beispiel gerechnete Motor. Es wurde ferner angenommen, daß der Effektivwert der Klemmenspannung konstant sei, nur die Form der Spannungskurve

wurde geändert, und zwar wurde der Reihe nach angenommen, daß die Oberschwingung 10, 20, 30, 40, 50% der Grundharmonischen betrage. Um einen deutlicheren Vergleich der einzelnen Harmonischen untereinander zu haben, wurde ferner noch das Verhalten des Motors bei rechteckiger Spannungskurve verfolgt, bei der die Spannung der Grundharmonischen zu der dritten bzw. fünften Oberschwingung sich verhalten wie $P_1 : P_2 : P_5 = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$ (P = Spannung).

Die Voraussetzung konstanter Klemmenspannung entspricht am besten den praktisch vorliegenden Verhältnissen.

2. Der resultierende Strom.

Ströme verschiedener Periodenzahl dürfen nicht ohne weiteres summiert werden. Der resultierende Strom ist gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate der einzelnen Harmonischen. (Siehe z. B. Hinden, „Über deformierte Wechselströme",

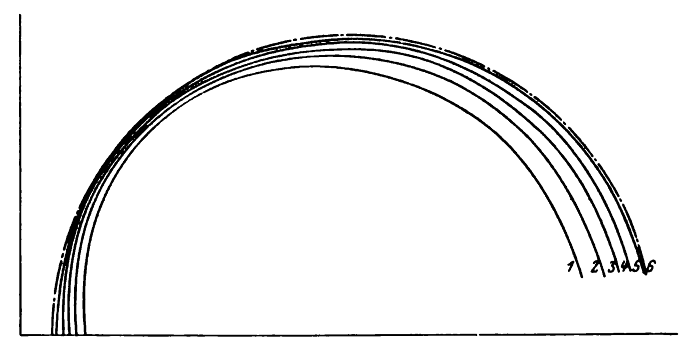


Bild 2. Stromdiagramme bei Auftreten einer dritten Harmonischen.
Maßstab: 1 cm = 10 Amp.
1 cm = 0,035 S. für die Grundharmonische.

Kurve		
1	$P_1 = 258$ V,	$P_3 = 129$ V,
2	$P_1 = 269$ V,	$P_3 = 106$ V,
3	$P_1 = 275$ V,	$P_3 = 83$ V,
4	$P_1 = 283$ V,	$P_3 = 57$ V,
5	$P_1 = 288$ V,	$P_3 = 29$ V,
6	$P_1 = 289$ V,	$P_3 = 0$ V.

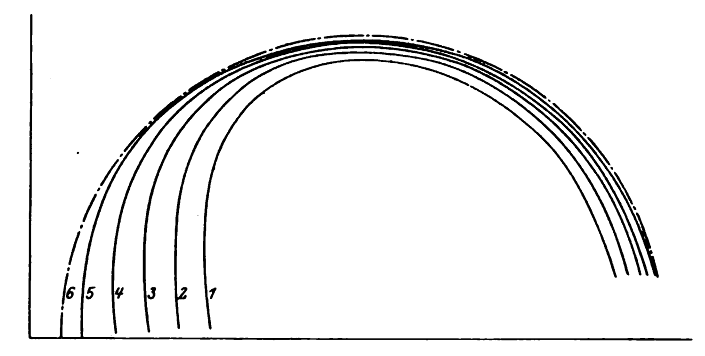


Bild 3. Stromdiagramme bei Auftreten einer fünften Harmonischen.
Maßstab: 1 cm = 10 Amp.
1 cm = 0,035 S. für die Grundharmonische.

Kurve		
1	$P_1 = 268$ V,	$P_5 = 129$ V,
2	$P_1 = 269$ V,	$P_5 = 106$ V,
3	$P_1 = 275$ V,	$P_5 = 83$ V,
4	$P_1 = 283$ V,	$P_5 = 57$ V,
5	$P_1 = 288$ V,	$P_5 = 29$ V,
6	$P_1 = 289$ V,	$P_5 = 0$ V.

Sonderausgabe aus der Sammlung elektrischer Vorträge. Herausgegeben von Prof. Dr. Voit, Band IV, Stuttgart 1903.)

Bezeichnet man mit y_1 bzw. y_5 den Leitwert der ersten bzw. fünften Harmonischen, mit P_1 bzw. P_5 die entsprechenden Spannungen und schließlich mit J_1 und J_5 die entsprechenden Ströme, so beträgt der resultierende Strom:

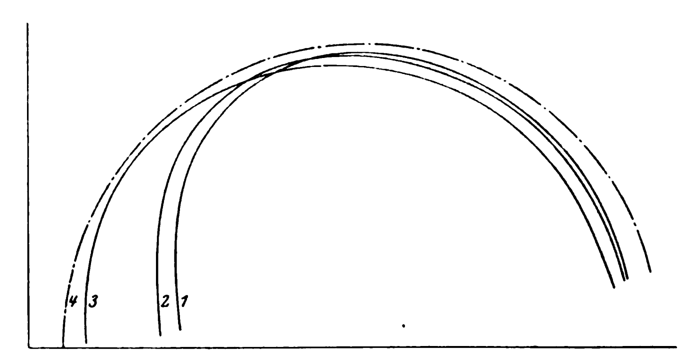


Bild 4. Vergleich der Stromdiagramme für gleiche Klemmenspannung und gleiche Grundharmonische bei Oberschwingungen gleicher Größe aber verschiedener Frequenz.
Maßstab: 1 cm = 10 Amp.
1 cm = 0.035 S. für die Grundharmonische.

Kurve			
1	$P_1 = 269$ V,	$P_3 = 106$ V,	$P_5 = 0$ V,
2	$P_1 = 269$ V,	$P_3 = 90$ V,	$P_5 = 54$ V,
3	$P_1 = 269$ V,	$P_3 = 0$ V,	$P_5 = 106$ V,
4	$P_1 = 289$ V,	$P_3 = 0$ V.	$P_5 = 0$ V.

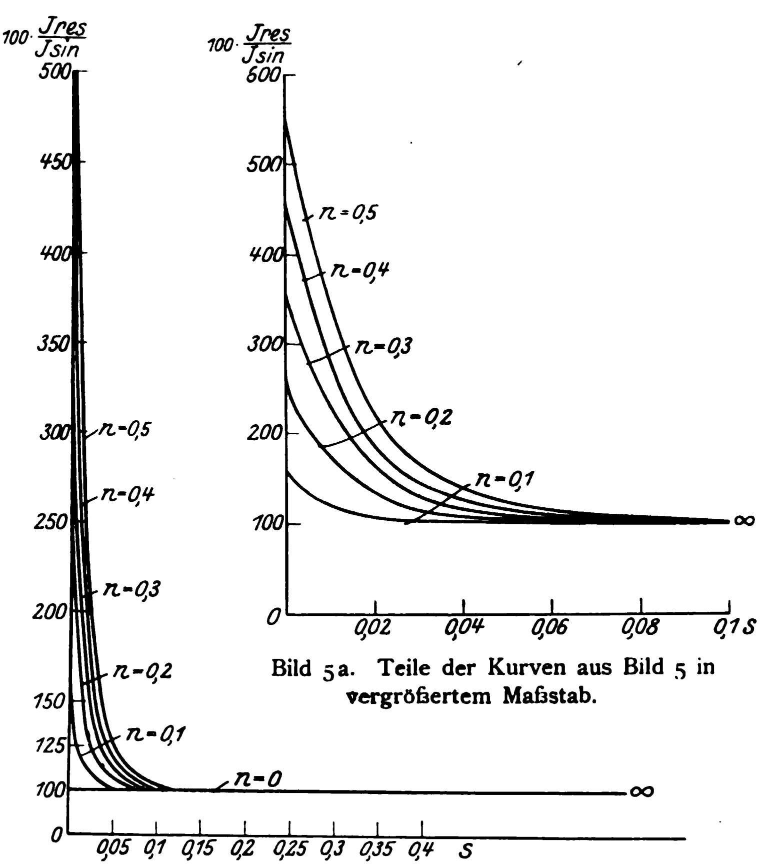


Bild 5a. Teile der Kurven aus Bild 5 in vergrößertem Maßstab.

Bild 5. Vergleich des sinusförmigen mit dem verzerrten Strom bei verschiedenen Schlüpfungen. m = 3.

Darin ist

$$J_{res} = \sqrt{J_1^2 + J_5^2} = \sqrt{(y_1 P_1)^2 + (y_5 P_5)^2}. \qquad (3)$$

$$y_1 = \sqrt{y_{1\,w}^2 + y_{1\,wl}^2},$$

$$y_5 = \sqrt{y_{5\,w} + y_{5\,wl}^2}.$$

Der Index w bzw. wl zeigt die Wirk- bzw. Blindkomponente an. In den Ausdrücken y_{5w} und y_{5wl} erscheinen hierbei die Ohmschen Widerstände in der gleichen Größe wie in y_{1w} und y_{1wl}; dagegen sind die induktiven Widerstände fünfmal so groß wie beim Gesamtleitwert der Grundharmonischen.

Um einen Vergleich mit dem Verhalten bei sinusförmiger Klemmenspannung zu bekommen, sind in Bild 2—4 die Stromdiagramme aufgezeichnet (nachdem noch der $\cos\varphi$ — der im nächsten Abschnitt eingehender besprochen wird — punktweise ermittelt war). Um ein Maß für die Veränderung des Stromes zu geben, wurde ferner $J_{res} = f(s_1)$ aufgetragen, und zwar in % von J_s (Strom bei gleichem Effektivwert der Klemmenspannung von Sinusform).

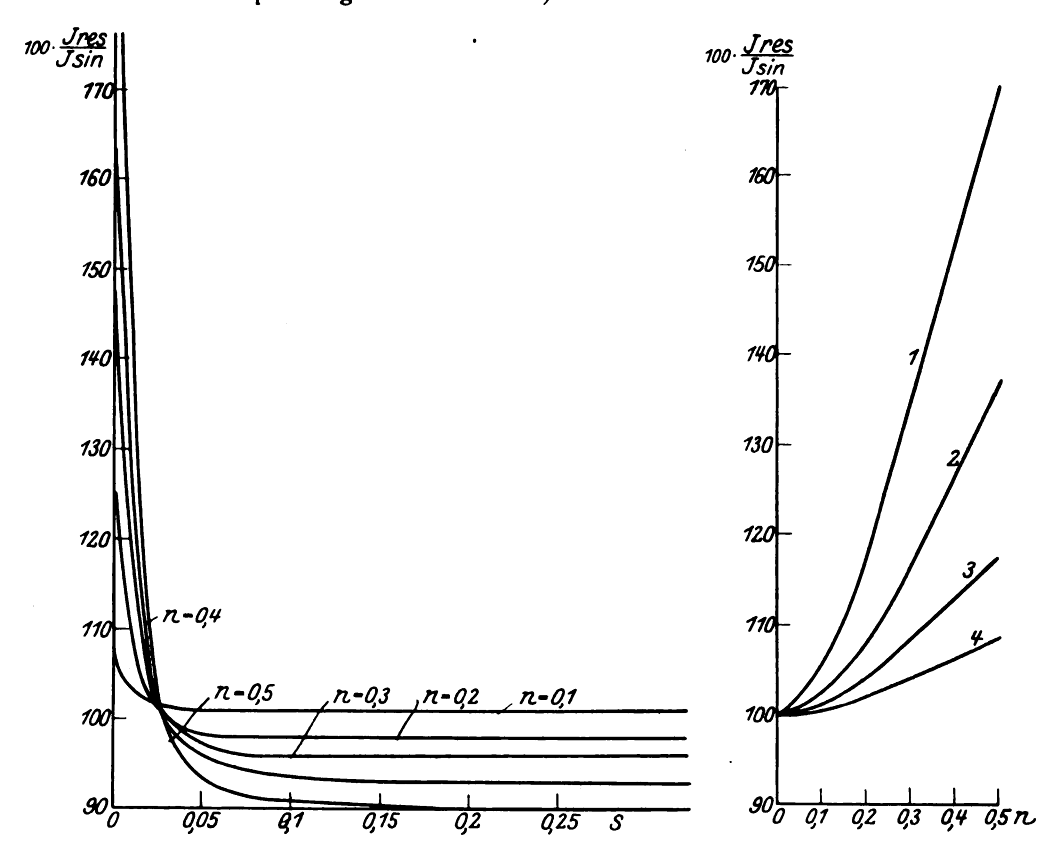


Bild 6. Vergleich des sinusförmigen mit dem verzerrten Strom bei verschiedenen Schlüpfungen. m = s.

Bild 7. Querkurven zu Bild 6.
Kurve 1 s = 0,005
2 s = 0,010
3 s = 0,015
4 s = 0,020.

Es ist dargestellt in:

Bild 2 und Bild 5 das Verhalten bei Auftreten einer 3. Harmonischen,
„ 3 „ „ 6 „ „ „ „ „ 5. „
„ 4 „ „ „ „ „ 3. und 5. „

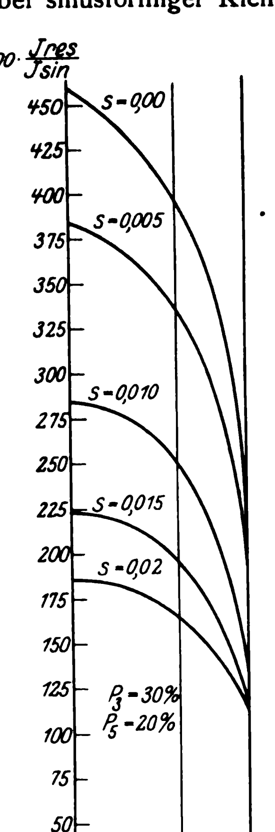
In Bild 7 sind Querkurven zu den Schaulinien des Bildes 6 gezeichnet. In Bild 8 ist für verschiedene Schlüpfungen s_1 $J_{res} = f(n)$; $\left[\text{hierin } n = \frac{P_m}{P_1}\right]$ dargestellt, und

zwar so, daß auf der Abszissenachse von links nach rechts abnehmende fünfte und zunehmende dritte Oberschwingung dargestellt ist.

Der Strom der höheren Frequenz ist bei verschiedenen Läuferdrehzahlen annähernd (fünfte Oberschwingung $s_5 \doteq$ konst) oder genau (dritte Oberschwingung) konstant. Die prozentuale Abweichung des resultierenden Stromes vom sinusförmigen ist daher bei kleinen Schlüpfungen wesentlich größer als bei großen Schlüpfungen. Bei diesen ist unter Umständen der resultierende Strom kleiner als der bei sinusförmiger Klemmenspannung auftretende.

Mit zunehmender Spannung der Oberschwingung wächst die Abweichung zuerst langsam, dann immer schneller an.

Beim vorliegenden Motor verursacht eine Verzerrung durch eine Oberwelle von 20% der Grundwelle, schon bei $s = 2\%$ nur mehr eine Stromerhöhung um 1% bei der fünften Harmonischen. Bei der dritten Harmonischen liegen allerdings die Verhältnisse viel ungünstiger. Die Stromerhöhung beträgt unter obigen Bedingungen 31%; selbst bei einer Oberschwingung von nur 10% beträgt bei der angegebenen Schlüpfung die Abweichung noch 9%.



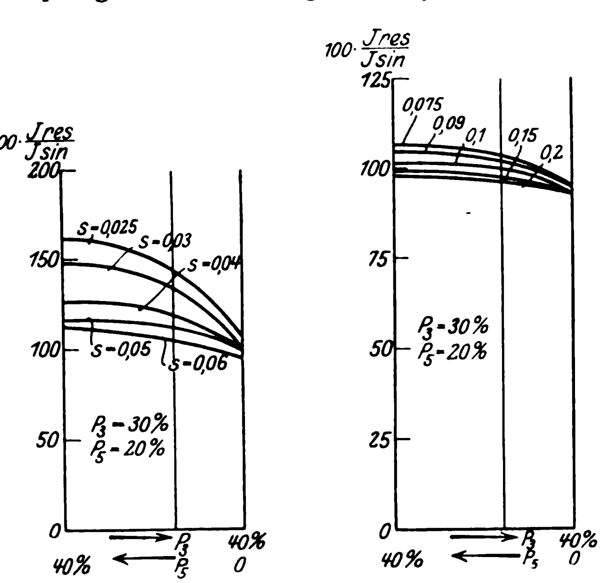


Bild 8. Vergleich der Ströme für Oberschwingungen verschiedener Frequenz bei gleichem Wert der Grundharmonischen, bei verschiedenen Schlüpfungen s der Grundharmonischen.

Treten in der Spannungswelle dritte und fünfte Oberschwingung auf, so wird der Strom auf einen Wert verändert, der zwischen dem für reine dritte und reine fünfte Harmonische liegt.

3. Leistungsfaktor.

Während der Leistungsfaktor bei sinusförmigem Wechselstrom eine geometrische Deutung als Phasenverschiebungswinkel erlaubt, ist eine ähnliche Erklärung bei verzerrtem Wechselstrom nicht möglich. Man kann überhaupt verschiedene Ausdrücke für den Leistungsfaktor aufstellen, je nachdem von welcher Erklärung man ausgeht.

Zunächst kann man lediglich den Strom ins Auge fassen:

$$\cos\varphi = \frac{\Sigma J \cos\varphi}{\Sigma J} = \frac{P_1 y_1 \cos\varphi_1 + \Sigma P_m y_m \cos\varphi_m}{\sqrt{(P_1 y_1)^2 + \Sigma (P_m y_m)^2}}. \tag{4}$$

Sodann kann man $\cos\varphi$ als das Verhältnis von Watt und Scheinleistung darstellen, also die Spannung hereinbringen. Je nachdem, ob man hierbei Strom und Spannung gemeinsam oder getrennt behandelt, kommt man zu den beiden folgenden Ausdrücken:

$$\cos\varphi = \frac{\Sigma P J \cos\varphi}{\Sigma P J} = \frac{P_1^2 y_1 \cos\varphi_1 + \Sigma (P_m^2 y_m \cos\varphi_m)}{P_1^2 y_1 + \Sigma (P_m^2 y_m)}. \tag{5}$$

$$\cos\varphi = \frac{\Sigma P J \cos\varphi}{\Sigma P \Sigma J} = \frac{P_1^2 y_1 \cos\varphi_1 + \Sigma P_m^2 y_m \cos\varphi_m}{\sqrt{P_1^2 + \Sigma P_m^2}\sqrt{(P_1 y_1)^2 + \Sigma (P_m y_m)^2}}. \tag{6}$$

Von diesen drei Ausdrücken scheint wohl Gleichung (4) und Gleichung (5) physikalisch am richtigsten; in Gleichung (6) werden dagegen die Watt getrennt für jede einzelne Harmonische, die VA gemeinsam berechnet.

Man kann nun bei denjenigen höheren Harmonischen, die ein Drehfeld ausbilden, stets schreiben:

$$J_1 = \frac{P_1}{\sqrt{r^2 + x^2}}, \tag{7}$$

$$J_m = \frac{P_m}{\sqrt{r^2 + x^2 m^2}}, \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{x}{r}; \qquad \cos^2\varphi_1 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1} = \frac{r^2}{r^2 + x^2}, \tag{9}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_m = \frac{x_m}{r}; \qquad \cos^2\varphi_m = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_m} = \frac{r^2}{m^2 x^2 + r^2}. \tag{10}$$

Setzt man nun in Gleichung (4) ein, so erhält man, nachdem man durch P_1 gekürzt hat:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\frac{r}{r^2 + x^2} + n\frac{r}{r^2 + m^2 x^2}}{\sqrt{\frac{1}{r^2 + x^2} + \frac{n^2}{r^2 + m^2 x^2}}} = \frac{r}{r}\cdot\frac{(1 + n) + \frac{x^2}{r^2}(m^2 + n)}{\sqrt{(1 + n^2) + \frac{x^2}{r^2}(m^2 + n^2)}\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{m^2 x^2}{r^2}\right)}} \\ &= \cos\varphi = \frac{(1 + n) + \operatorname{tg}^2\varphi_1 (m^2 + n)}{\sqrt{(1 + n^2) + \operatorname{tg}^2\varphi_1 (m^2 + n^2)}\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1)(1 + m^2 \operatorname{tg}^2\varphi_1)}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Setzt man die Werte von Gleichung (7) bis (10) in den Ausdruck (5) ein, so erhält man — wieder unter Weglassung von P_1 in Zähler und Nenner —

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\frac{r}{r^2 + x^2} + \frac{n^2 r}{r^2 + x^2}}{\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} + \frac{n^2}{\sqrt{r^2 + x^2}}} = \\ \cos\varphi &= \frac{(1 + n^2) + \operatorname{tg}^2\varphi_1 (m^2 + n^2)}{\left(\sqrt{1 + m^2 \operatorname{tg}^2\varphi_1} + n^2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1}\right)\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1)(1 + m^2 \operatorname{tg}^2\varphi_1)}} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Gleichung (6) lautet nach einer ganz ähnlichen Umformung:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}\cdot\sqrt{\frac{(1 + n^2) + \operatorname{tg}^2\varphi_1 (m^2 + n^2)}{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1)(1 + m^2 \operatorname{tg}^2\varphi_1)}}. \tag{13}$$

Um besser vergleichen zu können, wird für $m = 5$ gesetzt, ferner für $n = 0{,}1$. Mit $n = 0{,}1$ lauten die Gleichungen (11), (12), (13):

$$\cos\varphi = \frac{1{,}1 + 25\operatorname{tg}^2\varphi_1}{\sqrt{1{,}01 + 25\operatorname{tg}^2\varphi_1}\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1)(1 + 25\operatorname{tg}^2\varphi_1)}}, \tag{11a}$$

$$\cos\varphi = \frac{1{,}01 + 25\,\mathrm{tg}^2\varphi_1}{(\sqrt{1 + 25\,\mathrm{tg}^2\varphi_1} + 0{,}01\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi_1})\sqrt{(1 + \mathrm{tg}^2\varphi_1)(1 + 25\,\mathrm{tg}^2\varphi_1)}}, \quad (12\,\mathrm{a})$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1{,}01}} \cdot \sqrt{\frac{1{,}01 + 25\,\mathrm{tg}^2\varphi_1}{(1 + \mathrm{tg}^2\varphi_1)(1 + 25\,\mathrm{tg}^2\varphi_1)}}. \quad (13\,\mathrm{a})$$

Wie schon aus einer kurzen Betrachtung der drei Formeln ersichtlich ist, ist der Unterschied sehr gering; dies geht auch aus der folgenden Zusammenstellung hervor, die die Werte von $\cos\varphi_{res}$ für $m = 5$, $n = 0{,}1$ enthält:

Formel	$\cos\varphi_1$: 0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
(11)	0,501	0,602	0,702	0,806	0,912	1,095
(12)	0,499	0,593	0,698	0,798	0,899	1,00
(13)	0,499	0,597	0,697	0,796	0,896	1,00.

Man sieht aus dieser Zusammenstellung auch, daß die Definition $\cos\varphi_{res} = \frac{\Sigma J \cos\varphi}{\Sigma J}$ unzulässig ist, da bei $\cos\varphi = 1{,}0$ der resultierende Leistungsfaktor größer als 1 würde.

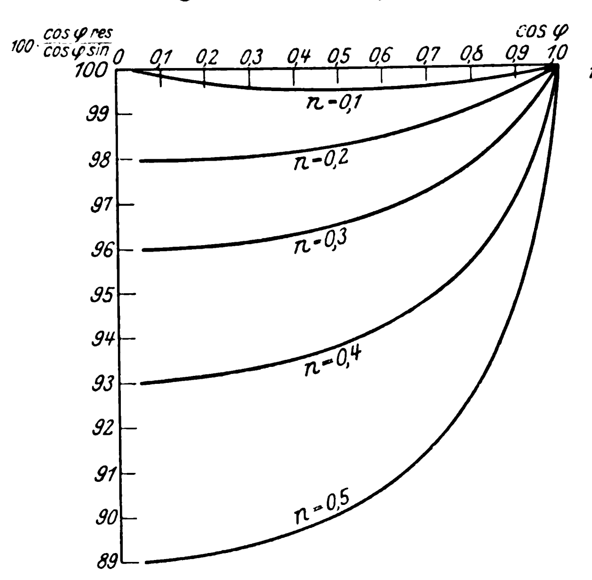


Bild 9. Vergleich des Leistungsfaktors für sinusförmige und verzerrte Klemmenspannung für $m = 5$ und verschiedene Formen der Spannungskurve ($n = 0{,}1 - 0{,}5$).

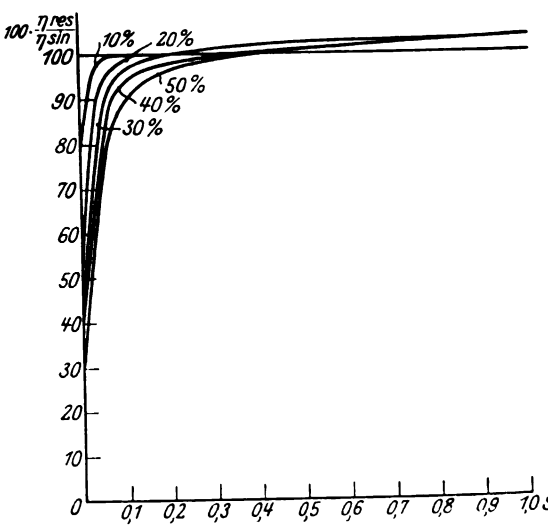


Bild 10[1]). Vergleich des Leistungsfaktors für sinusförmige und verzerrte Klemmenspannung für $m = 3$ und verschiedene Formen der Spannungskurve.

Für die fünfte Harmonische ist in Bild 9 eine Kurvenschar gezeichnet, deren Parameter n ist und die zu den als Abszissen aufgetragenen Werten von $\cos\varphi_1$ als Ordinaten die Verhältniszahlen $\frac{\cos\varphi_{res}}{\cos\varphi_{sin}} \cdot 100$ angibt.

Da für die dritte Harmonische die Formeln (4) — (6) nicht anwendbar sind — liegt doch ein ganz anderer Stromkreis vor —, wurden in Bild 10 für den Vergleichsmotor zu den Abszissen s_1 die zugehörigen Werte von $\frac{\cos\varphi_{res}}{\cos\varphi_{sin}} \cdot 100$ für die verschiedenen Formen der Spannungskurve aufgetragen.

[1]) In dem Bild 10 ist statt $\frac{\eta_{res}}{\eta_{sin}}$ $\frac{\cos\varphi_{res}}{\cos\varphi_{sin}}$ zu setzen. Die Zahlen 10%, 20% usw. geben die Größe der Oberschwingung in % der Grundharmonischen an.

4. Das Drehmoment.

Bei verzerrter Klemmenspannung erfährt das Drehmoment eine Verkleinerung zunächst dadurch, daß bei gleichem Effektivwert der Klemmenspannung nur die Grundwelle (statt der gesamten Spannung, wie bei Sinusform) ein positives Drehmoment erzeugt. Und dann verursacht die fünfte Harmonische, deren Drehfeld gegenläufig ist, ein negatives Drehmoment. Zur zahlenmäßigen Erfassung genügt aber vollständig die Verkleinerung des positiven Drehmoments durch die Verkleinerung der wirksamen Spannung, so daß man schreiben kann:

$$W_{a\,res} = W_{a\,sin}\,(1 - P_m^2). \tag{14}$$

Denn die für die fünfte Harmonische in Betracht kommende Spannung ist in der Regel viel geringer als die Grundharmonische; und ferner kommt in dem Ausdruck für das Drehmoment im Nenner die Schlüpfung vor, die ja für die fünfte Oberschwingung im Motorbereich stets größer als 1 ist, für die Grundschwingung aber stets kleiner als 1 ist. —

5. Die Leistung.

Aus einer ganz ähnlichen Überlegung wie für das Drehmoment findet man

$$W_{2\,res} = W_{2\,sin}\,(1 - P_m^2) \tag{15}$$

Die negative Leistung der Oberschwingung wird noch eher vernachlässigbar sein als das Drehmoment, da im Zähler noch der Faktor $(1 - s)$ steht, der für die Grundschwingung nur unwesentlich kleiner als 1 ist, während er für die fünfte Oberschwingung etwa 0,2 beträgt.

6. Wirkungsgrad.

Entsprechend den 2 Formeln (5), (6) für den Leistungsfaktor, kann man auch für den Wirkungsgrad 2 Definitionen aufstellen, je nachdem, ob man für Strom und Spannung die resultierenden Werte einzeln oder gemeinsam einführt:

$$\eta_{res} = \frac{W_2}{\Sigma P \cdot \Sigma J \cos\varphi} \tag{16}$$

$$\eta_{res} = \frac{W_2}{\Sigma P J \cos\varphi}. \tag{17}$$

Meßbar ist nur der Ausdruck (17). Um die beiden Definitionen zu vergleichen, wird $\eta_{res} = \frac{W_2}{\Sigma P J \cos\varphi}$ mit η_1 und $\eta_{res} = \frac{W_2}{\Sigma P \Sigma J \cos\varphi}$ mit η_2 bezeichnet. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta_2}{\eta_1} &= \frac{\Sigma P J \cos\varphi}{\Sigma P \Sigma J \cos\varphi} = \frac{\frac{P_1^2 r}{r^2 + x^2} + \frac{n^2 P_1^2}{r^2 + m^2 x^2}\cdot r}{P_1\sqrt{(1 + n^2)}\cdot P_1\sqrt{\left(\frac{r}{r^2 + x^2}\right)^2 + \frac{n^2 r^2}{(r^2 + m^2 x^2)^2}}} = \\ \frac{\eta_2}{\eta_1} &= \frac{(1 + n^2) + tg^2\varphi_1\,(m^2 + n^2)}{\sqrt{1 + n^2}\,\sqrt{(1 + m^2\,tg^2\varphi_1)^2 + n^2\,(1 + tg^2\varphi_1)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

woraus ersichtlich ist, daß die beiden Ausdrücke nur wenig voneinander abweichen.

Der Wirkungsgrad wird bei verzerrter Klemmenspannung nur unwesentlich kleiner sein als bei sinusförmiger, denn der Zähler in der Gleichung für den Wirkungsgrad hat sich im Verhältnis $\frac{1 - P_m^2}{1}$ verkleinert. Der Nenner wird zunächst im gleichen Maß verkleinert (dann würde sich der Wirkungsgrad gar nicht verändern), und wächst dann etwas durch das Hinzutreten von $P_5 J_5 \cos\varphi_5$; dies macht aber gegenüber $P_1 \cdot J_1 \cdot \cos\varphi_1$ wenig aus, namentlich bei großem $J_1 \cos\varphi_1$.

In Bild 11 ist $\frac{\eta_{res}}{\eta_{sin}} 100 = f(s_1)$ für den Vergleichsmotor und für verschiedene Werte der dritten Harmonischen aufgetragen.

Entsprechend den größten Werten $J_1 \cos\varphi_1$ bei mittleren Schlüpfungen ist dort der Unterschied zwischen beiden Wirkungsgraden am geringsten.

Der Wirkungsgrad bei Auftreten einer fünften Harmonischen unterscheidet ich praktisch nicht von dem bei sinusförmiger Klemmenspannung.

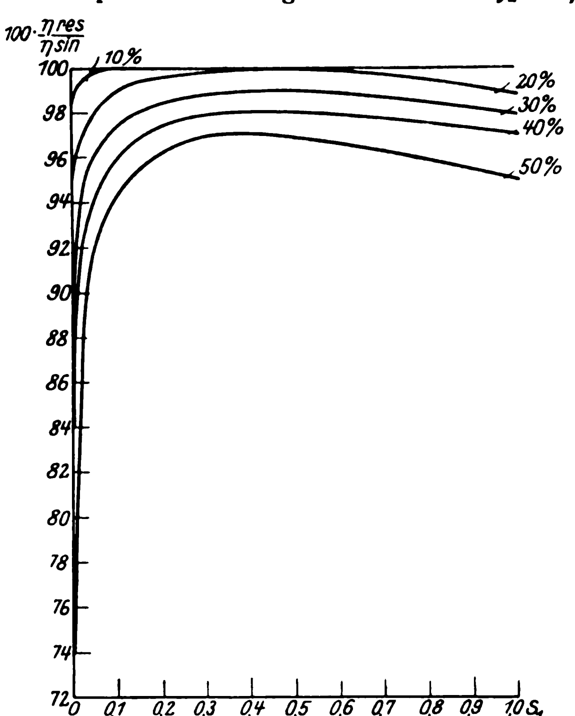


Bild 11. Vergleich des Wirkungsgrades für sinusförmige und verzerrte Klemmenspannung für m = 3 und verschiedene Frequenz der Spannungskurve (Effektivwert der Oberschwingung 10—50% der Grundharmonischen).

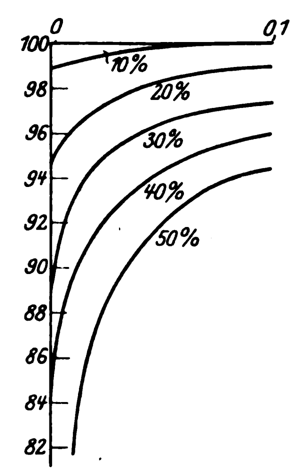


Bild 11a. Teil der Kurven aus Bild 11 in vergrößertem Maßstab.

Teil II.

Der Einfluß der Konstanten auf das Verhalten der Motoren bei verzerrter Klemmspannung.

1. Einleitung.

Im ersten Teil wurden alle Beziehungen an einem Motor betrachtet. Fragt man nun, in welcher Weise sich der Einfluß der Spannungsverzerrung geltend macht, wenn ein anderer Motor vorliegt, so muß erst die Abhängigkeit der Betriebsbedingungen von den Motorkonstanten bei sinusförmiger Klemmenspannung bekannt sein.

Eine Arbeit des gleichen Verfassers über dieses Thema ist in E und M, Wien, Heft 16, 1925 erschienen. Das dort angewendete Verfahren läßt sich kurz wie folgt andeuten:

Die Motorersatzschaltung zeigt fünf unabhängige Veränderliche (primärer und sekundärer Wirk- und Blindwiderstand, Blindwiderstand der Magnetisierung), die den Leitwert, $\cos\varphi$, usw. beeinflussen. Um die Gesetze zu verfolgen, werden Reihen von Kurvenscharen aufgestellt, die alle möglichen Zusammenstellungen umfassen und für jede Veränderliche einen oberen und einen unteren Grenzwert einführen. Als Abszisse ist primärer Blindwiderstand (x_1) als Ordinate der Leitwert, als Kurvenparameter der sekundäre Wirkwiderstand $\left(\frac{r_2}{s}\right)$ gewählt, so daß 8 Kurvenscharen erforderlich sind. Durch Interpolation kann man den Einfluß beliebiger Konstanten auf das Motorverhalten verfolgen.

2. Einfluß auf die Stromstärke.

Es ist am übersichtlichsten, die Stromstärke bei verzerrter Klemmenspannung in % der bei sinusförmiger Spannung auftretenden anzugeben.

Selbverständlich hat das Verhältnis der Spannungen einen bedeutenden Einfluß. Kennt man das Verhältnis der Leitwerte von Grund- und Oberschwingung und das Verhältnis der betreffenden Spannungen, so kann man das Verhältnis des resultierenden Stromes zu dem bei sinusförmiger Klemmenspannung ableiten, bzw. aus einer Kurve ablesen. Bezeichnet man mit y_{res}, y_1, y_m die Leitwerte, die der resultierenden, verzerrten Klemmenspannung bzw. der Spannung der Grund- und oberen Harmonischen, mit J und den entsprechenden Indizes die zugehörigen Ströme, mit n — so wie im Teil I das Spannungsverhältnis, so wird:

$$J_{res} = \sqrt{J_1^2 + J_m^2}$$

$$P_m = n \cdot P_1; \quad P_{res} = P_1 \sqrt{1 + n^2}; \quad P_{sin} = P_1 \sqrt{1 + n^2}$$

$$\frac{y_1}{y_m} = l$$

$$J_m = y_m \cdot P_m = y_1 \cdot P_1 \frac{n}{l}$$

$$J_1 = y_1 \cdot P_1$$

$$J_{res} = \sqrt{J_1^2 + J_m^2} = y_1 P_1 \sqrt{1 + \frac{n^2}{l^2}}$$

$$J_{sin} = y_1 \cdot P_{sin} = y_1 P_1 \sqrt{1 + n^2}$$

$$\frac{J_{res}}{J_{sin}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{n^2}{l^2}}}{\sqrt{1 + n^2}} = \sqrt{\frac{n^2 + l^2}{l^2(1 + n^2)}}. \tag{19}$$

Die Werte l für verschiedene x_1 sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, die sich auf den Wert $s_1 = 0,1$ bezieht. Da, wie oben erwähnt, s_5 bei Veränderung von s_1 sich nur wenig ändert, ist eine Umrechnung auf andere Schlüpfungen einfach: Der Wert l ist mit dem Verhältnis der Leitwerte y_1 zu multiplizieren, die den Schlüpfungen $s_1 = 0,1$ und der neuen Schlüpfung entsprechen:

x_2 Untere Grenze (0,3)

r_2	x_a obere Grenze (400)						x_a untere Grenze (10)					
	r_1 obere Grenze (5)			r_1 untere Grenze (0,05)			r_1 obere Grenze (5)			r_1 untere Grenze (0,05)		
	$x_1 = 0,3$	15	30	0,3	15	30	0,3	15	30	0,3	15	30
5	0,90	4,75	5,20	4,90	5,10	5,40	1,50	4,55	4,90	2,50	4,90	5,00
1	0,40	3,50	4,90	0,50	4,20	5,20	1,10	3,55	4,40	1,00	3,50	4,40
0,1	0,20	1,40	2,60	0,10	1,30	2,60	0,90	3,05	3,80	0,50	3,00	3,80

x_2 Obere Grenze (30)

r_2	x_a obere Grenze (400)						x_a untere Grenze (10)					
	r_1 obere Grenze (5)			r_1 untere Grenze (0,05)			r_1 obere Grenze (5)			r_1 untere Grenze (0,08)		
	$x_1 = 0,3$	15	30	0,3	15	30	0,3	15	30	0,3	15	30
5	2,55	3,60	4,00	2,85	3,80	4,50	3,95	4,90	4,90	2,00	4,50	2,50
1	4,80	5,35	5,30	5,15	5,45	5,80	4,00	5,20	5,10	2,40	5,20	2,60
3,1	5,25	5,60	5,70	5,30	5,65	5,85	4,60	5,30	5,10	2,70	5,30	2,60

Hat man nun l gefunden, so kann man aus Gleichung (19) für jedes n das Verhältnis $\frac{J_{res}}{J_{sin}}$ ausrechnen. Um dies zu erleichtern, ist die Gleichung (19) in Bild 12 für verschiedene Werte von n dargestellt; aus dem Bild kann man dann (da l und n bekannt ist) ohne weiteres $\frac{J_{res}}{J_{sin}}$ entnehmen.

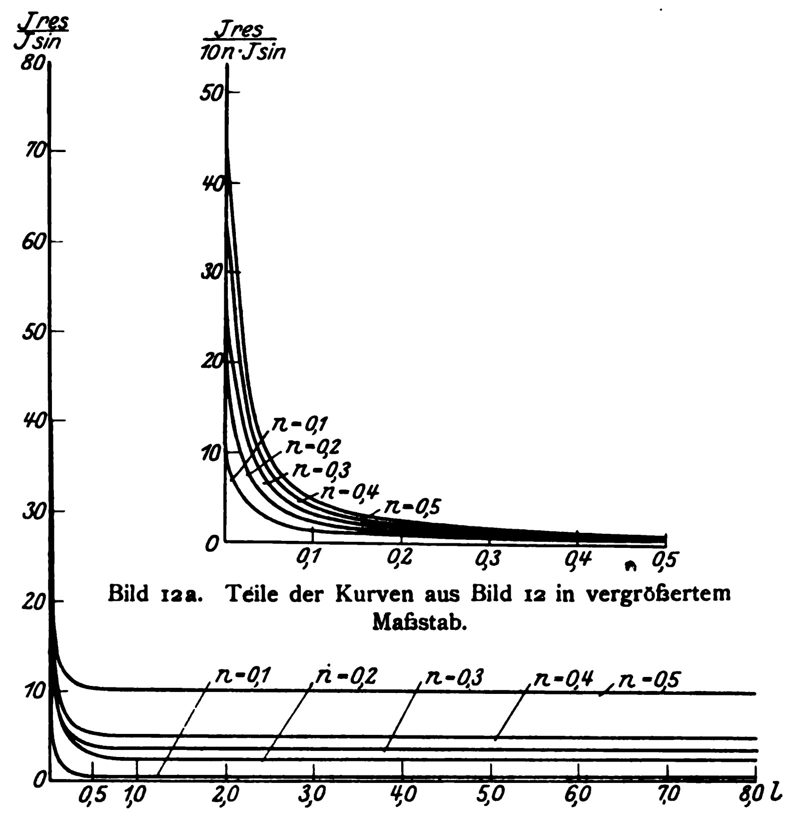


Bild 12a. Teile der Kurven aus Bild 12 in vergrößertem Maßstab.

Bild 12. Stromverhältnis in Abhängigkeit vom Leitwertverhältnis für verschiedene Formen der Spannungskurve (n = 0,1 — 0,5).

Bei kleineren Schlüpfungen wird l kleiner:

Für $l > 1$ ist $J_{res} < J_{sin}$

„ $l = 1$ „ $J_{res} = J_{sin}$

„ $l < 1$ „ $J_{res} > J_{sin}$.

Für sehr kleine l und mittlere n kann man in erster Annäherung den Nenner in Gleichung (19) gleich eins setzen, und im Zähler l gegen $\frac{n^2}{l^2}$ vernachlässigen. Dann wird $\frac{J_{res}}{J_{sin}} = \frac{n}{l}$ (19a); dieser Gleichung entspricht für konstantes n eine gleichseitige Hyperbel.

Die für s = 0,1 gefundenen Werte von l bewegen sich zwischen l = 0,1 bis l = 11,5. Bei größeren Werten von l ändert sich $\frac{J_{res}}{J_{sin}}$ bei konstantem n praktisch nicht mehr. —

3. Der Leistungsfaktor.

Die Veränderung des Leistungsfaktors bei verzerrter Klemmenspannung gegenüber sinusförmiger ist — wie in Teil I abgeleitet — durch den Leistungsfaktor bei sinusförmiger Klemmenspannung ausdrückbar.

4. Das Drehmoment.

Praktisch genügend genau kann man — wie in Teil I abgeleitet — das Drehmoment des gegenläufigen Drehfeldes vernachlässigen.

Dadurch wird das resultierende Drehmoment auch von den Motorkonstanten unabhängig und ist nur mehr von der Kurvenform der Klemmenspannung (Größe n) beeinflußt (Bild 14).

5. Die vom Rotor abgegebene Leistung.

Es gilt dasselbe, wie das für das Drehmoment Gesagte.

6. Der Wirkungsgrad.

Der Wirkungsgrad bei sinusförmiger Klemmenspannung wird

$$\eta_{sin} = \frac{W_2 \cdot P_{sin}^2}{y_1 \cos \varphi_{sin} \cdot P_{sin}^2}. \tag{20}$$

Für verzerrte Klemmenspannung werde der meßbare Ausdruck (17) aus Teil I verwendet. Ausgewertet ergibt er

$$\eta_{res} = \frac{W_2 (P_{sin}^2 - P_m^2)}{y_1 P_1^2 \cos \varphi_1 + y_m P_m^2 \cos \varphi_m}. \tag{21}$$

Es interessiert wieder in erster Reihe das Verhältnis $\frac{\eta_{res}}{\eta_{sin}}$.

Setzt man nun für P_{sin} und P_m ein und dividiert Gleichung (21) durch Gleichung (20), so erhält man:

$$\frac{\eta_{res}}{\eta_{sin}} = \frac{W_2 P_1^2}{W_2 P_1^2 (1 + n^2)} \cdot \frac{y_1 P_1^2 \cos \varphi_1 + y_m n^2 \cdot P_1^2 \cos \varphi_m}{y_1 \cos \varphi_1 P_1^2 (1 + n^2)}.$$

Kürzt man durch $W_2 P_1^4$ und setzt $\frac{y_1}{y_m} = l$, dann erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta_{res}}{\eta_{sin}} &= \frac{1}{(1 + n^2)^2} \cdot \frac{l \cos \varphi_1 + n^2 \cos \varphi_m}{l \cos \varphi_1} \\ \frac{\eta_{res}}{\eta_{sin}} &= \frac{1}{(1 + n^2)^2} \cdot \left(1 + \frac{n^2}{l} \cdot \frac{\cos \varphi_m}{\cos \varphi_1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Wieder wirkt großes l ausgleichend auf das Verhältnis, während kleines l den Wert des Bruches $\frac{\eta_{res}}{\eta_{sin}}$ hinauftreibt.

7. Schlußwort.

Die Ableitungen des Teiles II gelten nur, wenn die Oberschwingung ein Drehfeld ausbildet, wobei derselbe Ersatzstromkreis gilt wie bei sinusförmiger Klemmenspannung. Tritt dagegen eine dritte Harmonische auf, so lassen sich die hier entwickelten Formen nur insoweit anwenden, als nicht für das Verhältnis $\frac{\cos \varphi_m}{\cos \varphi_{sin}}$ die Werte aus Teil II eingeführt werden. y_0 ist bei nicht drehfeldbildenden Harmonischen genau (nicht nur mit praktisch ausreichender Annäherung) konstant.

$\cos \varphi_m$ ist auch konstant, es würde dann für die dritte Harmonische

$$\cos \varphi_{res} = \frac{P_1^2 y_1 \cos \varphi_1 + P_3^2 y_3 \cos \varphi_3}{P_1^2 y_1 + P_3^2 y_3}$$

die Form annehmen:

$$\cos \varphi_{res} = \frac{P_1^2 y_1 \cos \varphi_1 + c}{P_1^2 y_1 + d}. \tag{23}$$

Ein Überführen von $\cos \varphi_1$ in $\cos \varphi_m$ (bzw. $\cos \varphi_{res}$) ist nicht mehr möglich. Hat man aber $\cos \varphi_m$ ermittelt, dann gelten die übrigen Formeln auch für die dritte Harmonische. Drehmoment und abgegebene Leistung verändern sich natürlich nach Gleichung (14) bzw. (15).



Die zusätzlichen Stromverluste unvollkommen verschränkter Leiter.

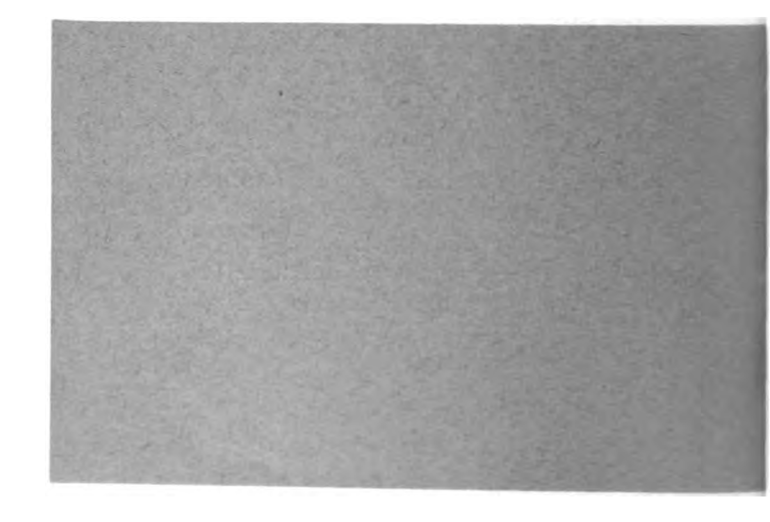
Zu meinem Aufsatz im Heft 2 machte mich Herr Prof. Richter auf seine Arbeit im Archiv, Band V, aufmerksam, in der die Gleichheit des Widerstandsverhältnisses verschränkter Leiter nach Abb. 1 bzw. 6 meines Aufsatzes mit dem massiver Leiter von halber bzw. viertel Höhe bereits erwiesen wurde. Ich hörte schon von Herrn Dr. Fleischmann, der kürzlich (Journal AJEE, November 1924) in neuartiger Weise den exakten Beweis dieser Eigenschaft der Leiter nach Abb. 1 lieferte, daß das Ergebnis an sich bekannt ist, und stelle gern die Priorität Richters an dieser für die Praxis nicht unwichtigen Erkenntnis fest. Die von mir benutzte Darstellungsweise, welche die Parabelbögen der streuelektromotorischen Kräfte betrachtet und zu resultierenden Parabeln zusammensetzt, scheint mir den Vorzug großer Anschaulichkeit zu besitzen, denn sie läßt Größe und Richtung der die Zusatzströme erzeugenden EMKe und damit die Eigenschaften der Leiter unmittelbar erkennen. Sie dürfte sich daher auch bei anderen Stromverdrängungsproblemen als nützlich erweisen.

Zur Frage der Priorität des bekannten Prinzips der mehrfachen Verschränkung sei noch auf das DRP 319567 (Richter) vom 11. 11. 1917, das dem Bild 6 entspricht, und auf das ältere DRP 287323 (AEG — Hillebrand) verwiesen.

Berlin, den 23. Februar 1925.

Pohl.

Abgeschlossen am 30. Juni 1925.



Die Wanderwelle nach Aufnahmen mit dem Kathodenoszillographen.

Von

W. Rogowski und **E. Flegler.**

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

Es ist ein alter Wunsch, die mit Lichtgeschwindigkeit längs Drähten dahinbrausenden elektrischen Wanderwellen (Drahtwellen) oszillographisch aufzunehmen. Bisher hat seine Erfüllung auf sich warten lassen. Unseres Wissens wenigstens sind bisher von keiner Seite Wanderwellenaufnahmen gezeigt worden. Die Nachprüfung unserer theoretischen Vorstellungen, die Fülle von Anregungen, die auf niederfrequentem Gebiet der Siemens sche Oszillograph gegeben hat und heute noch gibt, blieben auf dem Gebiete der Wanderwellen bisher aus.

In Bild 1 und 2 bringen wir nun die ersten Wanderwellenoszillogramme. Sie beziehen sich auf eine Doppelleitung von 75 m einfacher Länge, an die plötzlich eine Spannung von 1000 Volt geschaltet wird (Bild 3). Die Akkumulatorenbatterie

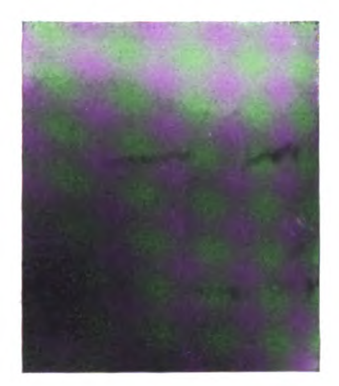


Bild 1. Erstes Wanderwellenoszillogramm.



Bild 2. Zweites Wanderwellenoszillogramm. Es stimmt auch in den Feinheiten mit Bild 1 überein.

Beide Oszillogramme sind einmalig geschrieben. Es ist nichts an ihnen retouchiert worden. Die Originale lassen die Feinheiten erheblich klarer und deutlicher erkennen als die vorliegende Wiedergabe.

wurde bei den Aufnahmen durch einen Kondensator von etwa 1 Mikrofarad überbrückt. Denn die Batterie selbst erwies sich als zu unergiebig für die starken Ströme, die im Moment des Schaltens in die Doppelleitung ziehen. Der Schalter bestand aus einem Draht von 1 mm Durchmesser, der in Quecksilber gestoßen wurde. Auch hatten wir parallel dem Schalter, um ja einigermaßen periodische Verhältnisse zu erzielen, einen nicht gezeichneten Kondensator eingefügt.

Die Theorie der Einschaltwelle stammt von Kirchhoff aus dem Jahre 1857. Sie ergibt, wenn alle Verluste vernachlässigt werden, für die Spannung am Ende der Leitung — und hierauf beziehen sich auch die Oszillogramme 1 und 2 — den bekannten rechteckförmigen Wellenzug (Bild 4). Vergleichen wir nun das theoretische (Bild 4) und experimentelle Ergebnis (Bild 1 und 2)!

Der Anfang des Vorgangs geht in Bild 1 und 2 verloren. Das plötzlich eingeschaltete Kathodenrohr gibt so viel Elektronen auf die im Vakuum befindliche Platte, daß sie den Treffpunkt mitsamt der Umgebung verschmutzen. Der erste steile Anstieg der Welle, der die Spannung von Null auf den doppelten Wert der Schaltspannung hebt, wird aus diesem Grunde verdeckt. Jedoch ist noch der letzte Abschnitt des Anstieges deutlich zu sehen. Es folgt dann der in der theoretischen Kurve wagrechte Strich, der die volle Spannung 2 E darstellen soll. Ihn finden wir in den Oszillogrammen deutlich ausgeprägt. Er enthält aber noch eine recht hohe

Oberschwingung[1]). Man zählt etwa 15 Buckel. Diesen Strich mit all seinen Feinheiten hat der Kathodenstrahl in einer halben milliontel Sekunde gezeichnet.

Im theoretischen Bild folgt nun der jähe Abfall der Spannung, der im Oszillogramm 1 in wunderbarer Deutlichkeit zum Ausdruck kommt. Er ist in rund ein hundertmilliontel bis einmilliardtel Sekunde niedergeschrieben worden! Wir befinden uns hier bereits an der Grenze der richtigen Wiedergabe unseres Oszillographen. Ob der Spannungsabfall mehr oder weniger steil verläuft, ist eine Frage, von der die elektrotechnische Literatur der letzten 15 Jahre widerhallt. Beweise dafür und wider wurden gebracht, ohne endgültige Klärung zu geben. Unter den Bedingungen unseres Versuches ergibt das Oszillogramm eine unerhörte Steilheit. Der Größenordnung nach liegt die ganze Spannung etwa auf einem Meter Laufweg der Welle. Der zeitliche Anstieg der Front ist sicherlich so rasch, daß die einzelnen Buckel in dem wagrechten Strich (Spannung 2 E) langsam dagegen verlaufen. Um dies zu beweisen sind eben zwei Oszillogramme, die zwei verschiedenen Aufnahmen entsprechen, der Arbeit beigegeben. In den Feinheiten der Oberwellen stimmen sie überein. Die Oberwellen haben somit mit dem Funken nichts zu tun. Dieser verläuft noch rasch gegen die genannten Buckel, deren einzelner etwa eine zwanzigmilliontel Sekunde dauert.

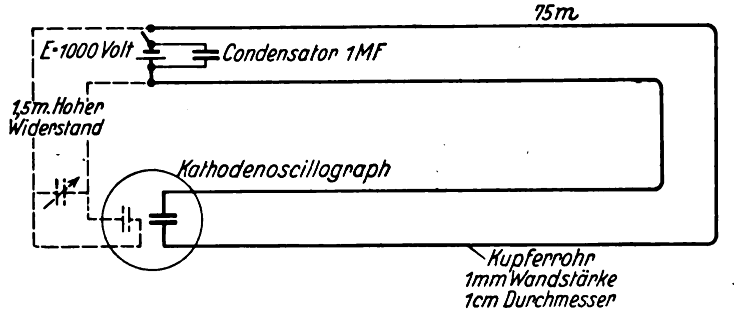


Bild 3. Schaltanordnung bei Aufnahme der Oszillogramme.

Wagner hat 1908 die steile Front für den Unfug verantwortlich gemacht, den die Wanderwelle in unseren Apparaten ausübt. Es ist möglich, daß er recht hat. Die steile Front kann jedenfalls da sein. Ob alle angerichteten Schäden darauf zurückzuführen sind, wird die alsbald einsetzende Untersuchung lehren.

In den Oszillogrammen wiederholt sich nun das Geschilderte periodisch. Auffallend wirkt noch die geringe Dämpfung. Wir müssen bei der vorliegenden Leitung (Kupferrohr von 1 mm Wandstärke, 10 mm Durchmesser) die Wanderwelle als sehr schwach gedämpften Wellenzug auffassen.

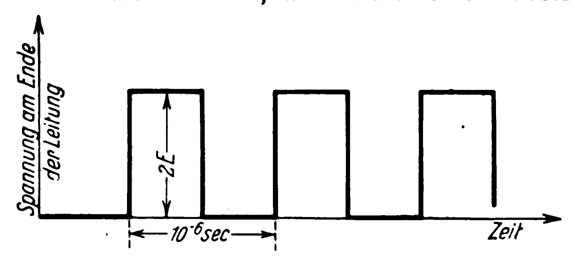


Bild 4. Theoretisches Bild nach Kirchhoff (1857).

Der Zeitmaßstab unserer Oszillogramme wird gegeben durch die Aufladung eines Kondensators (gestrichelte Leitung, Bild 3). Derselbe Schaltvorgang, der die Wanderwelle auslöst, bewirkt die Aufladung eines Kondensators. Die Zuleitungen zu ihm von 1,5 m Länge haben hohen Widerstand. Die Ladung des Kondensators vollzieht sich anfänglich natürlich auch wanderwellenmäßig, also nichtquasistationär. Sie ist aber bereits völlig quasistationär geworden und erfolgt nach bekannter e-Funktion, wenn die Wanderwelle den weiten Weg von 75 m zurückgelegt hat.

Den benutzten Oszillographen, zu dem Helmholtzgesellschaft und Elektrophysikalischer Ausschuß beigesteuert haben, beschreiben wir im nächsten Heft.

Wir sagen wohl nicht zu viel, wenn wir behaupten, daß mit den obigen Oszillogrammen ein neuer Zeitabschnitt der Untersuchung von Wanderwellen und einmalig ablaufender Hochfrequenzvorgänge beginnt.

[1]) Die Freileitung von 75 m war in vierfachen Schlangenlinien geführt, um sie in den beschränkten Räumen des Instituts unterzubringen. Vielleicht liegt hierin der Grund für die Entstehung der Oberwellen.

Abgeschlossen am 18. Mai 1925.

Archiv für Elektrotechnik

Herausgegeben unter Beteiligung
des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins
von
Prof. Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen
Verlag von Julius Springer in Berlin

XIV. Band | 7. Juli 1925 | 6. Heft

Inhaltsverzeichnis.

Preis M. 7.—

Das **Archiv für Elektrotechnik**

sieht seine Hauptaufgabe darin, allen in der Elektrotechnik wissenschaftlich arbeitenden Ingenieuren ein Sammelpunkt zu sein. Seine Arbeiten werden vorwiegend auf einem Gebiet liegen, in dem technische und physikalische Fragen ineinander übergehen. Das Archiv wird daher auch für alle auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Elektrotechnik tätigen Physiker von Interesse sein.

Das Archiv soll eine Ergänzung der „Elektrotechnischen Zeitschrift" nach der wissenschaftlichen Seite hin bilden, zumal die „Elektrotechnische Zeitschrift" infolge der Zusammensetzung ihres Leserkreises wirtschaftliche Fragen und beschreibende Aufsätze mehr als früher in den Vordergrund rücken muß.

Beiträge sowie sonstige für den Herausgeber bestimmte Mitteilungen werden erbeten unter der Adresse: Professor Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen, Elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule.

Die Herrn Verfasser werden infolge der gewaltig gestiegenen Unkosten gebeten, durch kurze und klare Fassung ihrer Mitteilungen und durch Beschränkung auf das Wesentliche an einer Herabminderung der Druckkosten mitzuwirken.

Nach einem Vorschlag des Elektrotechnischen Vereins sollen künftig von allen Archivarbeiten kurze Eigenberichte in der Elektrotechnischen Zeitschrift veröffentlicht werden. Die Herren Mitarbeiter werden gebeten, solche Eigenberichte, deren Umfang mit Rücksicht auf die heutigen Druckkosten 1/10 der Archivarbeit nicht überschreiten soll, spätestens bei der Korrektur einzusenden, damit sie gleichzeitig mit der Archivarbeit in der Elektrotechnischen Zeitschrift erscheinen können.

Es ist erwünscht, daß sich die Verfasser bei ihren Bezeichnungen an die Vorschläge des A. E. F. halten.

Das **„Archiv für Elektrotechnik"** erscheint vom Jahrgang 1923 (Band XII) ab in einzeln berechneten Heften. Der Preis eines Heftes wird sich nach dem Umfang desselben und den entstandenen Herstellungskosten richten.

Die Mitglieder des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins, sowie die Bezieher der „Elektrotechnischen Zeitschrift" erhalten auf den Bezugspreis einen Nachlaß von 25%.

Der Bezug kann durch jede Buchhandlung, sowie durch die unterzeichnete Verlagsbuchhandlung erfolgen.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9, Linkstr. 23/24.

Fernsprecher: Amt Kurfürst, 6050, 6053. — Drahtanschrift: Springerbuch-Berlin.
Reichsbank-Giro-Konto u. Deutsche Bank Berlin, Dep.-Kasse C.
Postscheck-Konten: für Bezug von Zeitschriften und einzelnen Heften: Berlin Nr. 20120 Julius Springer, Bezugsabteilung für Zeitschriften; für Anzeigen, Beilagen und Bücherbezug: Berlin Nr. 118935, Julius Springer.

Voranzeige.

In den nächsten Heften des Archivs für Elektrotechnik werden voraussichtlich folgende Arbeiten erscheinen:

E. Möller, Über die Abhängigkeit des dielektrischen Verlustwinkels und der Dielektrizitätskonstanten usw.

W. Rogowski u. **H. Rengier,** Ebene Funkenstrecke mit richtiger Randausbildung.

H. Rengier, Die Durchbruchfeldstärke der Luft bei ebenen Elektroden mit richtiger und falscher Randausbildung.

W. Rogowski u. **W. Grösser,** Über einen lichtstarken Kathodenstrahl-Oszillographen für Außenaufnahme rasch verlaufender Vorgänge.

W. Grösser und **R. Sonnenschein,** Schutzvorrichtung für Galvanometer bei Isolationsmessungen gegen Schaden durch Isolatordurchschlag.

F. Haas, Bestimmung des Ortes erhöhten Widerstandes an Einflachleitungen mit großer Ableitung.

L. Dreyfus, Die Anwendung des mehrphasigen Frequenzumformers zur Tourenregelung von Drehstrommotoren unter gleichzeitiger Kompensierung der Phasenverschiebung.

L. Casper, Zur Formel von Heaviside für Einschaltvorgänge.

H. Müller, Messungen über die Stirn von Wanderwellen mittels angekoppelter Schwingungskreise.

H. Lund, Zur Theorie des Stromverdrängungsmotors.

L. Hentschel, Über das dielektrische Verhalten ölgetränkter Papiere.

W. Reiche, Messungen über die Spannungsverteilung auf Transformatorwicklungen unter dem Einfluß von Sprungwellen.

J. Tscherdanzev, Zur Theorie der doppelt gespeisten Induktionsmaschine.

W. Rogowski und **E. Flegler,** Ein Kathodenoszillograph für einmalige veränderliche Vorgänge.

W. Geyger, Über die Verwendung sekundär belasteter Lufttransformatoren bei Wechselstrom-Kompensationsmessungen.

H. Lund, Das Diagramm des kompensierten AEG-Motors.

H. Hemmeter, Zur Theorie der Streuung.

Infolge des Stoffandranges werden die nächsten Hefte in rascherer Folge erscheinen.



Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G., Würzburg.